SITUACIÓ DE L'ENSENYAMENT DE LA GEOMETRIA ENFRONT DE LES NOVES TENDÈNCIES DE L'EDUCACIÓ MATEMÀTICA.

Lluis A. Santaló

(Estret de la "Revista de Bachillerato", suplement del nº 13).

1. El Problema

Quan es tracta d'establir nous curricula per a l'ensenyament mitjà, apareix sempre el problema de la Geometria. Al nivell elemental el problema no apareix, ja que en general hi ha assentiment en que ha d'ésser una geometria intuitiva o geometria física, més o menys estesa, però els continguts de la qual són prácticament acceptats per unanimitat; hi pot haver canvis en la metodologia i la didáctica, però molt pocs en els continguts.

Al nivell superior el problema tampoc és greu. Com que a aquest nivell la població estudiantil ja s'ha dividit en especialitats, cadascuna d'elles té la seva geometria. En general, la geometria en coordenades és la base comuna a totes les especialitats. Per als estudiants de la llicenciatura en Ciències Matemàtiques o per als futurs Professors d'Ensenyament Mitjà, el tractament de la Geometria a partir dels espais vectorials i l'àlgebra lineal no ofereix problemes. Aquest estudi sol completar-se, a més a més, amb algun curs o seminari sobre Fonaments de la Geometria, seguint els clàssics "Fonaments" de D. Hilbert (8),el "Programa d'Erlangen" de F. Klein (10), o algun tractament més modern com el de F. Bachmann (1) o de L.M. Blumenthal (2), o els excel. lents i ben coneguts llibres de G. Choquet (4) o J. Dieudonné (5).

Però respecte als continguts i metodologia de la geometria a l'ensenyament secundari, sobretot en el primer cicle, entre les edats de 12 i 16 anys, no s'aconsegueix cap consentiment mitjanament general. A "Noves tendències en l'Ensenyament de la Matemàtica", vol. III, publicat per l'U.N.E.S.C.O. el 1972 hom llegeix: "La concepció moderna de l'ensenyament de la Geometria segueix

subjecta a noves investigacions pedagògiques i l'establiment d'un programa acceptable per a ella és actualment un dels problemes curriculars més difícils". Passats set anys, la situació és més o menys la mateixa.

2. Les causes

El problema ha fet crisi a la Geometria, per ésser on presenta les característiques més acusades, però l'essència del problema es troba a totes les branques de la Matemàtica.

(Es tracta d'una confusió, difícil de clarificar, entre la Matemàtica com a creació superior, com a matèria de recerca entre matemàtics professionals, per a la que s'ha de buscar i exigir una total coherència, sistematització i rigor, i la Matemàtica com a disciplina formativa i informativa, que ha d'ésser ensenyada a alumnes d'una edat variable entre 12 i 16 anys, que tenen vocacions diferents i capacitats de comprensió i de raciocini limitiades per llur edat i condicionades per llur vocació.)

Hom ha pretès que les exigències de rigor i de coherència es mantinguessin al mateix grau per a qualsevol edat i qualsevol alumne, i això no és possible. Els alumnes d'Ensenyament Mitjà són molt variables i s'ha de buscar un denominador comú que sigui útil i comprensible per a la majoria, sens perjudici de que, quan sigui possible individualitzar l'ensenyament, es vagi desvetllant als alumnes de més gran temperament matemàtic els enganys d'algunes definicions i les possibles crítiques a alguns axiomes adoptats.

Hom ha confós obres de recerca, a vegades d'innegable valor matemàtic, escrites per a matemàtics i a vegades només comprensibles per ells en llur veritable significat, malgrat dir-se "elementals" i no suposar coneixements previs, amb llibres de text per a "aprendre" matemàtica, destinats a alumnes que volen iniciar-se en la matemàtica. (És molt comú l'error de creure que els "fonaments" d'una ciència, pel sol fet de partir de zero, són la part més fàcil i senzilla i que han d'ésser el punt de partida per al seu estudi. La realitat no és així, la fonamentació sol ésser la part més difícil d'una ciència i, en general, ha estat sempre feta per espacialistes de llarga experiència i no ha

pres forma fins etapes molt avançades de la teoria. Per a poder baixar l'estudi dels fonaments als primers nivells de l'ensenyament fa falta adaptar-los a la capacitat d'aprenentatge juvenil, adaptació sempre difícil i en el cas de la geometria pràcticament impossible de realitzar.)

