A propos des finalités de l'enseignement mathématique *

André Delessert

Resum: En el transcurs de les darreres dècades l'edifici de l'ensenyament de les Matemàtiques ha estat sacsejat en els seus mateixos fonaments. La reforma del contingut dels programes, la dita "Matemàtica Moderna", va instar molts mestres a plantejar-se les raons que legitimaven l'existència de les Matemàtiques a l'escola. Si ens volem expressar en el llenguatge de moda, hauriem de dir: L'estudi dels objectius de l'ensenyament hauria de tenir en compte les necessitats i exigències de totes les parts interessades.

En primer lloc, s'ha de fixar els diferents protagonistes de l'escena: Els nens, cridats a assolir en pocs anys els límits de la cultura d'aquest segle; els pares, acusats de confiar només a l'escola la formació de llurs fills; l'escola, preocupada per restar una institució inamobible; els mestres, desacreditats per l'opinió pública; les autoritats, vetlladores de la llei; l'opinió pública, que despreocupadament es declara competent en la matèria; els matematics que dubten de donar llur opinió.

Podria ésser interessant simular una enquesta entre aquests diferents actors. S'els hi demana que formulin llurs exigències a l'ensenyament de la Matemàtica. Hom intenta imaginar-se la diversitat de respostes, les coincidències i les divergències.

En una segona etapa s'intenta posar en relleu els trets més essencials de les Matemàtiques: l'activitat intelectual per exel.lència, la reflexió individual, que exigeix més entendre que no pas saber i que és capaç d'integrar-se en les situacions concretes de la vida.

Finalment, hom comprova com la Matemàtica, per la seva pròpia naturalesa, pot donar resposta a allò que d'ella s'espera. Es mostra capaç d'anar molt més lluny del que se li demana. Però no pot satisfer simultàniament totes les exigències, com demostren alguns exemples.

Aquest "tour d'horizon" intenta convèncer al lector que el problema de fixar els objectius de l'ensenyament de les Matemàtiques no pot ésser resolt sense analitzar a fons l'essència mateixa de les Matemàtiques, sortint de l'estret cercle de l'escola.

1. Il suffit de feuilleter un vieux catalogue de grand magasin pour constater tout ce que peut comporter d'absurde le phénomène de la mode. Qu'il s'agisse de vêtement ou de mobilier, la mode met systématiquement l'accent sur l'accessoire, le passager, le futile. Ceux qui lancent la mode prétendent toujours corriger les excès ou les défauts de la mode passée. Ils préconisent pour cela des «idées» destinées à faire fureur et dont ils démontreront, l'année suivante, toute la frivolité. Les raisons d'être de l'habillement ou de l'ameublement sont passées sous silence ou, si possible, ridiculisées. Tout se passe comme si l'on s'efforçait d'empêcher le client éventuel de réfléchir à la nécessité de se vêtir ou de se loger en attirant son attention sur des détails insignifiants. Il n'est pas difficile d'imaginer à qui peuvent profiter de tels agissements. Toutefois, on reste perplexe lorsqu'on constate l'existence de phénomènes analogues en matière de politique scolaire ou de doctrine pédagogique. Périodiquement on voit émerger dans ces domaines des tournures de phrases et

* L'article a été publié dans la revue «Polyphème» N° 25.

une terminologie à la mode. Ceux qui parlent de ces choses se croient tenus d'employer ce jargon provisoire, surtout s'ils sont profanes. Aujourd'hui, parmi les mots qui font fureur, il faut relever précisément celui de «finalité». En acceptant de traiter des finalités de l'enseignement mathématique, on court le risque d'égrener un chapelet de bonnes intentions un peu niaises, et d'oublier les problèmes sérieux auxquels cet enseignement doit faire face. Nous nous efforcerons d'éviter ce piège. Et pour cela, il n'est pas inutile de passer brièvement en revue l'évolution des doctrines touchant à l'enseignement mathématique, en notant certaines tendances liées à des modes passagères.

Jusqu'autour des années quarante, les mathématiques scolaires apparaissaient comme le royaume par excellence des vérités immuables. Les programmes ne variaient que peu de pays à pays, et pratiquement pas d'une décennie à l'autre. Des critiques s'élevaient ici ou là à l'encontre de certains manuels ou de certaines méthodes d'enseignement. Mais les réformateurs ne s'attaquaient jamais aux programmes et ils ne se faisaient que peu d'illusions sur l'efficacité de leurs remarques. Comme le déclarait à peu près l'un d'eux, «jusqu'ici les programmes visaient à l'abêtissement des élèves. Désormais, en revanche, il en sera exactement de même.» Le rôle des mathématiques à l'école était celui d'une gymnastique de l'esprit, d'un apprentissage de la rigueur et de ce qu'il était convenu d'appeler l'honnêteté intellectuelle, toutes choses garanties par des règles sans exceptions, des procédés sans fantaisie, des développements imperturbables dénués de tout recours à l'imagination. Le recrutement des géomètres et des artilleurs était assuré. Quant aux subtilités algébriques et aux finesses des problèmes de géométrie, elles étaient offertes en compensation aux élèves peu doués pour les belles-lettres. Elles faisaient d'ailleurs partie intégrante de la formation des futurs maîtres de mathématiques.

