GEOMETRIA HIPERBÒLICA: ELS SEUS MODELS

Joan Girbau

En la primera conferència d'aquest cicle us han explicat els diversos intents de demostració, al llarg de la Història, del cinquè postulat d'Euclides a partir dels altres axiomes i postulats sobre els que aquest matemàtic grec va fonamentar la seva geometria. Les diverses temptatives infructuoses de demostració varem conduir, a mitjan segle passat, com vareu veure a la primera conferència, a la construcció d'una geometria, anomenada geometria hiperbòlica, en la qual valien tots el axiomes i postulats d'Euclides, llevat del cinquè.

Jo intentaré avui, en aquesta xerrada, donar una idea d'aquesta geometria, restringint-me, per simplicitat, al cas de dues dimensions. No adoptaré pas un punt de vista històric, sinó que fonamentaré la meva exposició en els axiomes que va establir Hilbert a la darreria del segle passat i que, amb lleugeres variants, passo a enunciar tot seguit.

Existeix un conjunt P els elements del qual seran anomenats punts i un conjunt R els elements del qual seran anomenats rectes. Aquests conjunts estan subjectes a complir els se-

güents grups d'axiomes.

I.- AXIOMES D'INCIDÈNCIA

Existeix una relació entre els elements de $\mathcal{P}$ i els elements de $\mathcal{R}$ que anomenarem relació d'incidència. Si $A \in \mathcal{P}$ i $r \in \mathcal{R}$ estan relacionats per aquesta relació, direm que " A és incident amb r ", o bé que " A està sobre r ", o bé que " r passa per A ". Si donades dues rectes r i s existeix $A \in \mathcal{P}$ tal que A està sobre r i s, direm que r i s es tallen.

Aquesta relació d'incidència suposarem que compleix:

1) Donats dos punts A i B, (és a dir, dos elements de $\mathcal{P}$) existeix una única recta (és a dir, un únic element de $\mathcal{R}$) que passa per A i B.

2) Almenys hi ha dos punts sobre cada recta

3) $\mathcal{P}$ té almenys tres elements. Dit d'una altra manera, almenys hi ha tres punts.

II.- AXIOMES D'ORDRE

Si tres punts distints estan sobre una mateixa recta direm

que estan alineats. Suposarem que hi ha una relació ternària en el conjunt de punts alineats que escriurem A-B-C i que llegirem " B està enmig de A i C ". Aquesta relació suposarem que compleix:

1) A-B-C $\Rightarrow$ C-B-A

2) Donats A i B $\in \mathcal{P}$, existeix C $\in \mathcal{P}$ tal que A-B-C

3) Si A, B, C són tres punts distints alineats, un d'aquests punts està enmig dels altres dos.

<u>Definició</u>.- Donats dos punts A i B, el conjunt de punts que estan enmig de A i B, juntament amb els dos punts A i B, serà anomenat segment determinat per A i B i designat per $\overline{AB}$.

Aquesta definició ens permet d'enunciar el següent axioma, anomenat axioma de Pasch:

4) Donats tres punts A, B, C no alineats, si un segment a talla $\overline{AB}$ en un punt, llavors forçosament talla, o bé $\overline{BC}$, o bé $\overline{AC}$.

Utilitzant aquests axiomes es poden demostrar fàcilment, entre d'altres, els següents teoremes:

- Donats dos punts distints A i B, existeix sempre un

altre punt C tal que A-C-B.

- Donats dos punts distints A i B, el segment $\overline{AB}$ consta d'una infinitat de punts.

Podem definir ara el concepte de semirecta o raig, de la següent manera.

Si a és una recta i P és un punt que està sobre a, definim una relació d'equivalència en el conjunt dels punts de a distints de P dient que A i B són equivalents si, o bé A = B, o bé el segment $\overline{AB}$ no talla P. Es pot veure que a - questa relació divideix el conjunt de punts de a distints de P en dues classes d'equivalència, cada una de les quals s'anomena semirecta oberta. La reunió d'una d'aquestes semirectes obertes amb el punt P s'anomena semirecta o raig d'origen P.