El problema ve de lluny. Els "Elements" d'Euclides foren dirigits a especialistes, els únics que podien entendre la genialitat del seu sistema axiomàtic. (A la gran majoria, inclosos científics i àdhuc matemàtics no massa abstractes, els interessava, més que la construcció d'Euclides, teoremes com els de Thales o de Pitàgores, els políedres de Plató, la trigonometria de Ptolomeu o les còniques d'Apoloni.)

Nogensmenys, enlluernats per l'aparent senzillesa dels "Elements", els matemàtics dels segles posteriors els van agafar com a textos per aprendre Geometria. El resultat fou que, llevat d'execpcions de precoços genis, la majoria aprenia de memòria el "pons asinorum" i es quedava sense comprendre la necessitat de les elaborades complicacions per a demostrar teoremes que eren per a ells evidents d'entrada. L'exímia pruïja d'Euclides de no sortir-se dels cinc postulats i àdhuc de retardar l'ús del cinquè el més possible, encara que això l'obligués a complicar i allargar les demostracions, és admirable creació d'un geni i motiu de plaer i d'admiració per als temperaments matemàtics. Però a l'ensenyament, dirigit a alumnes normals i a formar individus d'una societat heterogènia, en què el geni i àdhuc el matemàtic professional és excepció, fan falta textos normals i didàctiques adaptades a la majoria.

És una experiència universal que els textos "dolents" es venen més que els "bons". És una lamentable, però lògica, conseqüència de confondre "bondat" amb exquisitat o preciosisme. El secret està en buscar llibres bons per a l'edat dels alumnes als que van dirigits i per la finalitat de l'ensenyament, no llibres bons per als matemàtics investigadors que els miren a través de la lupa dels seus coneixements. En aquest cas, cal jutjar-los com treball de recerca, no com obra de text.

El mateix va esdevenir-se, vint-i-tres segles més tard, amb els "Grundlagen" de Hilbert, obra magistral, plena d'idees que van donar lloc a nombrosos treballs de recerca, per tal d'a-

clarir i discutir les moltes geometries possibles basades en l'elecció, l'afegiment i la supressió d'alguns postulats. També en aquest cas es va voler adaptar l'obra a l'ensenyament secundari i van aparèixer textos amb postulats "a la Hilbert" formant barreges pesades i indigestes, sense utilitat ni rigor, ja que al retallar l'obra de Hilbert hom destruia tota la seva magistral concepció. Altre cop es va confondre la recerca amb la didàctica. El mot "fonaments", com el mot "elements" en el cas d'Euclides, va fer creure que allò superior era elemental i que les idees dirigides a matemàtics professionals podien ésser transferides, amb algunes retallades a cegues, als centres d'ensenyament mitjà. El resultat fou una Geometria en la pseudofonamentació de la qual es perdia temps i es confonia als alumnes. Però, al menys, es van conservar alguns teoremes i propietats i alguns raonaments i deduccions "locals" que mantenien l'interès i educaven en el joc del quefer matemàtic.

3. La revolució dels anys seixanta

(Quan es va estendre pel món la aleshores dita Matemàtica Moderna, al voltant del 1960, es va voler introduir a l'ensenyament secundari qüestions que havien resultat extraordinàriament útils al nivell superior. Fou una necessitat evident, i en mitjana, es pot dir que la reforma fou un èxit a tot arreu. Hom introduí idees i metodologies bàsiques que prepararen als alumnes molt millor que abans, per a poder fer cara a les novetats científiques i tecnològiques que des dels claustres universitaris van descendir a les escoles secundàries.)