Et brusquement, plusieurs voix s'élevèrent qui jetaient des doutes sur les plans d'études traditionnels. Elles s'inspiraient d'une conception exposée très clairement par N. Bourbaki dès 1939; les mathématiques se présentaient désormais comme un édifice composé de structures élaborées méthodiquement à partir de la notion d'ensemble. Sous le nom de «mathématiques modernes» emprunté à Bourbaki lui-même, elles préconisaient des programmes faisant apparaître les grandes structures mathématiques. Par comparaison avec les plans d'études traditionnels, le contenu était passablement bouleversé. La géométrie élémentaire, qui était considérée par Bourbaki comme un chapitre fermé des mathématiques, était réduite à la portion congrue, au profit de notions concernant les ensembles ou l'algèbre linéaire, par exemple. Comme on peut l'imaginer, cette tendance suscita une opposition farouche de la part des défenseurs du système traditionnel. Les «anciens» et les «modernes» se heurtèrent par la parole et par l'écrit sur un ton véhément. Mais les novateurs reçurent bientôt des renforts précieux. D'une part des pédagogues supérieurement doués mirent sur pied des techniques d'enseignement qui révélèrent qu'il était possible de mettre à la portée des enfants les mathé-

matiques nouvelles réputées si abstraites. D'autre part, des psychologues s'efforcèrent de montrer que le développement intellectuel de l'enfant est calqué sur celui des principales structures des mathématiques. Graduellement les idées nouvelles gagnèrent du terrain. Dans plusieurs pays, les programmes officiels firent une place aux mathématiques modernes.

Les premiers expérimentateurs avaient puisé leur enthousiasme aux sources bourbakistes les plus pures. Lorsque le mouvement de réforme fut entré dans les institutions, les programmes furent conçus et appliqués par des enseignants qui n'étaient pas tous décidés ou aptes à réfléchir aux raisons mathématiques qui militaient en faveur du nouveau système. Nous ne nous étendrons pas sur les critiques qu'on peut faire à l'égard des «mathématiques modernes». Mais il apparaît déjà que pour certains de leurs partisans, c'est leur «modernisme» qui constitue leur attrait principal. Le phénomène de la mode n'est donc pas tout à fait étranger à la faveur dont jouissent les programmes nouveaux.

Quoi qu'il en soit, le mouvement des «mathématiques modernes» avait fait trembler le temple mathématique sur ses bases. Les nouvelles idoles n'ayant pas encore acquis le caractère sacro-saint des programmes traditionnels, il devenait possible de s'interroger sur les raisons d'être de l'enseignement mathématique. Les novateurs ne les avaient pas remises en question. Ils s'étaient bornés à construire de nouveaux plans d'études et ceux-ci s'étaient bientôt révélés aussi rigides, aussi dogmatiques, sinon plus que les anciens. Pourquoi enseignez-vous les mathématiques ? Cette question si simple mais si fondamentale prit de court les enseignants. Ils pouvaient évidemment mentionner l'apprentissage de la rigueur et toutes ces sortes de choses. Mais il devenait difficile de prouver qu'on parvient plus sûrement à l'honnêteté intellectuelle par le canal de l'algèbre linéaire que par celui des hauteurs d'un triangle. Il se produisit alors un phénomène assez remarquable. La question posée plus haut fut interprétée ainsi: «Comment faites-vous pour savoir si vous atteignez ou non les buts que vous vous êtes assignés ?» Tout le monde sait qu'on ne doit jamais demander à un élève : «Pourquoi fais-tu telle opération ?» Il est rare qu'il puisse deviner si on l'interroge sur le droit qu'il a d'agir de cette manière ou sur le but qu'il se propose d'atteindre. Si ça l'arrange, il entretient l'équivoque. C'est exactement ce qui firent la plupart des responsables de l'enseignement mathématique. Comme les mathématiciens en général, ils répugnent à s'exprimer sur les raisons profondes de leur action. Ils craignent les prises de position philosophiques, par quoi ils entendent des déclarations d'une généralité telle que personne ne peut les vérifier ni les infirmer. En revanche, il leur parut plus confortable de décrire les buts de leur enseignement. Ils se trouvèrent d'autant plus à l'aise qu'ils purent se mettre dans le sillage des deux derniers bateaux alors à la mode : celui des «objectifs» et celui de l'«évaluation». Nous ne nous attarderons pas ici à ce que furent et ce que sont devenus ces deux mouvements. L'un et l'autre répondent à des besoins profonds. Mais par crainte sans doute de l'excès de

généralité, ils se sont perdus l'un et l'autre dans un excès de miniaturisation. Des officines spécialisées se sont évertuées à découper le comportement de l'élève en une multitude d'activités minuscules. Chacun de ces atomes d'exploit se trouve assorti d'une volée de tests permettant de savoir s'il a été réalisé ou non. On peut imaginer l'enthousiasme que peuvent créer des fantaisies si distrayantes chez certains responsables de l'école : enfin le problème du contenu de l'enseignement mathématique et celui de l'évaluation de ses moyens d'action, maîtres, manuels, programmes, etc., semblent sur la voie d'une solution définitive ! Evidemment le problème initial, celui du rôle des mathématiques dans l'éducation des enfants, est tout bonnement passé sous silence.
Cette manière d'écarter une question si fondamentale ne saurait avoir qu'une efficacité momentanée. Et, en effet, dans divers milieux scolaires ou non, on s'interrogea sur les raisons d'être des mathématiques à l'école. Une bonne manière d'attacher le grelot fut de proférer des accusations partiellement justifiées, sommaires si possible. On reprocha donc aux mathématiques d'être un outil aux mains des classes dirigeantes en vue de sélectionner les élites de demain et de maintenir la grande masse des futurs citoyens dans la docilité intellectuelle. Les premiers à s'exprimer dans ce sens se fondaient sur des constatations sérieuses et une bonne connaissance des mathématiques.
Malheureusement, ils furent bientôt suivis par des disciples moins bien informés, mus par une sensiblerie intellectuelle assez nébuleuse. Le mouvement est aujourd'hui devenu une mode, destinée comme les autres à se perdre dans l'insignifiance. Mais le problème reste posé. C'est celui des «finalités» de l'enseignement mathématique, par quoi on veut exprimer qu'on s'interroge sur ses buts ultimes et qu'on prend ses distances avec l'«objectivite» dont il a été question précédemment. Il appartient à ceux qu'il intéresse vraiment non seulement de le traiter, mais encore d'éviter qu'il ne se perde dans la confusion verbale.

