

---

# Com es pot suprimir el soroll amb més soroll?

J. M. Rubí\* i J. M. G. Vilar†

## Introducció

El tractament de sistemes amb molts graus de llibertat requereix l'ús de mètodes estadístics (Huang, 1987). La mecànica clàssica o en general la mecànica quàntica, imprescindible en situacions de temperatures baixes i densitats altes, per si mateixes no són suficients per descriure els sistemes constituïts per moltes partícules. El gran nombre d'equacions diferencials que s'han de resoldre fa impossible la caracterització dinàmica individual dels graus de llibertat, de manera que la descripció s'ha de fer en termes d'una densitat de probabilitat definida en l'espai de fases. Encara que la resolució fos possible, amb l'ajut d'un ordinador molt potent, tindríem com a resultat una col·lecció de trajectòries de les partícules amb les quals ens seria molt difícil inferir els valors de les variables macroscòpiques rellevants del sistema. Es requereix la contribució de la mecànica estadística (clàssica o quàntica), la qual assigna a cada observable un valor mitjà calculat sobre un conjunt de còpies del sistema anomenat *collectivitat*. Aquests valors han de correspondre als valors deterministes que ens donen les teories deterministes com ara la mecànica i la termodinàmica. El mètode de les collectivitats introduït per Gibbs proporciona la manera de tractar un sistema en equilibri amb l'entorn (anomenat *bany*). A part dels valors mitjans, la descripció completa del sistema requereix el coneixement de les fluctuacions. La presència de les fluctuacions o soroll és, doncs, un fet inherent al tractament estadístic dels sistemes i, per tant, ens cal conèixer les seves propietats amb la finalitat de poder arribar a la seva descripció completa.

Les manifestacions macroscòpiques de la presència de fluctuacions són molt diverses. Un dels casos més típics, que va tenir un paper molt important en el desenvolupament de la teoria dels processos estocàstics (Kampen, 1981), és el del moviment brownià on una partícula clàssica o quàntica efectua un moviment aleatori com a conseqüència de la seva interacció amb el medi. N'hi

ha molts d'altres com ara l'aparició d'una fluctuació espontània de voltatge en una resistència en contacte amb un bany tèrmic, anomenada *soroll de Nyquist*, o l'aparició de certes interaccions d'abast molt curt entre sòlids, causades per l'existència de fluctuacions de la polarització, anomenades *efecte Casimir*. Les fluctuacions normalment petites en sistemes amb molts graus de llibertat poden esdevenir grans en presència de fenòmens crítics, quan s'estableixen efectes cooperatius amb correlacions d'abast molt llarg, que tenen una clara repercussió en la forma del factor d'estructura. Quan les fluctuacions són petites l'evolució dels valors deterministes de les magnituds és independent de les fluctuacions. Aquesta situació és l'oposada per grans fluctuacions on aquestes es manifesten de manera determinista renormalitzant els coeficients de transport. És el que passa en les teories de *mode-coupling* que s'han aplicat, per exemple, en turbulència i en vidres. La caracterització de les fluctuacions o soroll per la seva ubiqüitat ha estat un dels problemes centrals de la mecànica estadística.

Una de les implicacions pràctiques de la presència de soroll és que el factor d'impredecibilitat associat ens impedeix el coneixement del valor exacte de les diferents magnituds. Aquest és l'aspecte bàsic del soroll que s'havia tingut en compte fins fa poc, la qual cosa feia que la presència de soroll fos molesta quant a obtenir informació del sistema. En els sistemes no lineals fora d'equilibri aquesta característica no sempre és així. Recentment s'han descobert una sèrie de fenòmens que posen de manifest el caràcter constructiu del soroll. En el fenomen de la ressonància estocàstica (Gammaitoni *et al*, 1998), per exemple, la cooperació entre el soroll i una força periòdica externa fa que aquesta es pugui detectar amb més facilitat. Veiem, doncs, que en aquest cas el soroll pot tenir un paper constructiu amplificant senyals que, en absència de soroll, serien molt difícils de detectar; el soroll pot reforçar els senyals febles. La presència de soroll pot donar lloc a l'aparició de nous fenòmens en els sistemes no lineals fora d'equilibri. L'objectiu d'aquest article és precisament incidir en el caràcter constructiu del soroll en els sistemes fora d'equilibri. Introduïrem un cas descobert recentment en el qual el soroll es pot suprimir paradoxalment amb més soroll (Vilar *et al*, 2001).