(En tota la part algebràica la reforma va anar bé i si hi va haver petits abusos, foren fàcilment esmenables. Però a la geometria va tornar a passar el fenomen tradicional. Es va intentar fer l'impossible d'una construcció rigurosa i impecable de la Geometria sense sortir-se del nivell elemental ni de la capacitat d'aprenentatge dels alumnes i, com que això és impossible, es va optar, dràsticament, per suprimir la Geometria o traslladar-la a l'àlgebra lineal, amb la pèrdua total de les seves característiques de bellesa i harmonia pròpies, que l'havien anat adornant desde l'antigor.)

4. Alguns exemples

Per tal de posar el fenomen de manifest, anem a aclarir-lo amb alguns exemples.

a) "La línia recta". Desde Euclides es va intentar definir la línia recta. Les definicions resultaren sempre inacceptables i es es va optar per considerar la idea de recta com una "idea primitiva", que els alumnes tenen intuitivament desde la infantesa i amb la qual no s'equivoquen mai a l'utilitzar-la.

Per sort, aquesta posició s'ha mantingut bastant generalment a l'Ensenyament Mitjà, però sempre amb un cert desgrat dels professors o autors de programes, que ho han considerat com un defecte que s'havia d'amagar o d'esmenar, procurant d'alguna manera introduir a l'Ensenyament Mitjà alguns dels camins que s'utilitzaven a la universitat (aquí, amb tota la raó); per exemple: (a) Seguir a Hilbert i dir que "existeixen elements dits rectes" o bé per tal de seguir l'ortodòxia conjuntista "un pla es un conjunt dotat d'una estructura donada per un conjunt de parts dites rectes" (Choquet (4)). (b) Esperar fins que s'estudiin els espais vectorials sobre els reals i aleshores definir les rectes com les "varietats lineals la direcció de les quals és una recta vectorial" (Dieudonné (5)).

Per tal d'evitar els espais vectorials s'han donat altres definicions, per exemple la següent, que va donar lloc a moltes discussions a les escoles franceses al voltant del 1970: "Es diu recta a un conjunt D d'elements, dits punts, dotat d'una bijecció g de D sobre els reals R i de totes les bijeccions f que es dedueixen de g de la següent manera: qualsevol que sigui el número real a, es té, o bé $f(M) = g(M) + a$, o bé $f(M) = -g(M) + a$ (M és un punt arbitrari de la recta). La família de bijeccions es diu una estructura euclidiana".

(La nostra pregunta és: al nivell de l'escola mitjana qualsevol d'aquestes definicions, serveix per aclarir a l'alumne la idea que ja té de recta? Li ensenyen a raonar? Pensem en alumnes en ple desenvolupament intelectual, àvids de novetats i desitjosos d'entendre el món i àdhuc els mecanismes del raonament lògic, però sense formació prèvia per a comprendre les subtileses dels matemàtics formats.)

b) "Definició d'angle". Desde fa bastant de temps un greu problema que ha espantat als professors de matemàtica de l'ensenyament secundari i als responsables dels seus curricula ha estat el concepte d'angle. Cal senyalar, essencialment, dues dificultats:

1) Suposem angles més petits de 360. Si hom vol ésser conseqüent amb l'opció conjuntista de l'ensenyament, cal definir-los com intersecció de semiplans. Però quan apareix el producte escalar de vectors i la trigonometria, es necessari definir una orientació i aleshores es passa a la definició d'angle com a parell ordenat de semirectes. Cal, aleshores, o bé deixar ambigua la situació i no furgar en la diferència (que és dolent) o bé donar noms diferents a les dues coses. En general hom diu "angles sectorials" o "sectors angulars" als primers i "angles orientats" o simplement "angles" als segons (veure, per exemple, W. Servais (14) o Dieudonné (5, pàg. 81)). Això és, lògicament i matemàtica, correctíssim, però no farà que l'alumne cada cop que es trobi amb un angle (angle de dues rutes en un mapa, angle de les agulles del rellotge, angle a una figura o dibuix geomètric, angle visual o d'incidència i de reflexió dels que li parla el professor de física) sentir el dubte de si es tracte d'un angle orientat o d'un angle sectorial? Amb aquesta distinció nascuda de la pruïja de no escapar-se de l'ortodòxia conjuntista, s'haurà aclarit en la ment de l'alumne la idea que ell necessita d'angle per a la seva vida al carrer i per a la comprensió de les altres disciplines científiques de l'escola i àdhuc de la mateixa matemàtica? Se li haurà ensenyat a raonar millor?