2. Pour déterminer le rôle des mathématiques à l'école, il est impossible de se confiner dans le domaine strict de l'enseignement mathématique. Il faut d'abord savoir de quelle école il s'agit, de quelle fonction elle est investie et de quels moyens elle dispose. Il convient de prendre en compte les besoins et les demandes des diverses instances impliquées dans le phénomène scolaire : les enfants, les parents, l'école en tant que telle, le corps enseignant, les autorités politiques, le public, les mathématiciens. Passons très brièvement en revue les espoirs et les craintes que peuvent éprouver ces différents protagonistes à l'égard de l'enseignement mathématique, ainsi que les moyens dont ils disposent pour les exprimer.

3. Lorsqu'ils entrent à l'école, les enfants d'aujourd'hui ont, sur le plan strictement mathématique, une expérience et une sensibilité qui ne doivent pas différer beaucoup de celles des enfants d'il y a deux ou trois mille ans. L'enseignement a pour

devoir de leur faire franchir des obstacles épistémologiques dont certains ont retenu les meilleurs mathématiciens jusqu'au XVIIIe, ou même jusqu'au XIXe siècle. Rares sont les élèves qui se soumettraient spontanément à l'apprentissage douloureux qu'exige l'accès à ces connaissances et ces pouvoirs. En général, ils demandent à être rassurés quant à ce qu'ils savent déjà. Ce n'est que très graduellement qu'ils acceptent et qu'ils convoitent le pouvoir que confère la maîtrise d'un raisonnement mathématique contraignant.
A peu d'exceptions près, ils considèrent les mathématiques comme une discipline purement scolaire. Ils seraient bien empruntés s'ils leur fallait expliquer ce que les mathématiques peuvent leur apporter dans une vie d'adulte qu'ils ne conçoivent que très indistinctement. Il leur est donc difficile d'exprimer leur attente ou leur méfiance à l'égard des buts de l'enseignement mathématique. En revanche, leur enthousiasme ou leur répugnance permet de mesurer l'adaptation d'une méthode d'enseignement à leurs capacités. Il faut être très attentif à des échecs durables sur un sujet mathématique donné. Cela correspond parfois à une confusion mathématique fondamentale, comme on a pu l'observer dans l'enseignement classique des fractions ordinaires, par exemple.

4. Les parents se déchargent sur l'école d'une partie de l'éducation de leurs enfants qui, naturellement, biologiquement si l'on peut dire, leur revient. C'est le cas en particulier pour les mathématiques. Il découle de là que leur position est un peu inconfortable. D'une part, ils désirent que leurs enfants augmentent au maximum leurs chances de réussite sociale. De l'autre, ils redoutent de voir se développer chez leur progéniture des secteurs de l'intelligence et de la sensibilité qui échappent au cadre d'éducation qu'ils ont adopté. Ainsi, ils acceptent facilement la présence à l'école d'un enseignement mathématique important. Bien qu'on puisse encore trouver à la rigueur des parents qui considèrent comme un ornement de l'esprit d'avoir été des cancres en mathématiques, il n'en existe plus qui soient réellement fiers de voir leur rejeton échouer dans cette discipline. Toutefois, ils craignent les innovations didactiques ou les changements de programmes qui les empêchent de suivre, au moins en principe, la formation de leurs enfants. Il faut noter à ce propos que l'aspect contraignant des raisonnements mathématiques ne frappe pas que l'intelligence des élèves. Il éveille aussi des résonances affectives. Chez certains enfants, il est ressenti comme un avatar de l'autorité paternelle. A d'autres, au contraire, il donne les moyens d'avoir, enfin, raison contre leur père. On observe fréquemment des répulsions ou des engouements immodérés pour les mathématiques chez des élèves qui vivent dans une situation familiale difficile. On conçoit donc que la plupart des parents éprouvent des difficultés à se prononcer impartialement sur les buts de l'enseignement mathématique.

5. Tout le monde a affaire à l'école à un moment ou à un autre. On pourrait imaginer qu'elle est la résultante de cette multitude d'influences individuelles. En