\*J. M. Rubí (Barcelona, 1953) és doctor per la Universitat Autònoma de Barcelona (1979) i actualment és catedràtic de Física de la Matèria Condensada al Departament de Física Fonamental de la Universitat de Barcelona.

†J. M. G. Vilar (Barcelona, 1972) és doctor per la Universitat de Barcelona (1998) i actualment és investigador al Departament of Molecular Biology de la Universitat de Princeton.

## Què és el soroll?

L'aparició del soroll anomenat *tèrmic* o *intern* prové de l'eliminació en la descripció del sistema dels graus de llibertat que decauen en escales de temps curtes comparades amb les escales d'evolució de les variables rellevants (variables lentes o modes col·lectius). Aquests graus de llibertat es manifesten en forma de soroll corregint el valor de les variables lentes. Considerarem, com a exemple, el cas de l'evolució de la concentració de plàncton a l'oceà. Aquest problema, com molts altres de dinàmica de poblacions, es pot tractar mitjançant un model de depredador-presa que descriu l'evolució de les concentracions del zooplàncton (depredador) i del fitoplàncton (presa) en termes d'equacions de reacció-difusió. Com que les concentracions evolucionen interactuant amb un medi extern (l'oceà), hem de considerar la presència de soroll en la descripció afegint-hi un terme aleatori en les equacions dinàmiques que descriuen l'evolució de les concentracions de les espècies. El soroll anomenat extern té un origen diferent: prové de la incertitud creada per un agent extern, com per exemple un camp o una freqüència externa.

Així doncs, podem definir el soroll associat a una certa magnitud com un factor d'incertitud en la seva determinació. Si el valor total de la magnitud l'expressem per  $A$  podem establir la relació següent:

$$A = \langle A \rangle + \delta A, \quad (1)$$

on  $\langle A \rangle$  representa la mitjana i  $\delta A$  indica la fluctuació respecte al valor mitjà o soroll.

La naturalesa molecular de la matèria implica l'existència d'un cert grau de soroll en la mesura de qualsevol magnitud. Si imaginem, per exemple, la mesura de la densitat d'un sistema obert, que pugui intercanviar partícules amb el medi extern (anomenat en llenguatge de la física estadística *bany*) veiem que presenta fluctuacions que es manifesten com a conseqüència del fet que el nombre de partícules del sistema no és constant. De la mateixa manera, l'energia d'un sistema en contacte amb un bany tèrmic amb el qual pugui intercanviar calor també presenta fluctuacions. Podem, doncs, concloure que la presència de fluctuacions prové del fet que el sistema estigui influenciat pel seu entorn. Aquesta situació la trobem d'una manera general en els processos de mesura on el medi pot exercir una influència sobre l'aparell de mesura. La no-consideració dels graus de llibertat lligats al medi fa que aquests es manifestin en forma de soroll.

Les manifestacions del soroll són en general més importants com més petit és el sistema. Imaginem una massa suspesa d'una molla que penja del sostre. El sistema assoleix l'estat d'equilibri (estat de repòs) quan les forces gravitatòria i recuperadora s'igualen. Si fem la massa més i més petita la influència del bany tèrmic

es fa cada vegada més palesa fins al punt que la posició de la massa presenta fluctuacions al voltant de la posició d'equilibri (suposarem que el moviment només és possible en una dimensió). La influència que el medi extern exerceix sobre la massa depèn del valor relatiu entre l'energia del sistema i  $K_B T$ , on  $K_B$  és la constant de Boltzmann i  $T$  la temperatura del bany. Einstein va establir una fórmula per avaluar la probabilitat que tingui lloc una fluctuació  $\delta A$ ,  $P = P_0 \exp(-E(\delta A)/K_B T)$  on  $P_0$  és una constant de normalització i  $E$  l'energia del sistema. Aquesta fórmula reflecteix el que havíem dit abans: com més gran sigui el sistema més gran ha de ser la seva energia i més petita ha de ser, doncs, la probabilitat descrita per la fórmula d'Einstein.

