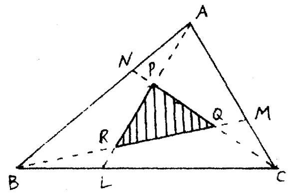
LA GEOMETRIA DEL TRIANGLE

Presentem avui la següent propietat del triangle:

TEOREMA DE ROUTH. Si trisectem els costats d'un triangle ABC, de manera que (CMA)=(ANB)=(BLC)=3, les cevianes AL, BM i CN formen un triangle PQR d'àrea 7 vegades més petita que la del triangle original.



La demostració analítica d'aquest sorprenent resultat no ofereix massa dificultats però es pot donar una demostració més elegant: Traçem desde B paral.leles a PQ i PR i denotem T i S les interseccions amb PQ i PR respectivament (veure fig.1). Ara, S (i per tant B), pertany a la xarxa plana determinada per A, T i P, doncs (APS)=(ANB)=3. Igualment, si desde C traçem la paral.lela a PR i denotem V a la intersecció amb BS, es té que (BSV)=(BLC)=3 i per tant V i C pertanyen també a la xarxa.

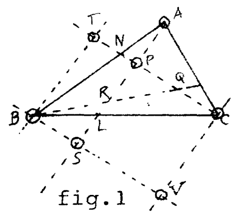


fig.1

Ara, si denotem R' el punt de la xarxa entre P i S i M'=BR'∩AC, com que CS és paral.lela a BR' es té (AM'C)=(AR'S)= =3/2=(AMC), per tant M=M' i R=R', d'on R i Q també pertanyen a la xarxa.

Finalment, si prenem com a unitat d'àrea la del triangle ATP, el quadrat UBVW (veure fig.2) té àrea 18, el triangle PQR té àrea 1 i ABC té àrea 7 doncs la part ratllada té àrea 3+2+6 = 11. q.e.d.

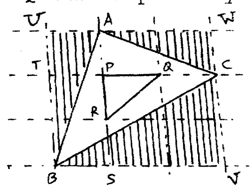


fig.2