réalité, elle est gérée presque entièrement par un petit nombre de responsables spécialisés : recteurs, directeurs, administrateurs divers. Ceux-ci doivent être à l'écoute des consignes gouvernementales, de l'opinion publique, des demandes des parents et des tendances de la pédagogie. Pour ce qui concerne l'enseignement mathématique, ils doivent lui faire une place à l'école à côté d'autres disciplines. Par les décisions qu'ils prennent en matière d'organisation et spécialement par le choix des enseignants, ils sont en mesure d'exercer une influence déterminante qui dépend en partie de l'estime qu'ils portent à leur propre compétence mathématique. Nous insisterons toutefois sur un aspect particulier de l'école (par quoi nous entendons l'ensemble des institutions couvrant les besoins de la scolarité obligatoire, de la formation professionnelle et de l'enseignement supérieur). L'école délivre des certificats de fin de scolarité et des brevets d'aptitudes. Elle a le devoir d'entretenir une certaine stabilité en ce domaine. On peut prendre un certain plaisir à apprendre les bonnes années pour les crus de Bordeaux; mais il serait désagréable de devoir mémoriser les millésimes à éviter pour les chirurgiens, les ferblantiers ou les instituteurs. Ce qui se passe, semble-t-il, dans certains systèmes scolaires scandinaves montre qu'il ne s'agit pas là d'une pure hypothèse académique. Il s'ensuit que les responsables de l'école manifestent généralement quelque réserve à l'égard des expériences didactiques. Lorsqu'elles sont inévitables, ils demandent qu'elles ne soient pas reprises inutilement, qu'elles soient conduites, si possible, avec l'ensemble des élèves d'un système scolaire et, enfin, qu'elles réussissent nécessairement. En un mot, qu'elles n'aient pas le caractère expérimental. Ceux qui trouvent utile de mettre à l'essai des techniques d'enseignement adaptées à ce qu'ils estiment être les finalités de l'enseignement mathématique doivent prendre conscience de cette difficulté.

6. Il ne devrait pas être nécessaire de relever que le corps enseignant est composé, par principe même, des personnes les plus compétentes pour définir les objectifs de l'école. En particulier, il est impossible d'enseigner durablement les mathématiques sans réfléchir sur leurs raisons d'être dans les programmes scolaires. Toutefois l'enseignement constitue l'une des très rares professions – avec celles de prêtre ou d'artiste, éventuellement – où le premier venu s'estime totalement compétent. Celui-là même qui éprouverait quelque gêne à en remontrer à un couvreur, un dentiste ou un expert-comptable n'hésite pas à exposer abondamment ses théories pédagogiques devant des professeurs chevronnés. L'homme de plume qui jugerait utile de consacrer deux cents pages à exprimer sa haine de l'école et son mépris pour tous les maîtres serait assuré du plus grand succès de librairie. Il existe même des instituts de recherche qui ont pour seule fonction, semble-t-il, de prouver que les enseignants n'ont jamais rien compris à la psychologie enfantine ni aux mathématiques. Les grands champions des «mathématiques modernes» et ceux qui, par la suite, les ont pourfendues se sont au moins accordés sur un point :

la stupidité opiniâtre des maîtres de mathématiques. Aujourd'hui la leçon a porté : la plupart d'entre eux ont acquis le sentiment profond de leur incapacité ; ils évitent de s'exprimer personnellement sur les finalités de l'enseignement mathématique et ils sont prêts à concéder à n'importe qui le droit de les formuler à leur place. Il faut ajouter que beaucoup de maîtres enseignent encore bien d'autres branches que les mathématiques et qu'il leur est impossible d'acquérir une formation approfondie dans chacune d'entre elles. On peut comprendre qu'ils hésitent à s'exprimer sur des questions à propos desquelles les spécialistes eux-mêmes se montrent si timorés. Cela dit, il est remarquable que les maîtres acceptent avec tant de philosophie le mépris où l'on tient leur opinion en matière d'enseignement mathématique. Il est vrai que, contrairement aux profanes, ils ont la possibilité d'appliquer quotidiennement, dans leurs leçons, les maximes auquelles ils adhèrent intimement.

7. Il n'est pas possible de s'étendre ici sur le rôle des autorités politiques qui gouvernent l'école. Elles doivent assurer le bon fonctionnement des institutions scolaires, dans le cadre des lois existantes, des traditions culturelles et de la volonté populaire. Elles ne sont pas en mesure d'exercer une influence motrice dans les domaines strictement scientifiques ou didactiques. En particulier, elles ne sauraient déterminer les finalités de l'enseignement mathématique. Cependant elles peuvent empêcher ou, au contraire, faciliter telle ou telle expérience. Pour arrêter leurs décisions, elles s'adressent à des experts qu'elles estiment compétents. Evidemment elles peuvent se tromper d'experts.

8. De même qu'il existe un public pour le cinéma ou pour le sport, il existe un public pour l'école. Il se compose des personnes qui, d'une part peuvent avoir, ou exprimer ou encore approuver une opinion sur l'école mais qui, d'autre part, n'ont aucun moyen de faire passer cette opinion dans les faits ni même de s'assurer qu'elle est simplement raisonnable. C'est ainsi que le public dispose de moyens d'expression très puissants. Il peut parler par la voix d'une personnalité connue (du sport, par exemple, ou de n'importe quoi d'autre puisqu'en matière scolaire, tout le monde, les enseignants mis à part, est expert). Il peut aussi, et c'est le cas le plus fréquent, se manifester par des groupes de pression : utilisateurs des mathématiques, partis politiques, employeurs, contribuables, propriétaires de véhicule à moteur, journalistes, etc. En revanche, les opinions émises ne sont soumises à aucune règle de cohérence. La même personne peut estimer que tous les enfants doivent recevoir la même instruction jusqu'à seize ans, que les mathématiques qu'ils apprennent doivent être immédiatement utilisables dans les professions les plus diverses et que le pays doit se maintenir dans le peloton de tête des nations scientifiquement développées, tout cela sans se sentir la moindre des obligations de vérifier que ces exigences sont compatibles. C'est pourquoi, il est impossible de dialoguer avec le public : il se comporte exactement comme un sourd. Le plus

regrettable, c'est qu'il en émane parfois une idée tout à fait sensée qui avait complètement échappé aux spécialistes.