Com a conseqüència d'aquesta propietat conclouíem que les fluctuacions es manifestaran d'una manera important en el règim mesoscòpic. Aquest règim, definit com el règim inetermedi entre el microscòpic i el macroscòpic, inclou escales de longitud més grans que les microscòpiques (de l'ordre del radi d'un àtom,  $10^{-8}$  cm) però més petites que les macroscòpiques, més grans que un micró ( $10^{-4}$  cm).

Per als sistemes mesoscòpics el soroll és un ingredient bàsic i ineludible que té un paper molt important en la seva caracterització. El món mesoscòpic inclou una gran varietat de sistemes de naturalesa molt diferent. Podem esmentar sistemes biològics com ara les cèl·lules, les neurones i els microorganismes, que intervenen en les diferents funcions dels éssers vius; sistemes que pertanyen a l'anomenada *soft condensed matter* com ara polímers, suspensions i col·loïdes, amb nombroses aplicacions tecnològiques; sistemes quàntics mesoscòpics com ara els punts quàntics, els pous quàntics i les barreres túnel, que tenen un paper molt important en les nanotecnologies.

En els sistemes quàntics a part de la font d'incertitud relacionada amb el fet que el sistema estigui en contacte amb el medi, hem de considerar també la incertitud lligada a la naturalesa quàntica del sistema descrita pel principi d'incertesa de Heisenberg. És interessant veure que el principi de Heisenberg es pot interpretar també com a soroll. Si considerem que les variables posició  $x$  i moment  $p$  són correlacionades amb una matriu de covariança  $\sigma_{xp}$ , podem establir la desigualtat

$$\Delta x \Delta p \geq \left( \frac{1}{4} \hbar^2 + \sigma_{xp}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

on  $\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \sigma_x$  i una expressió anàloga per a  $\Delta p$ . Veiem, doncs, que en el límit clàssic, quan  $\hbar \ll 1$ , la desigualtat anterior esdevé  $\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \sigma_{xp}^2$ , la qual és vàlida per a qualsevol parella de variables aleatòries correlacionades. En absència de correlació, quan  $\sigma_{xp} = 0$ , l'equació anterior expressa el principi de Heisenberg.

## El paper «constructiu» del soroll

El soroll ha estat tradicionalment considerat com una font de molèsties, una cosa que s'ha d'eliminar per aconseguir que les diferents magnituds puguin ser mesurades amb més precisió. Casos típics en què aquesta necessitat es fa palesa són el d'un dispositiu electrònic, on la presència de soroll dificulta la mesura del corrent elèctric o el d'un aparell de ràdio on el soroll, de fons, distorsiona l'audició. El llenguatge i, fins i tot, certs aspectes socials es fan ressò d'aquesta peculiaritat atribuint sovint al vocable *soroll* una connotació negativa. Aquests exemples, entre molts d'altres, justifiquen la importància d'implementar mecanismes capaços de suprimir o, com a mínim, reduir el soroll present en els sistemes.

Tenint en compte les característiques del soroll expressades abans, es podria pensar a reduir el soroll disminuint la temperatura del sistema. D'aquesta manera aconseguiríem només eliminar un tipus de soroll, és a dir, el soroll intern que sorgeix com a conseqüència que el sistema estigui en contacte amb el bany. Hi ha, però, altres tipus de soroll no relacionats amb el caos molecular, com per exemple el soroll *shot* que prové de la naturalesa discreta de la càrrega, és a dir, els electrons, quan s'injecten a través dels contorns en els dispositius electrònics mesoscòpics com per exemple en nanoestructures semiconductor.

Aquesta imatge clàssica sobre la naturalesa del soroll no té actualment una vigència exclusiva. D'un temps ençà s'han descobert casos pels quals el soroll té un paper constructiu en el sentit que la seva participació en la dinàmica dels sistemes ens permet aconseguir informació que no seria possible de cap altra manera.

