LA GEOMETRIA DEL TRIANGLE

El problema de minimitzar la suma de tres distàncies es coneix com "problema de Fermat" i pot enunciar-se com:

Donat un triangle ABC d'angles aguts, trobar un punt P de manera que la suma de les distàncies PA, PB i PC sigui mínima.

L'existència de P és gairebé evident (la unicitat la proposem als lectors amb esperit crític): prenem un punt P qualsevol a l'interior del triangle i fem girar 60° el triangle APB amb centre B, obtenint A'P'B. És clar que els triangles ABA' i PBP' són equilàters i que es té

$$AP + BP + CP = A'P' + P'P + PC,$$

essent aquesta última expressió el camí de A' a C. En conseqüència, el punt de Fermat és el que fa que A', P', P i C estiguin alineats; en aquest cas:

$\widehat{BPC} = 180° - \widehat{BPP'} = 120°$ i

$\widehat{APB} = A'\widehat{P'}B = 180° - P\widehat{P'}B = 120°$.

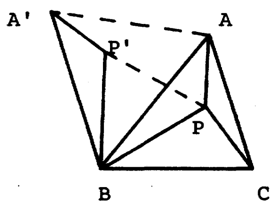

figura 1

És a dir que el punt de Fermat és aquell que fa que els angles BPA, BPC i APC siguin tots de 120°. Una construcció senzilla de P pot fer-se prenent el punt d'intersecció de la recta A'C amb la circumferència circumscrita del triangle equilàter ABA' (fig.1).

Un fet interessant, conseqüència d'aquesta construcció és el següent: construïm sobre cada costat del triangle ABC un triangle equilàter (figura 2); aleshores els segments AA', BB' i CC' són iguals, es tallen en el punt de Fermat i formen entre ells angles de 60°.

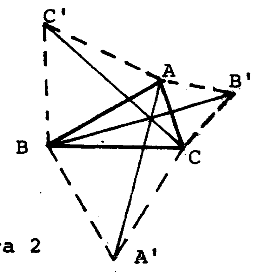

figura 2