9. Par «mathématicien», nous entendons toute personne qui a obtenu un grade universitaire à la suite d'études en mathématiques proprement dites. En tant que tels, les mathématiciens doivent examiner les dispositifs mis en place pour enseigner les mathématiques. Ils doivent dire ensuite si ces systèmes ont le droit de battre pavillon mathématique, c'est-à-dire s'ils sont en accord avec l'état et les tendances des mathématiques actuelles. La plupart des mathématiciens pratiquent l'enseignement mathématique à un niveau infra-universitaire. Ils sont bien placés pour s'exprimer sur la question. Les autres mathématiciens se spécialisent dans la recherche ou l'enseignement universitaire. Leurs compétences didactiques en ce qui concerne les mathématiques élémentaires sont généralement moins grandes qu'ils ne le pensent. En revanche, ils sont en mesure de dire si les principes sur lesquels on prétend construire les mathématiques à l'école sont mathématiquement corrects ou non, et en réalité ils sont les seuls à pouvoir le faire. Leur avis est d'autant plus important que les mathématiques élémentaires présentent, dès l'apparition des nombres entiers, des problèmes d'une complexité transcendante. Malheureusement, les spécialistes des mathématiques avancées travaillent ordinairement sur des problèmes qu'il est rigoureusement impossible d'exposer aux profanes. Ils en prennent un peu trop facilement leur parti. Ils craignent de sortir de leur tour d'ivoire et ils ne savent pas faire ce minimum de vulgarisation intelligente qui permettrait aux enseignants de discerner les tendances principales des mathématiques d'aujourd'hui. La réticence des spécialistes à prendre leurs responsabilités dans un domaine qui relève de leur compétence trouble la situation de l'enseignement mathématique. Lors de la croisade des «mathématiques modernes», seuls quelques mathématiciens, animés par une idéologie commune, se sont exprimés. Les responsables de l'école ont pu croire que tout était définitivement clair au royaume des mathématiques et qu'il était possible d'entreprendre une réforme définitive de l'enseignement. Tous les autres mathématiciens universitaires se sont tus, y compris ceux qui, par la suite, ont élevé les plus violentes critiques à l'égard de l'enseignement de la théorie des ensembles et de la mise en veilleuse de la géométrie. Là encore, la majorité des spécialistes se tiennent cois et le profane qui le souhaite peut estimer qu'il n'y a rien de plus pressé que de revenir à l'enseignement mathématique d'il y a un demi-siècle. Il faut ajouter que lorsqu'on contraint un spécialiste des mathématiques à s'exprimer sur l'enseignement élémentaire, il pense presque toujours à la formation du futur mathématicien. Or ce problème ne présente aucun intérêt général. Il suffit pour s'en convaincre d'évaluer la proportion des mathématiciens dans la population adulte et de constater qu'aucun système scolaire, si mauvais soit-il, ne peut empêcher un bébé mathématicien de devenir grand.

10. Nous venons de passer en revue les diverses instances intéressées aux mathématiques à l'école. Certaines d'entre elles, comme celle que nous avons désignée par le terme de «public», mériteraient d'être présentées avec plus de détails. Pensons par exemple aux milieux professionnels ou aux techniciens qui appliquent les mathématiques. Nous serons d'ailleurs amenés à y revenir. Néanmoins, si schématique qu'il soit, notre inventaire montre à l'évidence la complexité de la situation. C'est dans ce cadre pourtant qu'il faut placer la question des finalités de l'enseignement mathématique, sinon la discussion s'égarera à nouveau dans les bocages chers aux spécialistes de la didactique et le problème fondamental se reposera demain à l'enseigne des «ultimes finalités» de l'enseignement mathématique. Il importe de souligner ici un fait important. Même s'ils ont des opinions très arrêtées, les profanes ne sont généralement pas capables de formuler des propositions précises, cohérentes et applicables au sujet de l'enseignement mathématique. Seuls les enseignants et les mathématiciens sont en mesure de déterminer des lignes directrices, puis à en justifier le bien-fondé et la consistance par des arguments didactiques et mathématiques. L'initiative leur appartient donc, mais à deux conditions. La première est de collaborer étroitement. La deuxième est de prêter une oreille attentive aux critiques et aux vœux émanant des instances que nous avons qualifiées de profanes.
La complexité du problème ne permet pas d'espérer une solution simple et immédiate. Il faut d'abord formuler les espoirs et les besoins principaux manifestés plus ou moins confusément par les différentes instances intéressées. Il faut ensuite retenir celles de ces demandes auxquelles les mathématiques peuvent apporter une contribution substantielle et écarter celles que les mathématiques ne peuvent pas satisfaire. Ce choix doit être justifié par un exposé sur la nature des objets et de l'activité mathématiques. Enfin, et ce n'est pas le plus facile, tout cela doit être mis à la portée du profane. Nous voyons ainsi apparaître à la fois un programme d'action et la forme à donner à la solution du problème des finalités de l'enseignement mathématique.

11. A titre d'exercice, je propose de simuler la procédure qui vient d'être exposée. Je m'exprimerai comme si je représentais le corps des enseignants et des mathématiciens et comme si j'avais recueilli aux bonnes sources les demandes émanant des instances intéressées à l'enseignement mathématique. Ce sera évidemment un très mauvais exemple d'une démarche qui est, par nature, collective et interdisciplinaire. De plus, je serai obligé de réduire à peu de chose la présentation de considérations personnelles qui n'ont pas leur place dans un exposé relativement succint. Mais, on peut espérer découvrir par ce procédé l'origine de certains conflits, les choix devant lesquels l'enseignement mathématique se trouve nécessairement placé et la manière de formuler les finalités de cet enseignement.
Dans une première étape, je vais essayer de concevoir et de formuler certaines de-

mandes en provenance des diverses instances qui ont été passées en revue précédemment.

