## PROBLEMES I JOCS

### LA SIMETRIA

Partint de la noció una mica imprecisa de simetria, com és l'harmonia de proporcions, s'arriba gradualment al concepte geomètric de simetria en les formes bilaterals, translacionals, rotacionals, ornamentals, cristal.lògràfiques, etc., i, finalment, a la idea general present en totes aquestes formes especials: La simetria d'una figura o un cos es caracteritza pel grup de moviments que transforma la figura en sí mateixa.

Els grups de simetria més estudiats són els de les figures planes i espacials. Les figures planes finites tenen 6 grups de simetries:

1. El grup $S_1$ que consta només de la identitat. Aquest és el grup de simetria de qualsevol figura asimètrica.
2. El grup $S_2$ que consta de la identitat i d'una simetria respecte a un únic eix.
3. El grup $S_3$ format per les rotacions d'angle 0, $2\pi/n$, $2(2\pi/n),\ldots,(n-1)(2\pi/n)$, on n és un enter positiu arbitrari.
4. El grup $S_4$ format per n simetries respecte a eixos que passen per un mateix punt i divideixen el pla en 2n parts iguals, i per les rotacions que tenen angle múltiple de $2\pi/n$.
5. El grup $S_5$ que consta de totes les rotacions de centre un mateix punt, això és, la circumferència $S^1$.
6. El grup $S_6$ format per totes les rotacions de centre un mateix punt O i per totes les simetries respecte a eixos que passen per O.

Els quatre primers grups són discrets i els dos últims continus.

Les figures planes infinites tenen 30 grups de sime-

tria. Dos d'aquests grups són continus: $S_5$ i $S_6$. Els altres són discrets i es poden dividir en tres tipus:

A) Els grups de simetria que deixen un punt invariant. Són els grups $S_1, S_2, S_3$ i $S_4$.

B) Els grups de simetria que no tenen punts fixos però que deixen invariant una recta. Aquesta recta s'anomena l'eix del grup. Aquests grups de simetria apareixen en els ornaments en forma de banda infinita (sanefes). En total existeixen 7 grups d'aquest tipus:

B1. El grup $L_1$ de les translacions de mòdul a.

B2. El grup $L_2$ que s'obté de $L_1$ afegint una rotació d'angle $\pi$ i centre un punt qualsevol de l'eix del grup.

B3. El grup $L_3$ que s'obté de $L_2$ afegint una simetria respecte a una recta perpendicular a l'eix del grup.

B4. El grup $L_4$ que s'obté de $L_1$ afegint la simetria respecte a l'eix del grup.

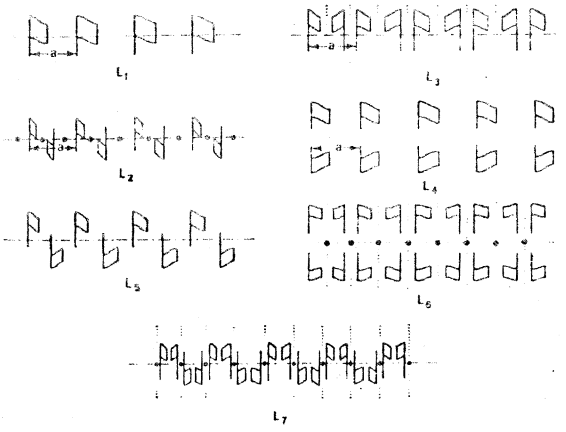
B5. El grup $L_5$ que s'obté de $L_1$ afegint una translació de mòdul a/2, combinada amb una simetria respecte a l'eix del grup.

B6. El grup $L_6$ que s'obté afegint al grup $L_4$ una simetria respecte a un eix perpendicular a l'eix del grup.

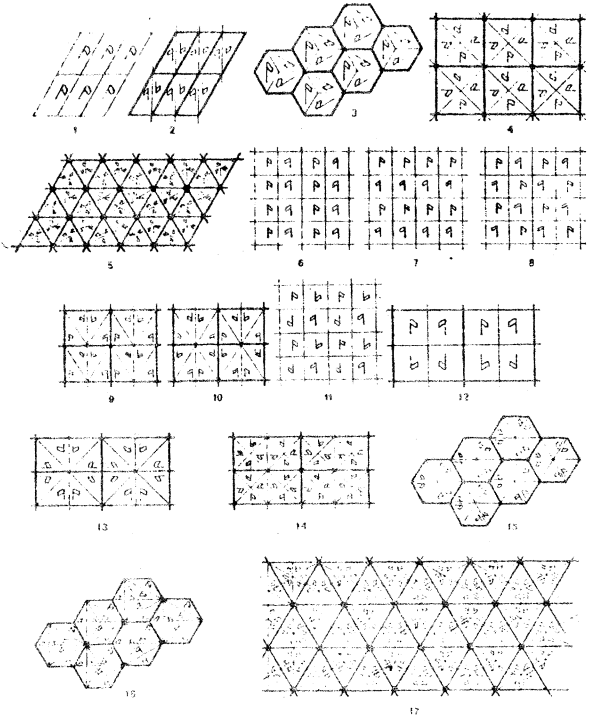
B7. El grup $L_7$ que s'obté afegint a $L_5$ una simetria respecte a un eix perpendicular a l'eix del grup.