D'una manera anàloga es pot definir la noció de semiplà. Donada una recta a, en el conjunt de punts que no són de a es defineix una relació dient que dos punts A i B són equivalents si, o bé A = B, o bé $\overline{AB}$ no talla a. Es pot veure que aquesta relació divideix el conjunt de punts que no són de a en dues classes d'equivalència, cada una de les quals s'anomena semiplà obert. La reunió d'un semiplà obert amb a s'anomena semiplà.

III.- AXIOMES DE CONGRUÈNCIA

En el conjunt de segments se suposa definida una relació binària que designarem per $\equiv$. Dos segments que compleixen la relació s'anomenen congruents. Se suposa que aquesta relació compleix:

1) Donats, un segment $\overline{AB}$, un punt A' i una semirecta r d'origen A', existeix un únic B' sobre r tal que $AB \equiv \overline{A'B'}$. En el cas particular de prendre $A' = B$ i la semirecta r que contingui A, s'exigeix $B' = A$, és a dir, $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.

2) La relació $\equiv$ és transitiva

3) (Axioma de la suma de segments). Donats A, B, C, A', B', C' tals que $A-B-C$ i $A'-B'-C'$, si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, llavors $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

<u>Definició d'angle</u>.- Dues semirectes h, k, d'origen un mateix punt 0, i que no pertanyin pas a una mateixa recta, es diu que constitueixen un angle, que es designa per $\widehat{h\,k}$. Si A es un punt de h i B un punt de k distints de 0, l'angle $h\,k$ es designa també per $\widehat{A\,0\,B}$.

En el conjunt d'angles se suposa definida una relació que designarem també per $\equiv$ i que llegirem "congruent". Se suposa que aquesta relació compleix:

4) Donats, un angle $\widehat{hk}$, una recta r, un punt 0 sobre r, un raig h' dels dos determinats a r per 0, i un semiplà s_1 dels dos determinats per r, existeix un únic raig k' d'origen 0 contingut a s_1 tal que $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$. A més, de manera anàloga a 1), s'exigeix aquí que $\widehat{hk} \equiv \widehat{kh}$. També s'exigeix aquí que $\widehat{hk} \equiv \widehat{hk}$.

5) Siguin A, B, C tres punts distints i A', B', C' tres punts distints. Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ i $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, llavors $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B}$.

Criteris de congruència de triangles

Tres punts A, B, C no alineats es diu que constitueixen un triangle que designarem per ΔABC. Dos triangles ΔABC i $\Delta A'B'C'$ direm que són congruents si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$, $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$ i $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$

Dels axiomes anterios es poden deduir els criteris usuals de congruència de triangles:

Criteri 1.- Si dos costats d'un triangle i l'angle comprès entre aquests costats són respectivament congruents a dos cos - tats d'un altre triangle i l'angle comprès, llavors els triangles són congruents.

Criteri 2.- Si un costat d'un triangle i els dos angles

adjancents són respectivament congruents a un costat i els dos angles adjacents d'un altre triangle, llavors els triangles són congruents.

Criteri 3.- Si un triangle té els seus tres costats congruents amb els tres costats d'un altre triangle, llavors els triangles són congruents. També es poden deduir teoremes com els següents:

Teorema 1.- Si en un triangle ΔABC es compleix $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ (triangle isòsceles), llavors $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$.

Teorema 2.- Dos angles oposats pel vèrtex són congruents.

S'anomena angle recte a tot angle congruent amb el seu adjacent suplementari. Es pot demostrar, a partir dels axiomes, que tots els angles rectes són congruents. Es poden demostrar també a partir dels axiomes els següents teoremes:

Teorema 3.- Cada segment $\overline{AB}$ té un punt mig (és a dir, un punt C tal que $\overline{AC} \equiv \overline{CB}$)

Teorema 4.- Tot angle $\widehat{h\,k}$ té una bissectriu (és a dir, una semirecta q del mateix origen que h i k tal que $\widehat{h\,q} \equiv \widehat{q\,k}$).

