BIOGRAFIA

Kurt Gödel

Del lògic i matemàtic Kurt Gödel s'ha dit que "la seva categoria científica sobrepassa la d'Euclides, la seva qualitat intel.lectual és superior a la d'Aristòtil, les seves aportacions són comparables amb les que Kant féu en la seva "Crítica de la Raó Pura"" i amb aquestes paraules es vol dir que Kurt Gödel és, sens dubte ni vacil.lació, un geni del nostre segle.

Però creiem que el millor homenatge que li podem fer consisteix en donar-ne una aproximació - prou limitada i prou exacta - que desperti la nostra curiositat a la seva obra i, sobretot, a les possibilitats que aquesta ofereix vers el futur.

Sabem que Kurt Gödel no era ni alt ni baix, que tenia un perfil angulós i el cabell llis i estriat de blanc; que era difícil de parlar amb ell, puix era esquerp i solitari i mai no prenia part en les converses, però si hom li preguntava quelcom responia; que va néixer a Brno l'any 1906 i que es doctorà a la Universitat de Viena l'any 1930 i que va romandre en ella fins l'any 1938 en que es traslladà als Estats Units i es convertí en membre de l'"Institute for Advanced Study" de Princeton, on esdeví col.lega d'Einstein, de von Neumann, de Bohr, de Pauli, de Oppenheimer, etc. Sabem que l'any 1951 rep el premi Einstein, que l'any 1953 és nomenat "professor" de matemàtica del citat "Institute"; que mai no intervé en política; que l'any 1931 el seu teorema esclatà com una bomba, obligant a von Neumann a interrompre el seu curs de lliçons i a Hilbert a renunciar al seu programa. Sabem que mor el 14 de gener de 1978.

Què sabem, però, de la seva obra? Sabem que és tan sòbria com densa i que és diversa : tracta de lògiques de 1er ordre, d'intuïcionisme, de teoria de la demostració, de relativitat, de fonaments i filosofia, de teoria de conjunts; que detaquen els teoremes "de completesa del càlcul de predicats de 1er ordre", "d'incompletesa de l'aritmètica, "sobre demostracions de consistència" i "de la consistència relativa de l'axioma de l'elecció i de la hipòtesi generalitzada del continu amb els altres axiomes".

Farem un breu comentari a aquests teoremes "clau" de Gödel El teorema de "completesa" constitueix la tesi doctoral de Kurt Gödel. Segons A. Church, "la primera formalització explícita del càlcul de predicats de 1er ordre com a sistema lògic és, potser, l'obra de Hilbert i Ackermann". Aquest formalisme no és pas complet en el sentit que cada sentència o la seva negació és demostrable, però H.i A. observen que "una qüestió oberta és saber si el sistema d'axiomes és complet en el sentit que totes les fórmules lògiques que són vàlides en cada domini d'interpretació són deduïbles dels dits axiomes" El teorema de "completesa" de Gödel dóna resposta afirmativa a la qüestió. Diu que, cada fórmula A, o és demostrable, o $\neg A$ és satisfactible en el domini N dels nombres naturals Del seu teorema s'infereix el teorema de T. Skolem (1920), que enforteix el de L. Löwenheim (1915), i que diu: "Si les fórmules d'un conjunt són satisfactibles en un domini no buit, son satisfactibles en N" i el teorema de "compacitat": "Un conjunt de fórmules és satisfactible si, i només si, cada part finita d'ell ho és (cadascuna en un domini)". Aquests teoremes obren les portes a la construcció de models "no standards" i a la "teoria de models". Gödel escriu en 1964 a van Heijenoort: "Skolem podia haver reclamat amb justícia, però no ho fa, que en el seu treball de 1922, havia demostrat implícitament: "A és demostrable o $\neg A$ és satisfactible". Malgrat tot, com que ell no formula clarament aquest resultat, sembla haver passat totalment desapercebut, com es segueix del fet que H. i A. en 1928 no en fan pas menció en relació amb el seu teorema de completesa"

L'any 1904 Hilbert estableix un "Programa" de fonamentació: la fonamentació formalista; això és un llenguatge 'ben construït' P(L) i una lògica 'ben definida' en P(L). Aleshores la qüestió fonamental és la <u>consistència</u> del sistema formal. Segons el programa de Hilbert les qüestions de consistència del sistema s'han de resoldre <u>dins</u> el propi sistema. S'espera, a més, que aquesta formalització sigui completa en el primer dels sentits abans esmentats. Gödel demostrà l'any 1931 que les ambicions del programa de Hilbert eren excessives: "tot sistema formal que contingui els axiomes de Peano i la lògica dels "Principia Mathematica" de Whitehead i Russell no és complet". Ultra això demostrà també que "la consistència d'un sistema consistent no pot pas ésser demostrada en l'àmbit del sistema".