Un dels casos més significatius on aquesta peculiaritat es manifesta és el del fenomen de la ressonància estocàstica. Suposem un sistema no lineal descrit per un potencial biestable els pous del qual representen diferents estats. El sistema està en contacte amb un bany tèrmic que proporciona una font de soroll intrínsec. Quan la barrera d'energia no és gaire gran comparada amb  $K_B T$  la presència de soroll fa que l'estat del sistema pugui saltar d'un pou a l'altre d'una manera aleatòria. Si apliquem una força periòdica al sistema, és a dir, modulem periòdicament el potencial biestable, la fondària dels pous varia també periòdicament (vegeu la figura 1). Aquest moviment fa que els salts també siguin periòdics en lloc d'espontanis. La força externa coopera, doncs, amb el soroll imposant la seva periodicitat: l'estat del sistema canvia periòdicament en sintonia amb la força. La periodicitat dels salts es manifesta amb la presència d'un pic en la densitat espectral que es fa màxim per a un valor òptim del soroll. Per a valors molt més petits que aquest valor òptim la cooperació no es fa palesa mentre que quan el soroll és molt gran destrueix la coherència i el pic desapareix.

El fenomen de la ressonància estocàstica va ser des-

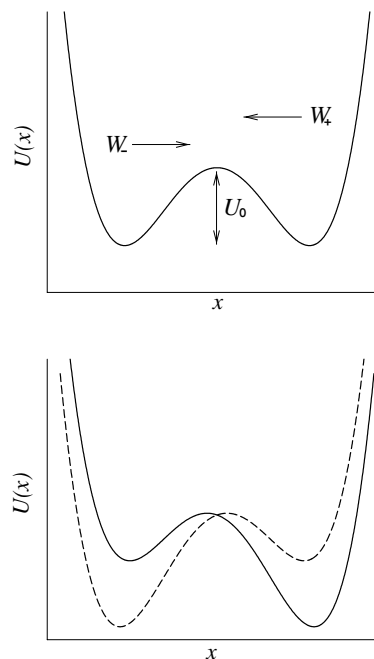


Figura 1: *Potencial biestable*

cobert per primer cop en tractar d'explicar els períodes de glaciació a la Terra. Es va suposar que l'estat tèrmic de la superfície de la Terra, en contacte amb un bany tèrmic, pot descriure's mitjançant un potencial biestable on els dos pous corresponen a períodes de glaciació i d'absència de glaciació; la força periòdica prové de la variació periòdica de l'eix de rotació de la Terra, la qual cosa implica variacions periòdiques de l'escalfament de la superfície. Com a conseqüència de la cooperació entre el soroll i la força externa la superfície de la Terra pot passar d'un estat de glaciació a un altre de no-glaciació. Mitjançant la teoria dels processos estocàstics es pot calcular el període de transició que correspon a una bona estimació del període real.

El mecanisme descrit mitjançant aquest model es va trobar posteriorment en sistemes de naturalesa molt diferents com ara els làsers, certs dispositius electrònics o organismes vius. També es va comprovar que el fenomen, lluny de ser exclusiu dels potencials biestables, podia aparèixer també quan el potencial és monoestable (Vilar *et al*, 1996) (amb un sol pou); en sistemes amb un llindar com ara les neurones (Vilar *et al*, 1999), i fins i tot, per a sistemes no dinàmics, descrits per una relació *input-output* i no per equacions dinàmiques (vegeu l'aparició de ressonància estocàstica en la figura 2). Aquests resultats reforcen encara més la universalitat d'aquest efecte cooperatiu i constitueixen un clar exemple del paper constructiu que pot tenir la presència de soroll en els sistemes no lineals.