Teorema 5.- Des d'un punt exterior a una recta existeix una perpendicular i una sola a la recta (dues rectes es diuen

perpendiculars si es tallen en angle recte).

Amb els axiomes descrits a I, II i III no es poden encara amidar segments ni angles. Per això s'han d'imposar els axiomes de continuitat.

IV.- AXIOMES DE CONTINUITAT

1) Axioma d'Arquímedes.- Siguin $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ dos segments qualsevols. Sobre la recta $\overline{AB}$ existeix un nombre finit de punts $A_0 = A, A_1, A_2 \ldots A_n$, tals que $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, $\ldots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$; els segments $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ són tots congruents a $\overline{CD}$ i, o bé B està enmig de A_{n-1} i A_n $(n \geqslant 1)$, o bé $B = A_n$ (Veure figura 1).

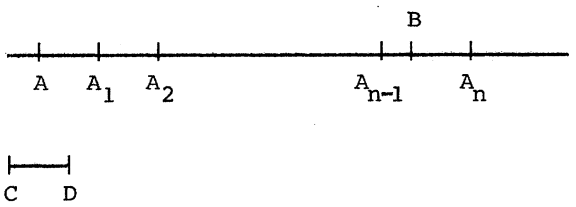

Figura 1

2) Axioma de Cantor.- Si tenim una infinitat de segments, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}, \ldots$, situats sobre una recta qualsevol de tal manera

que cada $\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ està a l'interior de $\overline{A_iB_i}$, llavors existeix un punt X que pertany a tots els segments. (Si $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ són dos segments sobre una mateixa recta, es diu que $\overline{CD}$ és interior a $\overline{AB}$ si tots els punts de $\overline{CD}$ són de $\overline{AB}$).

Els dos axiomes anteriors ens permeten definir la longitud de segments i la mesura d'angles pel procediment que esbossarem a continuació.

A cada segment $\overline{AB}$ li volem assignar un número real, $\ell(\overline{AB})$, que denominarem longitud de $\overline{AB}$. Per això elegirem un segment $\overline{OO'}$ que prendrem com a unitat. Siguin $A_1,\ldots,A_n$ els punts sobre la recta $\overline{AB}$ donats per l'axioma d'Arquímedes. Si $B = A_n$ definim $\ell(\overline{AB}) = n$. Si B està enmig de A_{n-1} i A_n el número real $\ell(\overline{AB})$ que volem definir diem que té part entera $n - 1$ i anem a definir la seva part fraccionària, la qual la donarem com un número real a comprès entre 0 i 1, expressat en el sistema de numeració de base 2. Hem vist abans que tot segment té un punt mig. Sigui P el punt mig del segment $\overline{OO'}$ que ens serveix d'unitat. Per comoditat, canviem els noms dels segments $\overline{A_{n-1}B}$ i $\overline{OP}$ i anomenem-los respectivament $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$. Apliquem l'axioma d'Arquímedes a aquests dos segments. Siguin $C_0 = C, C_1,\ldots,C_m$ els punts sobre la recta $\overline{CD}$ donats per aquest axioma. Si C_1 és anterior a D l'expressió de a comença així:

$$a = 0.1\ldots\ldots$$

En aquest cas tornem a canviar el nom de $\overline{C_1D}$ i anomenem-lo $\overline{CD}$. En cas contrari, l'expresió de a comença així:

$$a = 0.0\ldots\ldots$$

Tornem a dividir $\overline{EF}$ en dues parts iguals. Sigui P el punt mig i anomenem altra vegada $\overline{EF}$ al segment $\overline{EP}$. Tornem a aplicar l'axioma d'Arquímedes a $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ i el mateix criteri anterior ens diu ara si la segona xifra de a és 0 ó 1. Aplicant aquesta construcció reiteradament determinem a.

Així hem definit la longitud de qualsevol segment, una vegada elegit un segment $\overline{OO'}$ que ens serveix d'unitat. Es pot demostrar que aquesta longitud compleix les propietats següents:

1) $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ equival a $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD})$.