2) Més greu és, encara, la segona dificultat, referent a la "mesura" d'angles. És evident que des del punt de vista geomètric pur, un cop dibuixat un angle, si hom no diu res més, és impossible assignar-li una mesura superior a 360. Com diu Dieudonné (5, pàg. 19), una recta no pot recordar si ha donat vàries voltes al tenir una determinada posició. Per tant, els angles han de "mesurar-se" mòdul 360º. Per tant s'han d'acceptar afirmacions tals com "la suma dels angles interiors d'un quadrat és zero" i la més general de Papy (13, pàg. 314) "la suma dels angles interiors d'un polígon ordenat és igual a zero, si el nombre de costats és parell, i igual a 180 si el nombre de costats és senar".

Tot això és correcte i posssiblement necessari des del punt de vista purament geomètric i àdhuc algebraic (Dieudonné (5, pàg. 162)). (El concepte precís d'angle i la seva mesura va lligat a la funció exponencial complexa i a la seva superfície de Riemann d'infinites fulles. Tot això el professor ho ha de saber, però també ha de saber callar-ho quan es dirigeix als alumnes de l'escola secundària.) L'alumne sab molt bé que els costats d'un angle no tenen memòria, però entenen també molt bé que un d'ells pot haver donat moltes voltes i que aquestes poden donar-se per múltiples enters de 360º. Així procedeix el professor de física i així s'actua a la vida real. Dir a l'alumne que la suma dels angles interiors d'un triangle val el mateix que la dels d'un pentàgon no creiem que l'ajudi gaire a aclarir les seves idees ni la seva manera de raonar. Com a màxim ho entendrà i ho agafarà com un joc que repetirà en els exàmens, però que estarà ben segur de no aplicar mai si ha de sumar algun cop els angles del polígon que delimita un camp o una habitació de casa seva.

A l'escola secundària, la matemàtica no pot formar mai un compartiment tancat, aïllat del món, com una terra en la que només hi caben elucubracions per a exquisits. A l'alumne li interessa més aprendre coses per a la vida i agilitzar el seu raonament per a resoldre situacions reals que se li puguin presentar o que pot entendre dins de la matemàtica, que no pas fines subtileses, obligades per l'encaparrament de no sortir-se d'una determinada opció i fer una ordenació lineal perfecta de tota la geometria. Les regles "dels tres dits" o del "tirabuixó" per tal de definir una orientació a l'espai no són matemàtiques però ensenyen molta matemàtica i serveixen per avançar conceptes que dins de la matemàtica pura apareixen molt més endavant, de manera sofisticada i que no s'ha de pretendre que estiguin a l'abast de la majoria dels alumnes, que no van a ésser matemàtics professionals.

Aquestes dificultats en definir l'angle, importants a un nivell superior, han fet que al programar curricula d'Ensenyament Mitjà es procedís amb temença. En la majoria de textos es procura no esmentar angles superiors a 360º i àdhuc d'aïllar tot esment als angles sota un cinturó de seguretat. Com diu Choquet

(4):"...observem que hem pogut construir còmodament gran part de la Geometria sense parlar mai d'angles" i Dieudonné (5, pag. 19): "Veurem en aquest llibre que tot el que pertany pròpiament a la Geometria euclidiana del pla, des del punt de vista algebraic és enterament independent de tota "mesura" d'angles per números reals". Magnífics "tours de force" que han d'ésser, segurament, admiració i delectació de matemàtics entesos, però que difícilment tindran valor pedagògic al nivell que estem considerant. És com el cas d'Euclides, que en els seus "Elements" va retardar tant com va poder l'ús del seu cinquè postulat, donant exemple de pregona sagacitat matemàtica, però el fet fou de poca importància, més aviat va perjudicar als qui volien iniciar-se en l'estudi de la Geometria.

