LA GEOMETRIA DEL TRIANGLE

El triangle és una figura geomètrica rica en propietats mètriques que abans s'estudiaven en el batxillerat, però que, ara, molts llicenciats recents ignoren. Ens proposem, en aquest butlletí i els successius, exposar-ne unes quantes, extretes del llibre "Introduction to Geometry" de H.S.M. Coxeter (John Wiley & Sons, 1961).

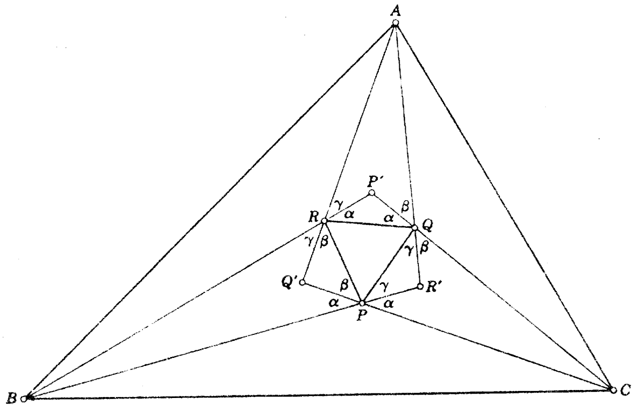
El teorema de Morley

> Moltes de les demostracions matemàtiques són molt llargues i complicades. Altres, sense ésser llargues, han estat construïdes amb gran ingeni.
>
> E.C. Titchmarsh (1899-1963)

Un dels teoremes més sorprenents de la geometria elemental fou descobert l'any 1899 per F. Morley (el fill del qual, Christopher, ha escrit novel.les com "Thunder on the Left"). El va explicar als seus amics que l'estengueren pel mon com un acudit matemàtic. Finalment, després de 10 anys, es van publicar dues demostracions, una trigonomètrica de M. Satyanarayana i una altra d'elemental de M.T. Naraniengar.

Teorema de Morley. Els tres punts d'intersecció de les trisectrius adjacents dels angles d'un triangle qualsevol formen un triangle equilàter.

En altres paraules, de qualsevol triangle ABC s'obté un triangle equilàter PQR al trisectar els angles A,B,C mitjançant AQ i AR, BR i BP, CP i CQ, com indica la figura següent.



(Trobarem grans dificultats si intentem prendre el punt de vista directe, però desapareixen si treballen endarrera, és a dir, si comencem pel triangle equilàter i construim un triangle general que identificarem posteriorment amb el triangle donat ABC.)

Damunt els costats corresponents QR,RP,PQ d'un triangle equilàter donat construim triangles isòsceles P'QR,Q'RP,R'PQ en els que els angles de la base, α , β , γ , compleixin les equacions i desigualtats següents:

$$\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ, \quad \alpha < 60^\circ, \quad \beta < 60^\circ, \quad \gamma < 60^\circ.$$

A continuació perllonguem cada costat dels triangles isòsceles per sota de llurs bases fins que es tornin a tallar en els punts A,B,C. Com que $\alpha + \beta + \gamma + 60^\circ = 180^\circ$, podem deduir immediatament les magnituds dels altres angles, com hem indicat a la figura. Per exemple, el triangle AQR ha de tenir un angle de $60^\circ - \alpha$ en el vèrtex A, ja que els seus angles a Q i R són $\alpha + \beta$ i $\gamma + \alpha$.

Ara bé, una de les maneres de caracteritzar l'incentre I d'un triangle ABC consisteix en descriure'l en relació amb la bisectriu de l'angle A, damunt la qual està situat a una distància tal que

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2} A \ .$$

A l'aplicar aquest principi al punt P del triangle P'BC, observem que la recta PP' (que és la mediana del triangle equilàter PQR i del triangle isòsceles P'QR) divideix l'angle a P' en dues parts iguals. Ara bé, la meitat de l'angle que hi ha a P' és de $90^\circ - \alpha$, i

$$\widehat{BPC} = 180^\circ - \alpha = 90^\circ + (90^\circ - \alpha) \ .$$

Per tant, P és l'incentre del triangle P'BC. De la mateixa manera Q és l'incentre de Q'CA i R ho és de R'AB. Així doncs, els tres angles petits que hi ha a C són iguals; i el mateix passa amb els que estan a A i B. En altres paraules, hem trisectat els angles del triangle ABC.

Els tres angles petits de A valen cada un $\frac{1}{3} A = 60^\circ - \alpha$; igualment a B i C. Així doncs,

$$\alpha = 60^\circ - \frac{1}{3} A \ , \qquad \beta = 60^\circ - \frac{1}{3} B \ , \qquad \gamma = 60^\circ - \frac{1}{3} C \ .$$

Escollint aquests valors per als angles de la base dels nostres triangles isòsceles, podem assegurar que el procediment anterior acaba en un triangle ABC que és semblant a qualsevol triangle donat.

El teorema queda, doncs, demostrat.