2) Si A-B-C, llavors $\ell(\overline{AB}) + (\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{AC})$

3) $1(\overline{OO'}) = 1$

A més, la longitud queda caracteritzada per aquestes propietats. Dit d'una altra manera, qualsevol construcció utilitzada per definir longitud porta al mateix resultat si s'imposa que la longitud que es defineix compleixi 1, 2 i 3 .

Una construcció anàloga es podria fer per mesurar angles si disposessim d'aixiomes anàlegs als d'Arquímedes i Cantor per angles. No obstant, uns tals axiomes no cal imposar-los ja que es poden deduir dels anteriors. Per tant, sabem també mesurar angles una vegada haguem elegit una unitat. Aquesta unitat s'escolleix de tal manera que un angle recte valgui 90 .

Tenim ara tots els elements necessaris per enunciar els dos teoremes següents que es poden deduir dels axiomes introduits fins ara.

Teorema 6.- La suma d'angles d'un triangle és sempre menor o igual que 180 .

Teorema 7.- Si dues rectes distintes a i b són perpendiculars a una tercera, c, (és a dir, tallen c en angles rectes) llavors a i b no es tallen .

En la primera conferència d'aquest cicle heu vist demostracions d'aquests teoremes que fàcilment podeu rigoritzar (és a dir, veure que es poden fer utilitzant només els axiomes anteriors).

Fins aquí no hem introduit encara cap axioma equivalent al cinquè postulat d'Euclides. La geometria que es pot fer només a partir dels axiomes anteriors s'anomena geometria "neutral". La geometria que es pot fer amb els axiomes anteriors més el cinquè postulat d'Euclides serà anomenada geometria euclidiana. La geometria que es pot fer amb els axiomes anteriors i el contrari del cinquè postulat d'Euclides serà anomenada geometria hiperbòlica.

Anem a veure això més detingudament.

V.- AXIOMES DE LES PARAL.LELES

El cinquè postulat d'Euclides es pot enunciar així:

E) Per un punt A exterior a una recta r passa una única recta r' que no talla r . Llavors r' i r es diuen paral.leles.

Aquest axioma el designem per E en honor a Euclides. La geometria que es pot fer amb els axiomes dels grups I, II, III i IV, més l'axioma E és la geometria euclidiana. Es pot demostrar (ho heu vist a la primera conferència), utilitzant només els axiomes dels grups I, II, III i IV, el següent resultat:

Teorema 8.- Si existeix un triangle tal que la suma dels seus angles és 180, llavors tots els triangles tenen la mateixa propietat i val l'axioma E . Recíprocament, en la geometria euclidiana la suma d'angles d'un triangle és 180 .

Enunciem ara el contrari de l'axioma E. Tinguem en compte, però, que per un punt exterior a una recta passa almenys una recta que no talla la primera, en virtud dels teoremes 5 i 7 . Això fa que la negació de E es pugui formular així:

L) Existeix una recta r i un punt A exterior pel qual hi passen almenys dues rectes r' i r" que no tallen r.

(Anomenem L aquest axioma en honor a Lobatchewski). La geometria que es pot fer amb els axiomes dels grups I, II, III i IV, més l'axioma L és la geometria hiperbòlica.

GEOMETRIA HIPERBÒLICA

Generalitats

Admetem a partir d'ara que es compleix l'axioma L. Això vol dir que existeix una recta r i un punt A exterior a r pel qual passen almenys dues rectes r' i r" que no tallen r.

Teorema 9.- Això es compleix també per qualsevol recta r i qualsevol punt A exterior a r .

Demostració.- Suposem que això no fós veritat per qualsevol recta i qualsevol punt exterior. Llavors existiria una recta r i un punt exterior A tal que per A passaria una única recta r' que no tallaria r. Sigui a una recta qualsevol que passi per A, distinta de r' (figura 2), a tallarà r.