c) "Àrea del triangle esfèric" El concepte d'àrea d'una superfície (no desenvolupable) només es pot definir amb rigor quan hom disposa dels coneixements del càlcul avançat. Prou que ho van demostrar els matemàtics del finals del segle passat, principalment H. Lebesgue en la seva fonamental memòria de 1902 (11).

Es tracta d'estudis pregons, que el professor de matemàtiques ha de conèixer, però que poden i deuen ésser ignorats al nivell secundari ja que és difícil, o impossible, que siguin entesos a aquesta edat. Si les dificultats per definir l'àrea d'una superfície van passar desapercebudes durant més de vint segles als matemàtics més il.lustres, és difícil que puguin ésser enteses pels alumnes de l'escola mitjana. Nogensmenys, aquestes dificultats han fet desaparèixer dels programes alguns temes sobre geometria de l'esfera que abans es donaven i que són importants tant des del punt de vista formatiu com de l'informatiu de l'alumne.

Per exemple, el valor de l'àrea del triangle esfèric ha desaparegut de la majoria dels programes. No hi cap dins de l'àlgebra lineal i la definició precisa d'àrea és difícil; per tant s'ha de suprimir el tema. Nogensmenys, es tracta d'un resultat ben senzill, de demostració enginyosa i quasi trivial, que ensenya a raonar sobre l'esfera, com a primer exemple d'espai no pla, que atrau l'atenció de l'alumne per la seva inesperada simplicitat i que li fa veure que no tota la matemàtica és lineal.

El fet de que l'àrea estigui determinada per la suma dels angles i que, per tant, sobre l'esfera no pugui parlar-se de semblança, és extraordinàriament instructiu i és el millor camí perquè l'alumne albiri la possibilitat d'una geometria no euclidiana, tema sobre el qual, culturalment almenys, cal que l'alumne rebi un mínim d'informació.

d) "El toerema d'Euler sobre els políedres". Amb el prejudici de pensar sempre en mantenir un rigor a ultrança i una conseqüència inflexible amb la teoria conjuntista, la definició de políedre o de superfície polièdrica a l'espai, troba dificultats. El desenvolupament de la topologia algebraica les va posar de manifest.

Aquestes dificultats, clares i inevitables a nivell superior, van repercutir desfavorablement al nivell secundari. Com que no es podien evitar, es va optar per suprimir tota la geometria de l'espai, o reduir-la a les primeres propietats afins, que són les més òbvies i menys interessants. Ha desaparegut dels programes, per exemple, el teorema d'Euler sobre els políedres, que en els casos usuals és de demostració elemental i que tant interès té des dels punts de vista estètic, cultural i utilitari. La seva vinculació amb la connexió dels políedres i per ésser el primer exemple d'invariant topològic, justifiquen la seva introducció en els programes des del punt de vista estrictament matemàtic i el seu ús en la teoria de grafos el justifica des del punt de vista utilitari. Nogensmenys, ha estat pràcticament exclòs de tots els programes per por que en la definició de políedre (concepte que és evident a l'alumne) s'escapi alguna falla que, altre cop, apareixi sota la lupa inquisitòria del matemàtic professional.