12. Chaque enfant est en droit d'attendre de l'enseignement mathématique qu'il l'aide à tirer le meilleur parti de ses possibilités latentes. Evidemment aucun élève n'oserait braver les moqueries de ses camarades en déclarant une chose pareille. Mais une fois sorti de l'école, c'est bien ça qu'il se félicite d'avoir reçu ou qu'il se plaint de n'avoir pas trouvé. Notons que cette exigence entraîne deux conséquences que la plupart des systèmes scolaires ont beaucoup de peine à concilier : l'égalité des chances et le droit à la différence.

13. Pour les parents, l'école, et en particulier l'enseignement mathématique, doivent concourir à l'éducation de leurs enfants. Il convient ici de prendre le mot d'éducation dans son sens plein, qui dépasse de beaucoup celui du terme d'instruction. L'enseignement mathématique doit faciliter l'intégration sociale, professionnelle et culturelle de leurs enfants. Il doit aussi respecter la sphère familiale. Plus les parents prennent à cœur l'éducation de leurs enfants et plus ils sont portés à craindre les interférences de l'école. Le père de famille qui s'inquiète en voyant ses enfants faire d'autres mathématiques que celles qu'il a apprises en classe n'est pas toujours mû par des considérations scientifiques. D'une manière générale, les parents voient l'école sous l'angle de leur intérêt personnel et de celui de leur enfant. Ils sont prêts à tolérer la plus criante inégalité des chances lorsque celles de leur enfant sont particulièrement bonnes.

14. Pour les responsables scolaires, les mathématiques doivent contribuer, aux côtés d'autres disciplines, à l'accomplissement des tâches de l'école. Au risque d'omettre bien des points importants, je relèverai que l'école doit préparer les élèves à vivre dans le monde contemporain non scolaire ; pour cela, elle doit leur donner les moyens de collaborer et de communiquer avec les autres. A la demande du public et des autorités politiques, l'école doit obtenir des élèves les garanties nécessaires à l'exercice de certaines professions. Pour atteindre ces deux premiers buts, elle doit apprendre aux élèves à reconnaître leur valeur individuelle, à prendre conscience de leurs pouvoirs personnels ainsi que de leurs limites. En outre elle doit préparer les élèves à faire valoir leurs connaissances et leurs aptitudes face à la mode, la publicité, le conformisme, les idéologies. Dans la pratique, certains administrateurs scolaires et certains enseignants, submergés par les problèmes quotidiens, semblent perdre de vue ces grands objectifs. L'école devient alors un but pour elle-même. Les enfants sont préparés à demeurer à l'école plutôt qu'à en sortir. Un tel danger guette toute institution d'une certaine importance. Il faut aussi remarquer que l'école doit réaliser la synthèse délicate de deux démarches contradictoires en apparence. D'une part, elle doit enseigner aux enfants le langage,

les coutumes et les règles de la tribu, de façon à pouvoir vivre en conformité avec elle. D'autre part, elle doit préparer chaque enfant à prendre en charge lui-même les responsabilités et les délectations attachées à sa propre réalité vécue. La mode substitue à nos goûts et nos pensées la médiocre satisfaction de ne pas être en retard. La publicité réduit notre vie affective au choix d'une cigarette ou d'un dentifrice. Le conformisme nous pousse à préférer une sottise collective à une finesse individuelle. L'idéologie enfin nous incite à nous abandonner à nos petitesses sous l'égide d'une entité aveugle avec majuscule, à l'abri de laquelle elles deviennent dévouement à la Cause. L'école peut rendre les enfants attentifs à ces dangers. Nombreux sont ceux qui n'apprécient pas cet aspect des tâches de l'école. Ils y voient une prise de position politique. Observons que de restreindre l'école à la seule fabrication d'individus conformes aux normes du public constitue aussi une position politique. Entre les deux, ma foi, je n'hésite pas à donner ma préférence à celle qui réserve à chacun de nous les meilleures possibilités de prendre en main les problèmes qui le concernent.

15. Sous nos climats, les autorités politiques n'interviennent pas directement, en tant que telles, au niveau des principes et du contenu de l'enseignement mathématique. Néanmoins, comme elles sont chargées de vérifier que l'école remplit bien sa mission dans le cadre légal, elles se manifestent dans deux cas au moins. Lors d'une modification des lois scolaires, d'un changement des structures de l'école, par exemple, elles peuvent imposer des réformes importantes d'une partie de l'enseignement mathématique. Elles peuvent aussi, à l'instigation d'un groupement de maîtres de mathématiques, rendre officiels de nouveaux programmes.