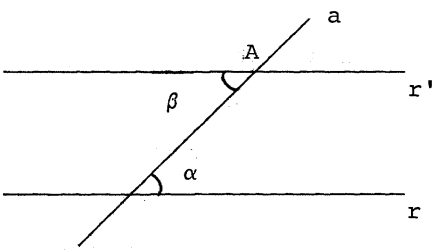

Figura 2

Anem a veure que els angles α i β alterns interns que a forma amb r' i r són iguals. Si no, tracem per A una recta b que formi amb a un angle α (figura 3). b no pot tallar r ja que en cas contrari les rectes a, b i r

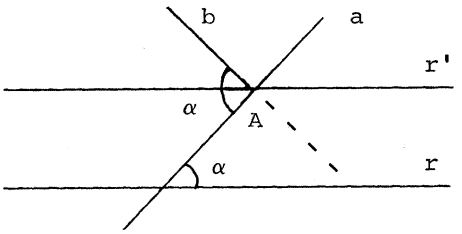

Figura 3

formarien un triangle la suma dels angles del qual seria més gran que 180. Per tant, a la figura 2, $\alpha = \beta$. Tracem per A una recta c que formi amb r' un angle recte (figura 4). Pel resultat que acabem de veure, c tallarà r en un angle recte. Llavors és immediat de veure que la suma d'angles del triangle format per les rectes r, a, c és 180. Pel teorema 8 no es compleix l'axioma L, la qual cosa és una contradicció

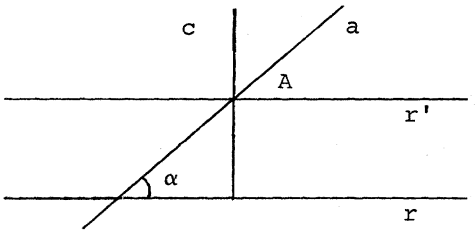

Figura 4

Teorema 10.- Sigui a una recta i A un punt exterior. Hi ha una infinitat de rectes que passen per A i no tallen a.

Demostració. Pel resultat anterior existeixen dues rectes a' i a" que passen per A i no tallen a . Sigui s el semiplà determinat per a' que no conté a . Sigui P un punt qualsevol sobre a" (distint de A) situat en el semiplà s (figura 5). Sigui B un punt qualsevol de a . Unim P amb B . el segment $\overline{PB}$ tallarà a' en un punt P' (ja que $\overline{PB}$ uneix dos punts situats en semiplans distints). Sigui M un punt qualsevol del segment $\overline{PP'}$ distint dels extrems. La recta

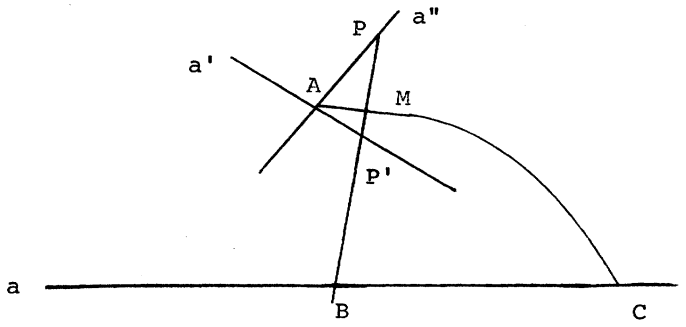

Figura 5

que passa per A i M no talla a . En efecte, en cas contrari, sigui C el punt d'intersecció d'aquestes dues rectes. Pot passar que C estigui en el raig determinat per $\overline{AM}$ (com a la figura 5), o en el raig oposat. En el primer cas, per l'axioma de Pasch aplicat al triangle ΔMBC , la recta a' ha de tallar a en contra de la hipòtesi. En el segon cas es fa un raonament anàleg amb el triangle ΔMBC i la recta a" .

