PROBLEMES I JOCS.

En el darrer butlletí haviem proposat el següent problema. És possible organitzar un campionat de manera que:

a) Hi participin 28 jugadors.

b) El campionat duri 9 dies.

c) Cada dia es facin 7 partides (en cada partida hi prenen part 4 jugadors).

d) Cada dia juguin tots una única partida.

e) Al final del campionat hagin jugat tots contra tots un sol cop?

Els que hem intentat resoldre aquest problema (sense utilitzar l'ordenador - mètodes de backtrack) ens n'hem adonat que darrera aquest enunciat senzill s'amaga un problema difícil, doncs hom pot reduir aquest problema al següent. Existeix una geometria lineal sobre un espai de 28 punts i 63 rectes tal que cada recta tingui 4 punts i cada punt estigui a 9 rectes? Recordem que una geometria lineal és un conjunt P (els seus elements són els punts) dotat d'una familia R de subconjunts (els seus membres són les rectes) de manera que:

1) Tota recta contingui al menys dos punts.

2) Donats dos punts diferents existeixi una recta i només una que els contingui.

El problema de classificar les geometries lineals finites és un problema obert d'ençà molts anys. Hom pot reduir l'existència de certes geometries finites a provar l'existència de certs dissenys de bloc . I utilitzant la teoria de dissenys de bloc és com l'Enric Nart ha resolt el problema d'organitzar l'esmentat campionat. Les solucions donades per l'Enric han sigut les úniques que hem rebut. A continuació podem llegir la seva carta.

Benvolgut amic:

Aquest problema tan bonic que ens plantejes és equivalent a preguntar-se per l'existència d'un "disseny de bloc balancejat i incomplet" amb paràmetres (28,63,9,4,1) que a més sigui "divisible en grups". La teoria dels dissenys de bloc està extensament tractada a l'excel.lent llibre de Marshall Hall Jr. "Combinatorial theory", Wiley & Sons, 1967.

Centrant-nos en el problema concret dels 28 jugadors, t'envio dues solucions (no isomorfes) obtingudes utilitzant els mètodes descrits en aquest llibre.

No em voldria despedir sense atrevir-me a suggerir que seria molt interessant que dediquèssis la secció de "problemes i jocs" d'un proper butlletí a comentar les tècniques i resultats que, dins d'aquesta apassionant branca de l'anàlisi combinatòria, s'ofereixen en l'abans esmentat llibre.

Aprofito l'ocasió per felicitar-te per l'encert amb que portes aquesta atractiva secció, sens dubte una de les més populars del butlletí. Cordialment.

Enric Nart.

Agraeixo molt els comentaris de l'Enric i passo a detallar molt per sobre les tècniques i resultats que li han permès d'obtenir les dues solucions que ens ha enviat i que podeu trobar a la pàgina següent.

1 2 3 4	1 5 9 28	1 6 21 27	1 7 16 26	1 8 15 19	1 10 17 22	1 11 20 24	1 12 13 23	1 14 18 25
5 6 7 8	2 16 17 25	2 12 19 22	2 11 15 21	2 9 18 24	2 5 13 20	2 7 23 27	2 6 14 26	2 8 10 28
9 10 11 12	3 11 14 23	3 8 16 20	3 9 19 27	3 13 22 26	3 7 12 28	3 10 15 25	3 5 18 21	3 6 17 24
13 14 15 16	4 7 18 22	4 9 13 25	4 8 17 23	4 6 11 28	4 15 24 26	4 5 14 19	4 10 20 27	4 12 16 21
17 18 19 20	6 12 15 20	5 11 17 26	5 12 24 25	5 10 16 23	6 19 23 25	6 9 16 22	7 9 15 17	5 15 22 27
21 22 23 24	8 13 24 27	7 10 14 24	6 10 13 18	7 20 21 25	8 9 14 21	8 12 18 26	8 11 22 25	7 11 13 19
25 26 27 28	10 19 21 26	15 18 23 28	14 20 22 28	12 14 17 27	11 16 18 27	13 17 21 28	16 19 24 28	9 20 23 26
dia 1	2	3	4	5	6	7	8	9