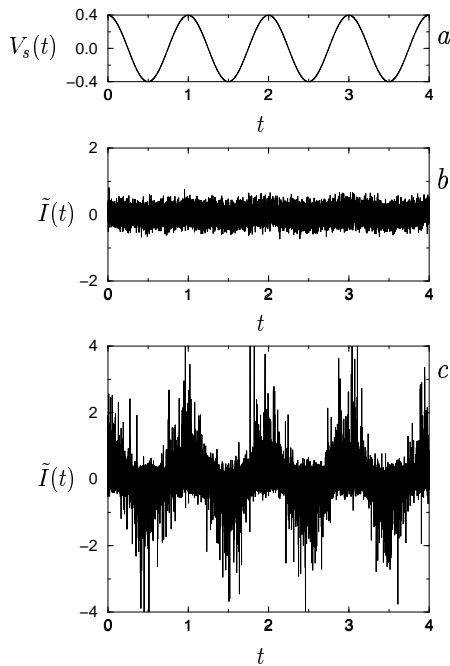


Figura 2: Ressonància estocàstica en sistemes no dinàmics

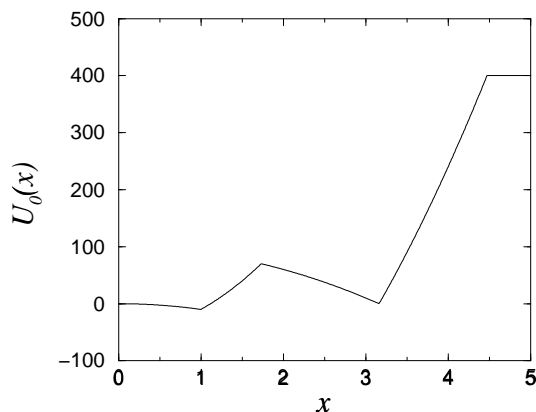


Figura 3: Representació del potencial d'un sistema no lineal

Paral·lelament a la implementació d'aquest mecanisme se'n van trobar d'altres on també es manifestà el paper constructiu del soroll. Podríem esmentar l'accés a règims sincronitzats en una població d'oscilladors en un medi sorollós, l'estabilització de l'estat d'un sistema per soroll, l'ordenació d'estructures espacials mitjançant soroll, etc. Aquests fenòmens es poden titllar de sorpreses dels sistemes no lineals pels quals l'estat del sistema quan el pertorbem progressivament pot assolir manifestacions macroscòpiques de naturalesa molt diferent. En la figura 3 podem veure la representació del potencial d'un sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = F(x; \lambda) + \xi, \quad (3)$$

on  $F$  és una funció no lineal de la variable dinàmica  $x$  i  $\lambda$  és un paràmetre. La variable  $\xi(t)$  representa el soroll. En la figura podem veure que el potencial presenta una gran varietat de mínims locals cadascun dels quals correspon a un estat del sistema. En absència de soroll, un cop que el sistema arriba a un mínim hi roman. Mitjançant el soroll es pot accedir a estats intrínsecament diferents, amb manifestacions macroscòpiques diferents. És per aquest motiu que el soroll pot ser un ingredient fonamental en l'estudi de les manifestacions macroscòpiques dels sistemes.

### Supressió de soroll amb soroll

Una de les sorpreses que ens poden donar els sistemes no lineals és la possibilitat de poder suprimir el soroll intrínsec del sistema mitjançant l'addició d'un altre soroll. Aquest fenomen antiintuïtiu, denotat per les sigles NSN de l'anglès *noise suppression by noise*, ha estat predit recentment en la considerable classe dels sistemes no dinàmics i ens proporciona un nou exemple on el soroll té un paper constructiu.

Passarem, tot seguit, a descriure'l. Considerem un sistema no dinàmic, és a dir, un sistema que no té associada cap equació dinàmica i ha de ser descrit per una relació *input-output*. En són exemples aquells sistemes que es relaxen molt ràpidament cap a un estat estacionari, de manera que per a la seva caracterització només ens cal conèixer la relació *input-output*

$$I(t, V) = H(V) + \xi(t, V), \quad (4)$$

vàlida a l'estat estacionari, on  $V$  és un paràmetre o conjunt de paràmetres que representa l'*input* i  $I$  és l'*output* resultat de les contribucions del valor mitjà  $H(V)$  i del soroll intrínsec  $\xi$ . Aquesta relació podria representar, per exemple, la conducció del corrent en un circuit elèctric. Si considerem que  $V$  és el potencial elèctric i  $I$  la intensitat del corrent, l'expressió anterior esdevé la llei d'Ohm si  $H(V) = V/R$ , on  $R$  és la resistència. El terme de soroll és en aquest cas conseqüència del fet que el circuit està implícitament immers en un bany tèrmic a temperatura constant. Suposarem que el soroll és gaussià i blanc amb mitjana zero i correlació

$$\langle \xi(t, V) \xi(t + \tau, V) \rangle = G(V) \delta(\tau), \quad (5)$$

on  $G(V)$  representa la intensitat del soroll que dependrà en general de l'*input*.