Quelcom de semblant ha passat amb els políedres regulars, una de les adquisicions més boniques de la matemàtica grega, l'estudi dels quals apareix actualment traslladat al nivell superior per als especialistes o estudiants dels grups finits de rotacions de l'espai. Això, com diria F.Klein, ajuda a la comprensió "des d'un punt de vista superior" i ha d'ésser conegut pel professor, però el punt de vista superior ha d'ésser centre de projecció sobre altres nivells, on es troben els alumnes d'ensenyament

secundari, que no poden elevar-se a aquestes altures, però que no per això han de deixar-se en la ignorància de teoremes culturalment bàsics.

d) "Geometria afí i geometria mètrica". No hi ha cap dubte que pensant en la matemàtica com una construcció intel.lectual, edificada sota un estricte ordre de complexitat creixent, la geometria afí apareix abans que la mètrica. Les seves regles són més simples i es conserven més fàcilment en les deduccions i, a més a més, el posterior o simultani pas als espais vectorials és més fàcil. (La geometria afí s'algebritza linelament).

(Però, és útil aferrar-se a aquesta ordenació per postergar i considerar com una mena de tabú l'ús a classe de les propietats mètriques que l'alumne utilitza constantment al carrer?).

La ment no adquireix els coneixements per estricte ordre creixent de dificultat. Pretendre seguir una ordenació perfecta a l'ensenyament, és com voler iniciar l'alimentació dels nens amb els productes químics més simples, per tal de seguir l'ordre lògic en què s'estructuren a la química. Tant l'estómac com la ment actuen a salts, i en el cas de l'ensenyament de la matemàtica el que cal fer es seguir l'ordre amb el qual els conceptes s'assimilen més fàcilment i l'alumne practica amb més gust i amb més intensitat la gimnàstica de la deducció lògica, que pot ésser diferent de l'ordre amb què els matemàtics ja formats han estructurat llur ciència. És un problema en què ha de pesar més l'opinió dels psicòlegs que la dels matemàtics.

No és gens evident que la perpendicularitat, que és "local", sigui més difícil d'entendre per l'alumne que el paral. lisme, que necessita es pla de l'infinit. L'alumne entén més la circumferència, que pot dibuixar i depèn de menys paràmetres, que l'el.lipse. És difícil, per a l'alumne, considerar com d'una mateixa classe totes les figures afíment equivalents. La congruència, en canvi, la utilitza contínuament en la seva vida de relació.

Per tant, encara que la geometria mètrica és quadràtica i més difícil d'axiomatitzar que la geometria afí, una obsessió per mantenir-se dins d'aquesta última per tal d'ésser coherent i

i "conseqüent", és sens dubte molt interessant per al matemàtic, però costa creure que sigui un bon mètode didàctic.

Hi ha transformacions geomètriques, com la inversió, que no són afins i que per això han desaparegut de l'escola mitjana, malgrat llur utilitat, encara que només sigui per a mostrar que la geometria no s'acaba amb les transformacions lineals.

5. Resum

Amb els exemples anteriors hem volgut exposar l'opinió de que les dificultats en l'ensenyament de la Geometria al nivell secundari, que han motivat la seva supressió quasi total provenen de la pruïja de que l'ensenyament tingui una estructura lineal amb bases impecablement assentades, a partir de les quals tot es desenvolupi lògicament, sense possibilitat d'escapar-se de la "línia general" escollida. La construcció de la Geometria d'aquesta manera pot tenir molta importància, i moltes vegades la té, des del punt de vista acadèmic, però no està tan clar que sigui igualment important des del punt de vista de l'aprenentatge. Entre les edats de 12 a 16 anys l'alumne ha d'aprendre moltes coses, i no és dolent que conegui diferents mètodes i diferents punts de partida. Hom no ha de polaritzar-se en cap opció. En qualsevol d'elles es pot aprendre a raonar i exercitar la deducció lògica. La complicació excessiva per tal de no sortir-se d'un camí prefixat no creiem que sigui pedagògicament recomenable, sense voler amb això discutir el seu valor matemàtic, que pot ser gran.

6. Frases modernes

Sense pretendre involucrar als autors en les opinions anteriors, però per tenir certa vinculació amb elles, anem a citar unes frases de dos il.lustres matemàtics francesos, René Thom, crític de la dita matemàtica moderna, i Jean Dieudonné, fervorós partidari i un dels seus principals propulsors, i d'un prestigiós especialista alemany en la didàctica de la matemàtica, Arnold Kirsch, que va donar una de les conferències principals al Congrés de Karlsruhe l'any 1976.