La taula 1 dóna exemples de sanefes corresponents a cada un dels grups $L_i$, $i = 1,\ldots,7$.

C) Els grups de simetria que no deixen fix cap punt ni cap recta. Aquests grups són els grups de simetria d'ornaments plans infinits. En total n'hi ha 17: 5 consten només de moviments propis i els 12 restants de moviments propis i impropis. Els grups d'aquest tipus es diuen els grups plans de Fedorov. A la taula 2 donem exemples d'ornaments corresponents a cada un dels 17 grups de Fedorov.




Taula 1



Taula 2

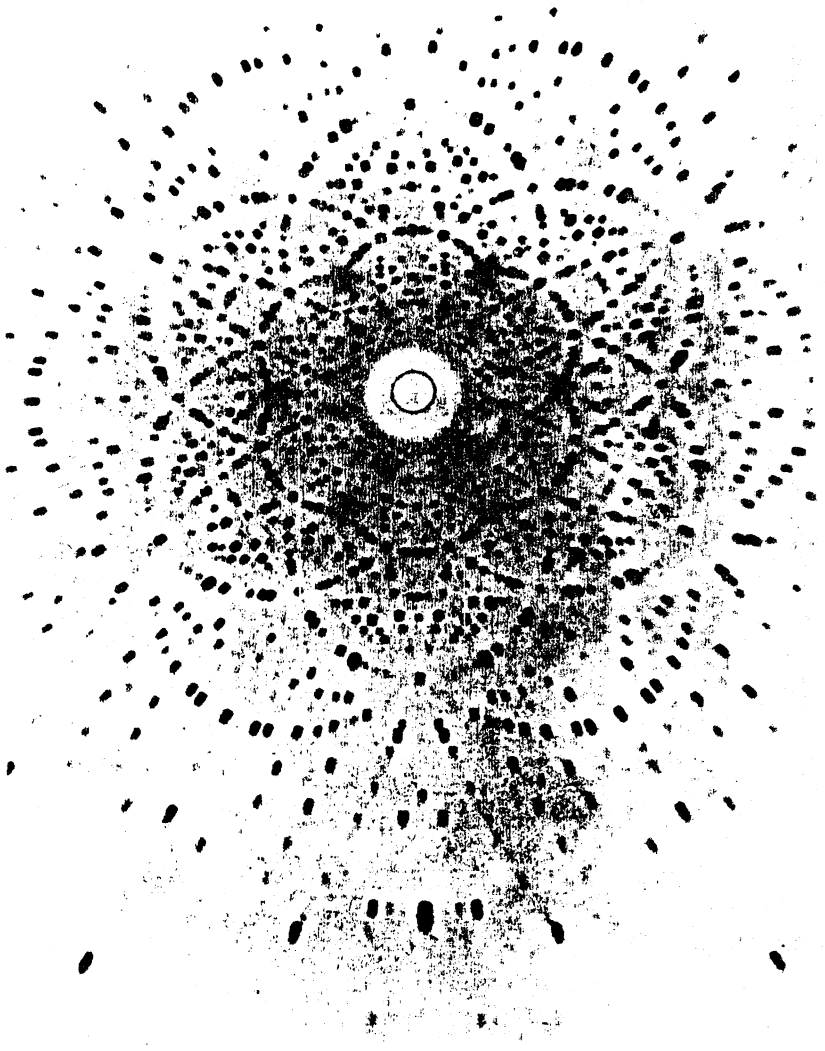


Fig. 3. Difracció d'un cristall de Beril.li als raigs X

Hom pot observar que els mestres en l'art de l'ornamentació han descobert en la pràctica ornaments amb tots els possibles grups plans de simetria; la teoria de grups ha demostrat que no hi ha més formes possibles.

Un cristall té la peculiaritat de que els seus àtoms formen un sistema regular a l'espai (veure fig. 3). Un sistema de punts a l'espai es diu regular si:

a) tot punt del sistema es pot transporta a qualsevol altre punt del sistema mitjançant moviments que transformen el sistema en sí mateix,

b) cap esfera de radi finit conté infinits punts del sistema,

c) existeix un número positiu r tal que tota esfera de radi r conté com a mínim un punt del sistema.

El problema d'estudiar l'estructura dels cristalls està íntimament lligat a la classificació dels sistemes espacials regulars de punts, que està relacionat amb la classificació dels grups discrets de moviments a l'espai o grups cristal.logràfics o de Fedorov. Hi ha 230 grups cristal.logràfics: 65 corresponen només a moviments propis i els 165 restants a moviments propis i impropis.

En contraposició amb el cas pla, només la teoria de grups ha permès analitzar aquest nombre excepcionalment gran de possibilitats.

Malgrat que es coneixen molts grups de simetria per a figures finites o no en espais de dimensió més gran o igual que 4, sembla ésser que encara no es té una classificació com en el cas pla o espacial.

Jaume Llibre