C U B   F O R U M

En el darrer Butlletí (el nº 7) al final del seu article, en Jaume Aguadé proposava obrir un CUB FORUM on tothom que ho desitgés pogués dir-hi la seva. Publiquem, avui, un munt d'idees que ens han tramès uns estudiants de segon de Matemàtiques de l'Autònoma.

Classificació de posicions imposibles

Qui conegui l'estructura interna del cub sabrà que es pot desmontar completament sense dificultat. Això planteja un problema: si el tornem a montar aleatòriament, podem trobar-nos amb la desagradable sorpresa de què quan anem per resoldre'l no surti de cap manera?

La resposta és afirmativa: és necessari posar molta atenció a com el montem.

- El problema que proposem és el següent: quina és la probabilitat de montar-lo malament si ho fem de qualsevol manera?

- Resolució:

Considerem el conjunt A de totes les configuracions possibles que admet el cub, comptant-hi les que no poden derivar de la posició "de botiga".

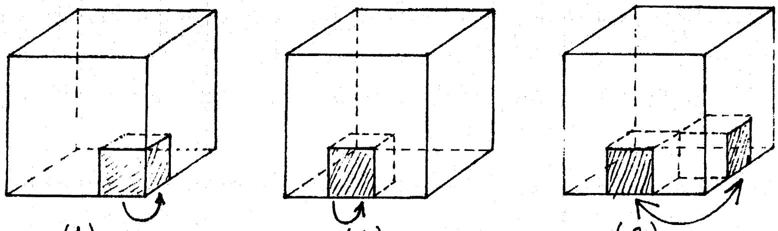
Definim una relació d'equivalència: dues configuracions seran equivalents quan existeixi una successió de moviments que passi de l'una a l'altra. Està clar que si no desmontem el cub, no sortirem mai d'una mateixa classe.

Es tracta de comprovar el següent:

$$A/\sim \text{ té 12 classes.}$$

a) La primera d'elles és la "de botiga".
b) Armats d'un ganivet, podem fer al cub les següents alteracions:
   1) Treure un vèrtex i tornar-lo a posar capgirat.
   2) Fer el mateix amb alguna de les 12 peces de dos colors.

3) Permutar (sense capgirar) dues d'aquestes peces



(1) (2) (3)

No resulta difícil per a aquell que conegui un xic el cub donar-se compte que en cap d'aquests cassos serà possible desfer l'alteració amb una successió de moviments. Tampoc es pot passar de l'una a l'altra. Són configuracions "no equivalents" d'acord amb el nostre criteri.

c) Amb un xic més d'imaginació es pot concloure que no hi cap més alteració possible. Això és: qualsevol configuració donada és equivalent a la "de botiga" o a una combinació de 1), 2) i 3).

Si no, es pot fer la prova. Qualsevol lector es pot entretenir en desmontar el cub, posar-lo de qualsevol manera i intentar resoldre'l. No tindrà cap dificultat en fer tot el següent:

- -Posar bé la cara superior.
- -Posar bé la banda central.
- -Posar al seu lloc els vèrtexs inferiors.
- -Orientar correctament al menys tres d'aquests vèrtexs.
- -Col.locar correctament al menys dues de les peces restants.

Només ara començaran els problemes. Si ensopeguem amb 1), 2) ó 3), ja no podem continuar. De tota manera, haurà quedat clar que no ha pogut passar res més que això.

Val la pena especificar què s'entén per "combinació" de les alteracions. Es poden donar simultàniament:

1 + 2 + 3	1 + 2	1 + 3	2 + 3
1' + 2 + 3	1' + 2	1' + 3	

(Evidentment, (1) admet dues variants no equivalents).

Cap d'aquestes és equivalent a una altra, i no n'hi ha més: per exemple, la posició 2 + 2 és equivalent a la de botiga (ben segur que moltes vegades el lector s'ha trobat amb que tenia el dau quasibé resolt, però hi havia dues peces col.locades al seu lloc i mal orientades).

- Si a les 7 classes anteriors hi afegim les 5 que ja tenien (1,1',2,3,0) tenim les dotze classes proposades.

Així doncs, la probabilitat de montar bé el cub és exactament:

$$1/12$$

<u>Conseqüència</u>: quantes configuracions diferents poden derivar de la posició de botiga?.

O, el que és el mateix: quants elements conté cada una de les classes de $A/\sim$?

És un càlcul senzill de combinatòria: si imaginem el cub completament desmontat, de quantes maneres el podem montar?