Diu René Thom (16): "Només s'arriba al rigor absolut, eliminant significat... i si s'ha d'escollir entre rigor i significat, escolliré aquest darrer. És l'elecció que s'ha fet a metemàtiques, on quasi sempre es treballa en una situació semiformalitzada, amb un metallenguatge que és la parla ordinària, no formalitzada". "La tendència modernista representa un augment de la cultura en detriment de la natura; en l'estricte significat del mot, un preciosisme. Però si el preciosisme té a vegades un cert encant en l'art i la literatura, pot no tenir-lo en matemàtica".

Diu Jean Dieudonné (6): "El professor de matemàtica que ha d'ensenyar a aquest nivell (es refereix al secundari superior o primer any d'Universitat) ha de frenar tant com pugui els seus gustos i tendències de matemàtic pur, i procurar que els resultats i mètodes que tracti estiguin prop de la realitat sensible i susceptibles d'aplicacions tan inmediates com es pugui. Es pot deplorar aquest aspecte "utilitari" però és exigit per la composició mateixa dels alumnes". I referint-se a l'Anàlisi, però amb paraules igualment aplicables a la Geometria, diu: "Un abús de l'axiomàtica, és el de voler deduir d'un sistema immutable d'axiomes, els teoremes més intuïtius de l'anàlisi. Per als principiants crec que n'hi ha prou amb limitar-se a enunciar aquests teoremes de la manera més precisa possible i indicar que poden ésser demostrats a partir dels axiomes dels números reals, però sense intentar donar aquestes demostracions que, a aquest nivell, no poden aportar res útil als estudiants".

Arnold Kirsch, en el Congrés de Karlsruhe (1976), diu (9): "Estem en contra de la tendència, molt estesa, de desenvolupar la matemàtica "ab ovo" o de retrocedir al principi i començar de bell antuvi sense suposar res conegut, tendència que es troba no només en matemàtics sistematitzadors (quan, per exemple, diuen a llurs alumnes que s'oblidin de tot el que han après a l'escola), sinó també en didàctics d'orientació genètica... Nosaltres preferim animar als alumnes a fer ús de llurs coneixements previs, àdhuc dels que procedeixen de camps aliens a la matemàtica... Els alumnes tenen una experiència considerable que pot ésser usada a la geometria elemental. En particular, pensem en la familiaritat que tenen amb l'existència i propietats de les mesures de

longitud, angle i àrea. Aquesta familiaritat procedeix de fora de les classes de matemàtica i a vegades de fora de l'escola, la qual cosa hem de considerar com una situació particularment afortunada. Avui no es pot insistir més en voler desenvolupar la geometria elemental de manera completament rigurosa, i va entrant el costum de fer ús d'aquestes mesures sense cap comentari previ".

7. Història antiga

Diu la llegenda que els pitagòrics (segle VI abans de J.C.) en descobrir l'existència dels irracionals, es van juramentar perquè aquest coneixement no transcendís al públic, sota pena de mort per aquell que ho delatés.

Una manera d'interpretar la llegenda és suposar que els pitagòrics, zelosos custodis dels números, van creure que aquest coneixement, posat en mans d'homes comuns, que feien llurs transaccions comercials, llurs mesures topogràfiques i llurs construccions arquitectòniques o navals utilitzant només números racionals, sentissin de cop i volta angoixa i terror per la inexactitud de llurs procediments i paralitzessin l'acció.

Van comprendre que era una descoberta per a iniciats i no van intentar exposar-ho a nivells inferiors on es conreava la matemàtica pràctica de lèpoca.

Van passar més de vint segles fins que es donaren definicions riguroses del número real, però això no va impedir que la matemàtica progressés i arribés als nivells a què la van elevar matemàtics com Euler, Gauss i Cauchy, per citar només els moderns.