solució 1

1 2 3 4	1 5 19 24	1 6 15 27	1 7 12 16	1 8 9 26	1 10 20 25	1 11 22 28	1 13 17 21	1 14 18 23
5 6 7 8	2 6 10 26	2 12 21 28	2 15 18 22	2 7 20 23	2 16 17 24	2 8 13 27	2 5 11 14	2 9 19 25
9 10 11 12	3 11 15 20	3 10 13 18	3 5 17 26	3 16 22 25	3 8 12 14	3 6 19 23	3 9 24 28	3 7 21 27
13 14 15 16	4 14 21 25	4 8 20 24	4 10 23 28	4 12 13 19	4 5 22 27	4 9 15 17	4 7 18 26	4 6 11 16
17 18 19 20	7 9 13 22	5 9 16 23	6 13 24 25	5 10 15 21	6 9 18 21	5 12 18 25	6 12 20 22	5 13 20 28
21 22 23 24	8 16 18 28	7 11 17 25	8 11 19 21	6 14 17 28	7 15 19 28	7 10 14 24	10 16 19 27	8 10 17 22
25 26 27 28	12 17 23 27	14 19 22 26	9 14 20 27	11 18 24 27	11 13 23 26	16 20 21 26	8 15 23 25	12 15 24 26
1	2	3	4	5	6	7	8	9

solució 2

Un disseny de bloc balancejat i incomplet $D(v,b,r,k,\lambda)$ és una col.lecció de v objectes diferents i b blocs de manera que cada bloc conté exactament k objectes diferents, cada objecte està exactament a r blocs diferents i cada parell d'objectes diferents apareixen junts únicament a λ blocs.

Un disseny de bloc balancejat i incomplet és divisible en grups si els b blocs es poden dividir en grups de manera que cada grup contingui exactament els v objectes. Per tant el nostre problema quedarà resolt si trobem un disseny de bloc del tipus $D(28,63,9,4,1)$ divisible en 9 grups de 7 blocs cadascun. L'existència d'un disseny de bloc d'aquest tipus ens ve garantida pel següent teorema (pàg. 248 del llibre de M. Hall Jr.):

<u>TEOREMA</u>. Una condició necessària i suficient per a l'existència d'un disseny de bloc balancejat i incomplet $D(v,b,r,k,\lambda)$ amb $v \geq 4$, $k=4$ és que $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{3}$ i $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{12}$.

Al capítol 15 del llibre de Hall es donen diferents tècniques per a construir dissenys de bloc; concretament la solució nº 1 donada per l'Enric s'obté del teorema 15.3.6.

Per acabar remarquem que no sempre serà possible organitzar un campionat d'aquest estil encara que les dades semblin coherents a priori. Així per exemple un campionat amb 36 jugadors a base de 6 partides diàries (6 jugadors per partida) i una durada previsible de 7 dies NO es pot organitzar (no existeix cap disseny de bloc $D(36,42,7,6,1)$). Per altra banda és encara un problema obert la possibilitat d'organitzar un campionat amb 100 jugadors a base de 10 partides diàries i durada previsible de 11 dies (existència d'un disseny de bloc $D(100,110,11,10,1)$).

PROBLEMES I JOCS

El senyor Jordi Dou ens ha fet arribar el problema següent, la resolució del qual creiem que estimularà la capacitat imaginativa de més d'un de nosaltres. Totes les respostes essencialment diferents seran publicades en el proper butlletí i premiades amb un llibre de Matemàtiques a escollir.

El problema és:

Un poliedre té les arestes igual a 1. Una formiga camina per les arestes de manera que quan arriba a un vèrtex elegeix amb igual probabilitat qualsevol aresta excepte aquella per on ha arribat. El valor mitjà del camí per tornar al vèrtex de sortida és 6 per a alguns vèrtexs i 7,5 per als restants. Trobar el volum del poliedre.