- Fixem la posició dels tres eixos estructurals. Si tenim en compte que tenim a la mà 12 peces de dos colors i 8 peces de 3 colors, dóna un total de:

$$12!\ 2^{12}\ .\ 8!\ 3^{8}$$

Això és: $2^{29}\ .\ 3^{15}\ .\ 5^{3}\ .\ 7^{2}\ .\ 11$

Ara, si tenim en compte que 1/12 d'aquest número correspon a posicions compatibles amb la de botiga, queda el resultat final:

$$2^{27}\ .\ 3^{14}\ .\ 5^{3}\ .\ 7^{2}\ .\ 11$$

Això és de l'ordre de: $4'3.10^{19}$.

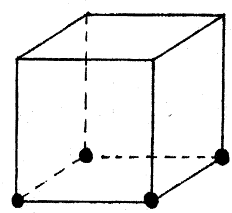
Valgui l'observació de que a la propaganda usual sobre aquesta joguina es menciona la xifra de 43 bil.lions. Com es pot comprovar, s'han quedat curts per un factor de 10^{6}.

L'orientació dels vèrtexs

Agafem el cub. Arreglem la cara superior. Arreglem la banda central. Posem al seu lloc cada un dels quatre vèrtexs de la cara inferior.

Fins aquí no hem hagut de rumiar gaire: és un procés més o menys lògic que qualsevol pot anar fent sense massa feina.

Ara ens enfrontem amb un problema: orientar degudament els quatre vèrtexs



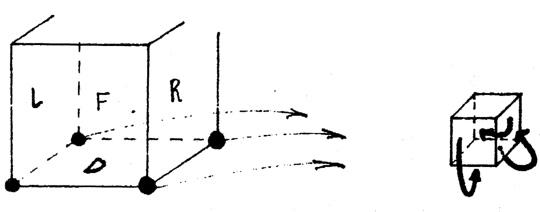
- Hi ha un mètode que exigeix poca memòria i un xic de càlcul:

Introduïm el moviment: $R^{-1}D^{-1}R\ D^{-1}R^{-1}D^{2}R\ D^{2}$

El seu fonament és senzill: treiem un vèrtex de la cara superior i el tornem a posar pel mateix camí, però perdent un temps entremig.

- Estudiem quins efectes té sobre els vèrtexs:

1) No espatlla absolutament res de les dues bandes que teníem ben col.locades.
2) No ha afectat al vèrtex (DLF) i ha fet rodar els altres tres de la mateixa manera:



fig

Això és: la faceta que teníem davant ha passat a dessota. (És obvi que aquest moviment té ordre 3).

- Mirem la posició de cada vèrtex. Notem amb 0,1,2 el nombre de girs que falten a cada un d'elles per estar en l'orientació correcta.

El nostre moviment respecta un dels nombres i mou els altres tres segons la regla:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & 1 \arrow[ll] \\ & 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A la pràctica, tindrem una configuració -per exemple- del tipus 0201. Es tracta de calcular quin dels quatre hem de fixar perquè amb pocs moviments poguem obtenir la configuració 0000. En el nostre cas podríem fer:

$$0\ \underset{\text{fix}}{\boxed{2}}\ 0\ 1 \rightarrow 2\ 2\ 2\ \underset{\text{fix}}{\boxed{0}} \rightarrow 1\ 1\ 1\ \underset{\text{fix}}{\boxed{0}} \rightarrow 0\ 0\ 0\ 0$$

- Amb un xic de pràctica es veu que el cub només pot presentar alguna de les següents configuracions:

0 0 0 0, 1 1 1 0, 2 2 2 0, 0 2 0 1, 1 2 2 1

tret, és clar, de canvis d'ordre.

Totes elles s'enllesteixen en menys de tres moviments del tipus descrit. Evidentment, cal en cada cas orientar degudament el cub per tal que el vèrtex que ens interessa fixar estigui en la posició DLF.

Una combinació curiosa.

El problema va començar, un cop resolt el cas principal, quan vàrem realitzar el moviment T2 H2V2. Es molt possible que altres persones hagin trobat aquesta curiosa combinació en la que podem veure que en cada cara es dibuixa un aspa on els daus que no són de la creu tenen el color complementari.

S'ens va acudir el següent: Com podem fer que un dau no tingui cap dels colors que tenen els daus dels seus costats.

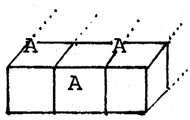
incloses, les diagonals? No és difícil treure els centres d'on són actualment, però això no soluciona el problema de les arestes, ja que aquestes encara coincideixen en diagonal.