Considerarem ara que el sistema està sotmès a l'acció d'una font de soroll extern que fa que l'*input* sigui una magnitud fluctuant:

$$V(t) = V_0 + \eta(t), \quad (6)$$

on el soroll extern té mitjana zero i correlació

$$\langle \eta(t) \eta(t + \tau) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_F}\right), \quad (7)$$

on  $\sigma^2$  és la intensitat del soroll i  $\tau_F$  el temps de correlació. El punt clau és que la presència de soroll extern canvia les característiques del sistema, de manera que la nova relació *input-output* un cop afegit el soroll extern és donada per

$$I(t, V_0) = H_0(V_0) + \xi_0(t, V_0), \quad (8)$$

on  $H_0$  és el nou valor mitjà i  $\xi_0$  el soroll total del sistema. La correlació d'aquest és similar a la del soroll intrínsec amb intensitat  $G_0(V_0)$ . Aquesta magnitud pot, doncs, interpretar-se com el soroll *output* del sistema. A la referència (Vilar *et al*, 2001) es va demostrar que les intensitats de soroll intrínsec i *output* es relacionen mitjançant l'expressió

$$G_0 = G + (2\tau_F H'^2 + \frac{1}{2}G'')\sigma^2. \quad (9)$$

D'aquesta relació és clar que el valor relatiu d'ambdues quantitats depèn del signe que pugui tenir  $G''$  i que ens ve donat per les característiques del soroll intrínsec. Quan aquesta magnitud és negativa i  $\tau_F$  és suficientment petit la intensitat del soroll *output* és més petita que la del soroll intrínsec. És en aquestes condicions quan podem observar supressió del soroll. Podem veure també d'aquesta expressió que el factor de supressió depèn del temps de correlació i de la intensitat del soroll que afegim.

La pregunta que ens fem ara és en quin tipus de sistemes podria observar-se el fenomen de l'NSN? En podríem trobar un primer exemple en els canals iònics. Aquests canals presents a les membranes poden obrir-se i tancar-se aleatòriament per regular el flux dels ions a través de les membranes. Les característiques de la intensitat de corrent vénen donades per (DeFelice, 1981)

$$H(V) = \frac{V}{1 + \exp(\Delta(W - V))}, \quad (10)$$

$$G(V) = \frac{V^2 \exp(\Delta(W - V))}{(1 + \exp(\Delta(W - V)))^2}, \quad (11)$$

on  $W$  i  $\Delta$  són constants que depenen del tipus de canal. Veiem que si el paràmetre  $\Delta$  és molt gran, per a  $V < W$ ,  $H \ll 1$  i el canal no condueix el corrent. Contràriament, quan  $V > W$ ,  $H(V) \approx V$ , aleshores el sistema és pràcticament òhmic. En aquest sistema podem comprovar que  $G'' < 0$ ; llavors se satisfà la condició suficient per poder observar NSN. En la figura 4 podem veure representada  $G_0$  en funció de la mitjana de l'*input* i comprovar que el soroll extern pot reduir el soroll *output* del sistema.

Com a segon exemple podríem esmentar el cas d'un conductor mesoscòpic. En aquest cas les característiques del sistema són (Van der Ziel, 1986):

$$H(V) = \frac{V}{R(1 + V^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (12)$$

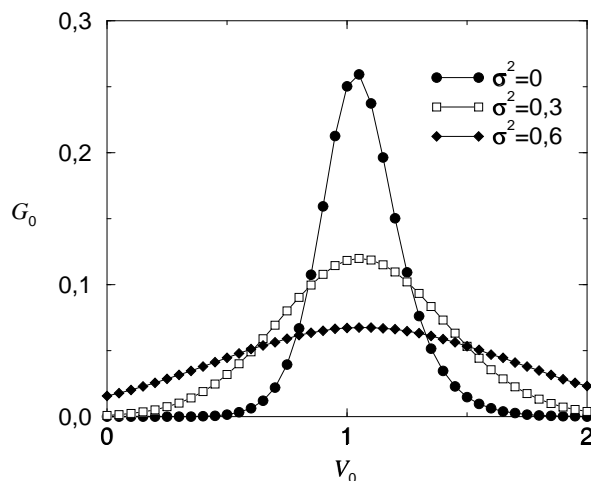


Figura 4: Soroll output del model de canal iònic en funció de la mitjana de l'*input*

$$G(V) = \frac{Q}{(1 + V^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (13)$$

on  $R$  és la resistència i  $Q$  una constant. Podem comprovar que per a voltatge petit  $H(V) \approx V/R$ , aleshores el conductor esdevé òhmic. En aquest cas la relació (9), vàlida fins a l'ordre  $\sigma^2$ , és donada per

$$G(V_0) = G_0(V_0) + \frac{4\tau_F - QR^2(1 - 2V_0^2)(1 + V_0^2)^{\frac{1}{2}}}{2R^2(1 + V_0^2)^3}\sigma^2. \quad (14)$$

Concloem, doncs, que per a temps de correlació petits i per a valors petits del voltatge mitjà  $V_0$  el soroll *output* pot decreixer quan afegim soroll al sistema.