16. On n'en finirait pas d'énumérer tous les cas où le public manifeste ses opinions au sujet de l'enseignement mathématique. Je me bornerai à deux catégories de consommateurs. Considérons d'abord les techniciens et les scientifiques non mathématiciens. Ils attendent que les élèves sortant de l'école sachent appliquer les mathématiques aux problèmes spécifiques de la technique ou de la science dans les domaines où ils travaillent. Ils considèrent aussi que les mathématiques doivent assurer l'apprentissage de la rigueur. Ces exigences manifestent une conception très particulière des sciences. Selon cette perspective, les sciences formeraient une sorte de chaîne commençant par les mathématiques. Celles-ci auraient le monopole de la rigueur absolue. Plus on s'éloigne dans la chaîne – physique, biologie, sciences humaines... – plus la rigueur diminuerait. Les mathématiques constitueraient l'étalon de la rigueur dans toutes les sciences. En contrepartie, elles n'auraient aucun objet propre. Elles se borneraient à construire des formules creuses, des schémas de calcul ou de raisonnement qui seraient remplis après coup par les différentes sciences ou techniques.
Passons à la catégorie des employeurs, directeurs d'apprentissage, chefs de personnel, patrons d'entreprises, par exemple. En règle générale, ils sont peu sensibles à

l'abstraction, à l'aspect culturel des mathématiques. Ils préconisent ce qui est concret, tangible. Ils s'expriment en termes d'efficacité, et de rendement. Ils considèrent que l'école doit enseigner à calculer correctement et à connaître un certain nombre de termes et de règles touchant la géométrie ou l'arithmétique commerciale. Ils proclament aussi qu'en sortant de l'école, les jeunes doivent être capables de s'adapter. Ces demandes semblent contradictoires : les individus aptes à appliquer mécaniquement des recettes toutes faites manquent généralement de la souplesse requise par l'adaptation.

17. Il serait intéressant de reprendre, en les critiquant, ces diverses exigences. Est-il vrai que les enfants et leurs parents soient, en majorité, soucieux de se soustraire à la mode et au conformisme ? L'école peut-elle se permettre de défendre avec tant de détermination la personnalité des enfants face au public ? Nous devons malheureusement couper court et aborder l'étape suivante : que sont les mathématiques ? A quelles exigences peuvent-elles satisfaire ? Ces questions sont d'une ampleur considérable et je me bornerai à quelques remarques en relation avec le problème des finalités.
Les mathématiques constituent une activité intellectuelle portant sur des objets intellectuels. Pour fixer les idées, j'évoquerai la notion d'infini. Elle est sous-jacente à la notion de nombre réel et même de nombre entier. Mais elle n'est réalisée dans aucun système matériel. Aucun processus humainement exécutable ne comporte une infinité de pas. C'est l'exemple-type d'un objet mathématique. On a même pu dire que le but de l'enseignement mathématique est de faire comprendre la notion d'infini. Remarquons en passant que cette notion est délicate certes, qu'elle n'est accessible qu'à la pensée, mais qu'elle n'est pas, au sens propre, abstraite. On peut abstraire la notion de «végétal» en examinant diverses plantes. On ne peut pas abstraire le «rouge» de l'étude d'objets bleus, ni l'infini de la manipulation de collections nécessairement finies. On peut se demander s'il est indispensable de savoir manipuler des objets intellectuels et si tout le monde en est capable. Sur le second point, il est difficile de répondre catégoriquement. Mais il n'est pas absurde de croire que l'incapacité à employer des objets intellectuels est une véritable infirmité. Le comportement des enfants qui jouent montre que la plupart d'entre eux manipulent avec cohérence des notions strictement intellectuelles. Quant à savoir si les objets intellectuels sont un luxe, une illustration d'actualité permet de trouver la réponse. Tout le monde aujourd'hui sait que la population humaine croît et même que son taux de croissance croît avec le temps. Il est prouvé par ailleurs que l'humanité vit sur une sorte de sphère, qui est un domaine borné. Il est possible de relier ces deux informations par un acte de pensée mathématique : il n'existe pas de fonction réelle du temps, bornée, non constante et à croissance indéfiniment croissante. On peut donc affirmer en toute certitude que l'humanité approche d'un moment où règnera une stérilité fortement accrue ou alors une

espérance de vie fortement réduite. Il est inutile et d'ailleurs impossible de faire l'expérience. Cela n'a rien à voir avec l'écologie et le résultat est indépendant des mesures qui seront prises. Ceux qui préconisent imperturbablement la croissance, et particulièrement celle de la population humaine, sont simplement incapables d'effectuer cet acte de pensée. Tant qu'ils existeront, il sera nécessaire d'enseigner sérieusement les mathématiques. Beaucoup de sciences et d'arts sont susceptibles de développer chez l'homme des activités de pensée. Celle de notre exemple n'exige que peu de finesse ou de sens artistique. Il s'agit en quelque sorte d'une activité minimale qui est à la portée de presque tout le monde. C'est exactement ce que l'enseignement mathématique peut développer.

L'acte mathématique est foncièrement individuel. Une analyse plus poussée montre que le nœud de l'action consiste en une conjonction d'un donné intuitif et d'un schéma formel. Cette synthèse doit être refaite par chacun et elle doit être maîtrisée de bout en bout. Il ne suffit pas de savoir qu'elle est possible ou d'appartenir à une classe où elle a été réussie à huitante pour cent. Elle se situe exactement à l'opposé de l'application d'une recette.

L'activité mathématique est une pensée qui s'exprime. La démonstration joue en mathématique un rôle essentiel. Elle ne se réduit pas à l'administration de la preuve logique. Elle a surtout pour but de rendre plausibles les relations apparaissant dans le problème traité et de rendre significatifs les éléments intervenant dans ces relations. Le calcul, qui apparaît au contraire comme un mécanisme hermétique, est bien loin de constituer la part essentielle des mathématiques.

Les mathématiques sont essentiellement une démarche vers la nouveauté, l'inconnu, voire l'étrange. On ne peut pas comprendre deux fois la même chose. On ne peut pas résoudre, ce qui s'appelle résoudre, deux fois le même problème. Les mathématiques nous habituent à convoiter perpétuellement ce qui se trouve un peu au-delà des bornes de notre pouvoir. Il est d'ailleurs de la nature des notions mathématiques, même les plus simples, de pouvoir être appréhendées à une multitude de niveaux. Elles se prêtent donc à une perpétuelle remise en cause de nos connaissances et de nos pouvoirs.

