

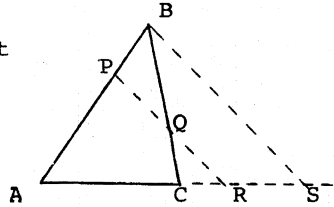
LA GEOMETRIA DEL TRIANGLE

El teorema de Menelao.

Presentem en aquesta ocasió un conegut teorema, que fa referència a una propietat purament afi del triangle.

El teorema de Menelao afirma que la condició necessària i suficient perquè tres punts P, Q, R situats un a cada costat d'un triangle ABC estiguin alineats és:

$$(ABP)(BCQ)(CAR) = 1. \quad (1)$$



Recordem que si U, V, W són tres punts alineats, (UVW) denota la raó simple d'aquests tres punts i vé definit per $\vec{UW} = (UVW)\vec{VW}$.

La demostració del teorema de Menelao és ben senzilla. Suposem que P, Q i R estan alineats. Tracem des de B la paral·lela a PQ i denotem per S el punt on talli AC. Pel teorema de Tales tenim

$$(ABP) = (ASR) \quad \text{i} \quad (BCQ) = (SCR).$$

Ara, (1) es dedueix de

$$\vec{AR} = (ASR)\vec{SR} = (ASR)(SCR)\vec{CR} = (ASR)(SCR)(CAR)\vec{AR}.$$

El recíproc és immediat. Si denotem $X = \overline{PQ} \cap \overline{AC}$, per la part del teorema de Menelao que acabem de provar tindrem

$$(ABP)(BCQ)(CAX) = 1;$$

si suposem que se satisfà (1), concluïm que $(CAX) = (CAR)$ i per tant $X=R$.