## Conclusions

Una gran varietat de sistemes amb interès pràctic poden considerar-se com a sistemes oberts: estan influenciats pel seu entorn amb el qual poden intercanviar, per exemple, massa o diferents tipus d'energia. L'estat del sistema depèn, doncs, de la seva relació amb el medi, la influència del qual es manifesta a través de soroll. De fet, per mantenir un sistema fora d'equilibri li hem de subministrar contínuament energia a través dels seus contorns, aleshores tots els sistemes fora d'equilibri són implícitament oberts i comparteixen, doncs, aquesta característica. El soroll és el resultat de l'acció del medi sobre el sistema i respon a l'eliminació de les variables menys rellevants en la descripció d'aquest sistema. La mecànica estadística ens ofereix diferents teories per explicar la influència del soroll intrínsec o extern. Per a sistemes en equilibri la teoria d'Einstein ens proporciona la probabilitat que tingui lloc una fluctuació amb la qual podem calcular els moments i explicar fenòmens com ara l'opalescència crítica. Fora d'equilibri la teoria

de Langevin ens descriu l'evolució d'un grau de llibertat, és a dir, la velocitat d'una partícula browniana o la càrrega d'un condensador en contacte amb un bany tèrmic, a través d'una equació diferencial estocàstica. El formalisme de Fokker-Planck, íntimament lligat al de Langevin, ens proporciona equacions cinètiques per descriure processos de transport o activats a través de la densitat de probabilitat corresponent.

La importància que tenen les fluctuacions en la caracterització d'un sistema depèn de la relació entre la seva energia i l'energia tèrmica  $K_B T$  i de la intensitat de les fonts externes de soroll. És per això que els sistemes mesoscòpics –aquells suficientment grans per poder contenir moltes molècules, però prou petits perquè la seva energia sigui comparable a la tèrmica– són candidats molt bons a estar influenciats per la presència de fluctuacions. El món mesoscòpic s'estén per àmbits molt diversos, des dels conductors molt petits, amb pocs canals de transmissió dels electrons (fins i tot un), fins

als sistemes biològics els quals constitueixen un laboratori de física mesoscòpica de primera magnitud i un escenari de recerca on s'esperen aconseguir resultats importants de la col·laboració entre la física i la biologia.

Encara no hem arribat a dilucidar totalment el paper que pot tenir la presència de soroll en els sistemes lluny d'equilibri. Recentment s'estan trobant en els sistemes no lineals fora d'equilibri fenòmens antiintuïtius que trenquen amb el concepte de soroll que tenim com a factor només d'incertitud que emmascara el coneixement de la resposta del sistema. El fenomen de l'NSN que hem presentat en aquest article presenta també aquestes característiques: el soroll pot ser beneficiós, ja que pot suprimir el soroll intrínsec d'un sistema. Podem sospitar que aquests són només resultats parcials d'una teoria general dels sistemes no lineals en presència de soroll. Esperem que totes aquestes troballes puguin contribuir a establir d'una manera universal el paper que té el soroll en els sistemes fora d'equilibri.

## Bibliografia

- HUANG, K., *Statistical Mechanics*, Wiley, (New York, 1987).  
KAMPEN, N. G., *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, (Amsterdam, 1981).  
GAMMAITONI, L., HÄNGGI, P., JUNG, P. i MARCHESONI F., *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223 (1998).  
VILAR, J. M. G. i RUBÍ, J. M., *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 950 (2001).  
VILAR, J. M. G. i RUBÍ, J. M., *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 2863 (1996).  
VILAR, J. M. G., SOLÉ, R. V. i RUBÍ, J. M., *Phys. Rev. E*, **59**, 5920 (1999).  
DEFELICE, L. J., *Introduction to Membrane Noise*, Plenum Press, (New York, 1981).  
VAN DER ZIEL, A., *Noise in Solid State Devices and Circuits*, Wiley, (New York, 1986).