Els matemàtics actuals han posat de manifest moltes exquisitats en el fonament de llur ciència. Això significa un immens progrés. Però, s'ha de pensar, com els pitagòrics, que la pretensió de posar aquestes descobertes en coneixement dels principiants pot perjudicar-los més que ajudar-los. Així com la matemàtica va seguir, després d'haver descobert els irracionals, àdhuc sense haver-los definit bé, també la Geometria actual, als seus nivells elementals, pot seguir saltant-se els fonaments, amb la confiança de que aquest fonaments estan zelosament guardats pels matemàtics professionals, que prou es cuidaran d'evitar qualsevol desviament.

La dificultat d'exposar elementalment els fonaments de la Geometria no pot ésser motiu perquè desaparegui o es traslladi íntegrament als espais vectorials. La geometria, en el sentit clàssic del mot, construint si cal ponts que evitin les seves escletxes inicials, pot oferir molt com a gimnàstica raonadora i com a dipòsit d'exemples que ajudin a comprendre el món, la matemàtica i les ciències naturals. Citem, com a exemple, el llibre de múltiples enfocaments de H.S.M.Coxeter (3) o el més específic de H.W.Guggenheimer (7), dels quals s'en poden treure excel.lents temes per a ésser tractats a l'escola secundària.

BIBLIOGRAFIA

1.- BACHMANN,F., *Aufbau der Geometrie auf dem Spiegelungsbegriff*, Springer, Berlin, 1959.

2.- BLUMENTHAL,L.M., *A modern view of Geometry*, *W.H.Fréeman and Co.* San Francisco and London, 1961

3.- COXETER, H.S.M., *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1961.

4.- CHOQUET,G., *L'Enseignement de la Géométrie*, Hermann, Paris, 1967,

5.- DIEUDONNE, *Algebre Lineaire et Géométrie Elementaire*, Hermann, Paris, 1969.

6.- DIEUDONNE, L'enseignement des mathématiques dans les classes superieures de l'école secondaire et ses rapports avec l'enseignement de mathématiques a l'université,IV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Caracas, 1975, Volum titulat *Educación Matemática en las Américas IV* Unesco, Montevideo, 1976, pàgs. 39-43.

7.- GUGGENHEIMER,H.W., *Plane Geometry and its Groups*, Holden Day, San Francisco, 1967.

8.- HILBERT,D., *Grundlagen der Geometrie*, *Leipzig*, *1899*. Traducció Castellana *Fundamentos de la Geometría*, Instituto Jorge Juan. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid 1953.

9.- KIRSCH, Arnold, *Aspects of simplification in Mathematics Teaching*, *"Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, Karlsruhe, 1976. pags. 98-120.

10.- KLEIN,F., *Vergleichande Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1877. Publicat també en els Mathematische Annalen, vol.43, 1893, pàgs. 63-100.

11.- LEBESGUE,H. *Integrale, longueur, area "Annali di Mat. Pura Appl"* vol. 7, 1902, págs. 231-309

12.- *New Trends in Mathematics Teaching, vol.III* UNESCO, Paris, 1972. Hi ha traducció castellana publicada per l'oficina Regional de la UNESCO per Amèrica Llatina, Montevideo, 1974.

13.- PAPY, *Matemática Moderna*, vol.III. Traducció castellna EUDEBA. Buenos Aires, 1970.

14.- SERVAIS,W., L'enseignement de la mathématique diversifié dans les classes superieures des écoles secondaires, *Educación Matemática en las Américas* IV, págs. 67-96. Oficina Regional de la U.N.E.S.C.O. per Amèrica Llatina, Montevideo, 1976 (Actes de la Conferència Interamericana d'educació Matemàtica de Caracas, 1975).

15.- La enseñanza comprensiva y moderna de la Geometria, *Conceptos de Matemáticas*, núm.37, Buenos Aires, 1976.

16.- THOM,R. *¿Existe la matemática moderna?* Conferència pronunciada en el 2º Congrés Internacional sobre Ensenyament de la Matemática, Exeter, 1972. Traduït a *Conceptos de Matemática*, Buenos Aires, núm.31, 1974, págs 5-12.