LA GEOMETRIA DEL TRIANGLE

El teorema de Ceva. Els seguidors d'aquesta secció que van llegir l'últim butlletí ja es deurien imaginar que després de parlar del teorema de Menelao dedicariem la següent secció de "La Geometria del triangle" al teorema de Ceva. En efecte, aquests dos teoremes acostumen a aparèixer plegats en els llibres, ja que les figures que descriuen són duals l'una de l'altra. A més d'aquesta circumstància, té sentit que parlem del teorema de Ceva tot seguit del de Menelao ja que les dues demostracions que donarem es basen en aquest.

El teorema de Ceva afirma que la condició necessària i suficient perquè tres rectes que passin cadascuna per un vèrtex d'un triangle ABC siguin concurrents és:

$$(ABP)(BCQ)(CAR) = -1, \qquad (1)$$

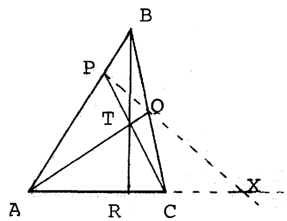

figura 1

essent P, Q i R les interseccions respectives de les rectes amb el costat oposat al vèrtex pel qual passen.

Provem primer que (1) és necessari perquè les tres rectes siguin concurrents:

Sigui $X = \overline{PQ} \cap \overline{AC}$. Si coneixem les propietats elementals de les quaternes harmòniques la demostració és immediata; pel teorema de Menelao, $(ABP)(BCQ)(CAX) = 1$ i una simple mirada a la figura 1 ens convenç de que X és el conjugat harmònic de R respecte a A i C, per tant $(CAX) = -(CAR)$.

Si no es volen utilitzar els conjugats harmònics, també es pot demostrar aplicant el teorema de Menelao als triangles ABR i RBC. S'obté:

$$(ABP)(BRT)(RAC) = 1 \quad i \quad (RBT)(BCQ)(CRA) = 1. \qquad (2)$$

És molt fàcil relacionar les raons simples de tres punts alineats diferentment ordenats. Concretament, és fàcil comprovar que:

$$(BRT) = 1/(RBT), \quad (RAC) = \frac{(CAR)}{(CAR)-1} \quad i \quad (CRA) = 1-(CAR),$$

Per tant, si multipliquem les dues equacions de (2) obtenim (1).

La suficiència és immediata ja que si denotem $T = \overline{AQ} \cap \overline{PC}$ i $Y = \overline{BT} \cap \overline{AC}$, del que acabem de provar i de (1) es desprèn que $(CAR) = (CAY)$ i per tant $R=Y$ i les tres rectes són concurrents.