Les mathématiciens pratiquent les mathématiques pour elles-mêmes. Le sujet est suffisamment vaste et important. Mais pour les élèves, la nature de l'acte mathématique n'apparaît clairement que lorsqu'il est intégré à une chaîne comportant des activités non mathématiques. C'est pourquoi l'enseignement mathématique doit multiplier les connexions entre les objets et les actes mathématiques d'une part et, d'autre part, des situations prises dans la vie courante, dans des jeux, dans des questions scientifiques ou techniques à portée des enfants. L'apprentissage du calcul, du dessin géométrique et d'autres techniques utiles s'ensuivra naturellement. Toutefois, la mesure de l'adéquation d'un modèle mathématique à une situation concrète donnée n'est pas en soi un problème mathématique. Le maître doit l'aborder aussi souvent que possible. Mais il n'aura jamais le temps, ni les moyens, de

traiter tous les problèmes d'adéquation que soulèvent les applications des mathématiques, même élémentaires. Par conséquent, il est exclu que l'enseignement mathématique fournisse un niveau de préparation en mathématiques appliquées répondant aux besoins de tous les utilisateurs.

18. A quelles exigences l'enseignement des mathématiques peut-il répondre ? Si l'on accepte ce qui précède, il est possible d'esquisser une réponse. L'enseignement mathématique peut contribuer à faire apparaître ou à développer chez l'enfant, c'est-à-dire le futur adulte :

- une meilleure disposition de ses aptitudes à penser et à appliquer sa pensée à l'action ;
- le goût de faire les choses entièrement par lui-même et de comprendre ce qu'il fait ;
- la capacité d'adopter des règles de fonctionnement et des conventions de langage permettant d'agir et de communiquer ;
- le courage intellectuel d'affronter la nouveauté, de remettre en cause son savoir et d'exercer son esprit d'invention.

On constate que, par leur nature, les mathématiques sont en mesure d'aller au devant des exigences les plus hautes de l'enfant et de l'école. Quant aux demandes des autres instances, elles seront satisfaites pour autant qu'elles soit compatibles avec ce qui vient d'être dit. Prenons quelques exemples. Si les autorités politiques estiment que l'Etat n'a pas besoin de citoyens capables d'une réflexion autonome, les mathématiques seront pour elles une gêne. On sait que plusieurs pays ont fermé leurs instituts de mathématiques pour cette raison. Si un employeur assimile ses employés à des organes de machines capables de calculer sans se poser de questions, il sera déçu par les mathématiques. Si tous les utilisateurs demandent à l'école de former des élèves compétents en mathématiques appliquées dans leur domaine, la majorité d'entre eux resteront insatisfaits. Un autre exemple, celui de l'informatique, est extrêmement démonstratif. L'informatique cherche à forcer les portes de l'école à l'instigation de milieux disposant de pouvoirs publicitaires considérables. Elle bénéficie du prestige de la nouveauté, donc de la mode. Cela déjà devrait éveiller le sens critique. En outre, l'informatique repose sur deux principes : l'accumulation des informations et le traitement automatique des données. Les mathématiques, au contraire, visent la sélection de données minimales mais signifiantes et le traitement explicite, démonstratif et réfléchi de ces données. Il est évident que l'informatique est très utile chaque fois qu'on doit tirer des éléments de décision d'une multitude d'informations insignifiantes ou désordonnées comme c'est le cas, par exemple, en statistique.

En revanche, pour toute situation qui exige une représentation signifiante, une compréhension de l'intérieur, une adhésion, un risque et une responsabilité personnels, pour toute expérience qui puisse servir d'exemple vécu, pour toutes les

décisions enfin que l'homme est amené à prendre dans les affaires qui le concernent, c'est à une démarche analogue à celle des mathématiques qu'il faut recourir. L'enseignement mathématique ne peut donc pas renoncer à regarder l'informatique comme un phénomène à dominer et à confiner dans un domaine strictement limité, sans manquer à sa raison d'être.

19. L'exercice auquel nous venons de nous livrer est manifestement lacunaire et partial. De nombreux éléments d'information ont été omis. C'est inévitable dans le cadre de cette présentation. Sur quelques points, j'ai fait état de positions personnelles, en toute connaissance de cause : nous vivons un temps où l'indifférence est déjà partisane. J'espère toutefois avoir réussi à évoquer quelques-uns des éléments dont il faut tenir compte lorsqu'on aborde le problème des finalités de l'enseignement mathématique. Au risque de défigurer encore ce qui a été présenté d'une manière trop schématique, je me résumerai ainsi :

- en dehors de toute idéologie, les mathématiques manifestent une forme de pensée active, adaptée aux problèmes de notre temps et que chacun peut employer librement ;
- l'enseignement mathématique a pour but d'amener chaque élève à réussir un certain nombre d'actions mathématiques dignes de ce nom, à la mesure de ses capacités de compréhension et d'application concrète. Cela implique, en particulier, qu'il ne convient pas de soumettre tous les enfants à un apprentissage standard, mais de faire en sorte que chacun d'eux ait suffisamment d'occasions de succès mathématiques à sa portée.

Mais nous avons vu aussi qu'aucune formule aussi simple ne saurait résoudre le problème des finalités de l'enseignement mathématique.