Va ser necessari refer tota la posició. La mateixa combinació que s'obté fent T2H2V2 es pot obtindre fent THVTHV. A algú se li va ocòrrer de parar-se a THVT i veiem el que buscàvem:

A	C	A
D	B	D
A	C	A

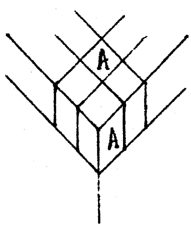
No hi ha dos cubs tals que els seus colors es toquin, ni tan sols en diagonal!

Arribats fins aquí se'ns va ocòrrer l'últim problema d'aquesta sèrie: Mirant certes arestes vèiem que:



Dos cubs adjacents comparteixen un mateix color encara que no estan en la mateixa cara. Vàrem plantejar el següent problema, que deixo a l'aire:

Es posssible que dos cubs adjacents no comparteixin ni un sol dels seus colors ni que es toquin en diagonal dins la mateixa cara? (una cara del vèrtex i el centre poden ser el mateix, però no poden estar a la mateixa cara).



Respecte a les possibilitats del "celo".

Un dia va sortir la idea de "què passaria si a partir d'una posició aleatòria col.loquèssim un "celo" sobre una aresta i un centre que ja estiguesin ben col.locats, i tractessim d'aconseguir la posició clàssica?" La resposta inmediata però gens raonada va ser, "completament impossible".

Actuant més com a físics que com a matemàtics ho vàrem provar. Es va col.locar la primera cara amb algun que altre entrebanc; la segona va comportar més dificultats; la tercera, cap ni una, gràcies a que els moviments no passaven per aquell punt. Vàrem arribar a la conclusió de què alguns moviments haurien de ser modificats per no fer-los passar pel punt que identificàvem.

Aleshores se'ns va plantejar el següent dubte: Serà possible sempre o depèn de la situació en el moment d'enganxar els cubs?

No sembla senzill el contestar aquesta pregunta, però vàrem raonar que si els moviments bàsics eren possibles, aleshores no depenia de la posició. Per moviments bàsics entenem els que surten a l'article d'en Jaume Aguadé del Butlletí nº 7.

Tots van ésser possibles!

No costa gaire de suposar que el següent pas va ser identificar una aresta i un vèrtex del seu costat. Es van comprovar els moviments bàsics i van resultar possibles. Com a conclusió final vàrem deduir que sempre era possible enganxar dos cubs.

Moltes altres possibilitats surten d'enganxar dues parelles diferentes de cubs.

Amb cara d'incrèduls ens vàrem preguntar:

Què passarà amb tres?

Hi ha quatre possibilitats:

a) Enganxar tota una línia central;
b) Enganxar dos centres junt amb l'aresta adjacent als dos;
c) Enganxar dues arestes amb el vèrtex adjacent a les dues;

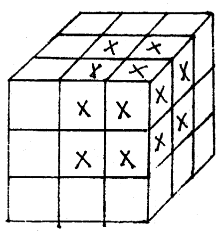
d) Enganxar dos vèrtexs amb l'aresta adjacent als dos.

Els tres primers casos van resultar ser possibles perquè permetien tots els moviments (alguns d'ells van haver de ser dràsticament modificats per a conseguir-ho). El quart segueix essent una incògnita, ja que si tenim la mala sort de que dos vèrtexs, quedin permutats després d'enganxar, no hem trobat cap moviment que ens permeti de col.locar-los correctament. Àdhuc més, partint de la posició bàsica i enganxant l'aresta ens ha resultat impossible el permutar vèrtexs. Evidenment això no prova res.

Enganxar quatre cubs ja ratllava l'idiotesa, però es va fer. Només es va examinar la possibilitat d'enganxar un centre, dues arestes que formessin angle recte i el vèrtex adjacent. Va resultar possible.

Amb això existeixen altres possibilitats que no han estat examinades, però que també poden ser possibles.

Combinant alguns dels moviments que acabàvem de trobar, vàrem veure que feien falta molt pocs moviments per aconseguir el final una vegada fixats els exigits. Gràcies a això vàrem suposar que seria possible d'enganxar els cubs del dibuix següent:



Es a dir, només deixem tres moviments de llibertat. És potser un dels actes de bogeria dels que parla en Jaume Aguadé en el seu article, o per el contrari, és possible?!

Carles Casacuberta

Emili Tarragó

Joan Carles Artés

Jordi Mas