Tres són les idees clau de la demostració de Gödel: la primera consisteix en summergir les fórmules i les demostracions del sistema en el <u>model</u> del sistema N - conjunt dels nombres naturals - usant la gödelització; la segona consisteix en demostrar que tota relació n-ària de N recursiva primitiva - concepte en el que havien treballat Dedekind (1888), Skolem (1923), Hilbert (1925 i 27) i Ackermann (1928) - és definible en el sistema: així, si R és una relació n-ària en N recursiva primitiva, existeix una fórmula $A(v_1, \ldots, v_n)$, amb n variables lliures $v_1, \ldots, v_n$, tal que

$R = \{(m_1, \ldots, m_n) : A(\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$ és demostrable en el sistema$\}$,

on $\bar{m}$ és el nom de m en el sistema formal; la tercera idea consisteix en el següent: si $P_v(L)$ és la classe de fórmules de P(L) que tenen lliure solament la variable v i, si $A \in P_v(L)$, i el número de Gödel de A, $ng(A) = n$, escribim $A = A_n(v)$, i $(n,m) \in S$ si, i només si, $n = ng(A_n(v))$ i $m = ng($una demostració de $A_n(v))$, aleshores S és una relació recursiva primitiva Amb elles, Gödel dedueix l'existència d'una fórmula $B(v,w)$ que defineix S i pot considerar la fórmula $\forall w \neg B(v,w)$ que pertany a $P_v(L)$ i té ng igual a m; dón $\forall w \neg B(v,w) = A_m(v)$. Finalment considera la fórmula $A_m(\bar{m}) = \forall w \neg B(\bar{m},w)$. (Si hom interpreta,en $N,A_m(\bar{m})$ llegirà 'Sóc indemostrable en el sistema'.) Finalment Gödel demostra que, si el sistema és consistent, $A_m(\bar{m})$ és <u>indecidible</u>, això és : ni $A_m(\bar{m})$, ni $\neg A_m(\bar{m})$ són demostrables Aquest resultat constitueix el primer teorema d'incompletesa de Gödel El segon diu que, si"el sistema és consistent" es pot formalitzar en el sistema i B és la fórmula que ho formalitza, aleshores la fórmula '$B \longrightarrow A_m(\bar{m})$' és demostrable en el sistema i, en conseqüència, $A_m(\bar{m})$ també ho fóra i sabem que és indecidible Aquest dos teoremes d'incompletesa clouen les esperances de Hilbert

El darrer treball de Gödel que comentarem és el de la consistència relativa de A.E. i de H.G.C. Gödel construeix un tipus de conjunts, anomenats <u>constructibles</u>, que estan ben ordenats i, per tant, a més de verificar els axiomes de la teoria de conjunts verifiquen A.E. Veu que verifiquen també H.G.C Per tant, si en la teoria de conjunts amb A.E. i H.G.C. s'obté contradicció, aquesta s'obtindria també en la teoria de conjunts. A més Gödel conjecturà que tant l'A.E. com la H.G.C eren indecidibles a partir dels axiomes de la teoria de conjunts Aquest resultat l'establiria definitivament Cohen en 1963-64

La tasca de Gödel no acaba pas aquí com podem veure en la seva bibliografia, però creiem que aquesta mostra del seu enginy és suficient per retre-li l'homenatge que Jonh von Neumann li va retre el 14 de Març de 1951 en ocasió de la concessió a Kurt Gödel d'una medalla Einstein : "L'aportació de Kurt Gödel a la lògica moderna és singular i monumental - realment és més que un monument, és una fita que restarà visible en l'espai i en el temps".

Bibliografia

(1930) Die Völlständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Mon für Math. und Ph,vol.37,pp.349-360.

(1931) Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme,I, Ibid.,vol.38,pp.173-198.

(1931-2)Uber Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit. Erg. eines math. Koll.,heft 3, pp.12-13.

(1932) Zum intuitionistichen Aussagenkakül. Ak. der Wiss. in Wien, Math-natur. Klasse, Anzeiger,vol.69,pp.65-66.

(1932-3)Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentherie. Erg. eines math. Koll.,heft 4, pp.34-38.

(1934) On undecidable propositions of formal mathematical systems. Notes by Kleene and Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton,N.J.,30pp.

(1934a) Review of Skolem(1933), Zent. für Math. und ihre Grenz., vol.7,pp.193-194.

(1936) Uber die Länge von Beweiswn, Erg. eines math. Koll., Heft 7,pp.23-24.

(1938) The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypotesis, Proc. of the Nat. Ac. of Sc., vol.24,pp. 556-557.

(1939) Consistency-proof for the generalized continuum-hypotesis, Ibid., vol. 25, pp. 220-224.

(1940) The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypotesis with the axioms of set theory. Notes by G.W.Brown on lectures at the Inst. for Adv. St., Princeton,N.J.,66pp.

(1947) What is Cantor's continuum problem? Am. Math. Mont., vol. 54, pp. 515-525.

(1958) Uber eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica,vol.12,nº47-48,pp.280-287.

Hom pot trobar una bibliografia més àmplia i detallada de l'obra de Kurt Gödel a la "Gaceta Matemática", revista publicada por el Inst. "Jorge Juan" de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española. 1ª Serie, tomo XXX, vol. 3 y 4, Madrid 1978.

Josep Pla