Angle de paral.lelisme en un punt i definició de rectes paral.leles

Sigui a una recta i A un punt exterior. Tracem per A la perpendicular a a. Sigui P el peu d'aquesta perpendicular. La recta AP divideix el pla en dos semiplans que anomenarem convencionalment "dret" i "esquerre". Sabem que per A passen una infinitat de rectes que no tallen a. Sigui a' una d'aquestes rectes. El punt A divideix a' en dues semirectes, la semirecta "dreta", continguda en el semiplà dret, i l'"esquerra", continguda al semiplà "esquerre". Sigui α l'angle que forma la semirecta dreta amb $\overline{AP}$. Sigui α_o l'inferior del conjunt de tots aquests α corresponents a totes les rectes a' que passen per A i no tallen a. Sigui $\tilde{a}$ un raig d'origen A contingut en el semiplà "dret" i que formi un angle α_o amb $\overline{AP}$. $\tilde{a}$ no talla a. En efecte, si tallés, sigui M el punt d'intersecció. Sigui N un punt sobre a, a la dreta de M. El raig AN formaria amb AP un angle $\alpha_1 > \alpha_o$ i evidentment qualsevol raig "dret" que passi per A i no talli a formarà amb AP un angle $> \alpha_1$. Per tant α_o no podrà ser l'inferior d'aquests angles (figura 6)

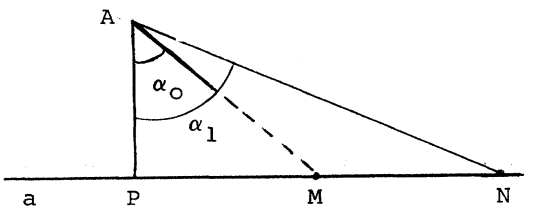

Figura 6

L'angle α_o es diu angle de paral.lelisme "a la dreta" del punt A i la recta a . Anàlogament es defineix angle de paral.lelisme a l'esquerra. El raig "dret" que passa per A i forma amb AP l'angle α_o es diu paral.lela de a per A , "a la dreta". Anàlogament es defineix paral.lela de a per A "a l'esquerra". Observem que les rectes que passen per A i no tallen a no es diuen pas paral.leles. Aquestes rectes són les que eren anomenades per Gauss "ultraparal.leles".

És immediat de veure, per raons de simetria, que l'angle de paral.lelisme "a la dreta" és igual que l'angle de paral.lelisme "a l'esquerra". Veurem més endavant que aquest angle només depèn de la distància del punt A a la recta a . La funció que dóna l'angle de paral.lelisme en termes d'aquesta distància s'anomena funció de Lobatchewski.

El paralel.lisme que acabem de definir gaudeix d'unes propietats que poden sintetitzar-se en els teoremes següents, els quals poden ser demostrats a partir dels axiomes.

<u>Teorema 11</u>.- Sigui a una recta, A un punt exterior i a' un raig que surt de A . Si a' $\parallel$ a per la dreta, en el punt A i si $\bar{A}$ és un punt qualsevol de a' , llavors el raig "dret" de a' a partir de $\bar{A}$ és paral.lel a a en el punt $\bar{A}$.

<u>Teorema 12.</u>- Si a $\parallel$ b , llavors b $\parallel$ a

<u>Teorema 13.</u>- Si a $\parallel$ b i b $\parallel$ C , llavors a $\parallel$ C .

MODELS DE LA GEOMETRIA HIPERBÒLICA

Fins ara hem anat deduint teoremes de la geoemtria hiperbòlica, basant-nos només en els axiomes. Això és el que van fer els fundadors d'aquesta geometria (Gauss, Lobatchewski, Bolyai, ...) a mitjan segle passat. No obstant, més tard, Poincaré va idear dos "models" per aquesta geometria. Donar un model consisteix en donar explícitament un conjunt P d'elements que s'anomenen punts, un conjunt R d'elements que s'anomenen rectes, i de manera que es compleixin tots els axiomes dels grups I, II, III i IV, així com l'axioma L. Els dos models de Poincaré són molt senzills i tractarem d'explicar-ne detalladament un a continuació. Entre els altres models que es poden donar de la geometria hiperbòlica podriem citar el de Beltrami.

Per tal d'introduir detalladament un dels dos models donats per Poincaré, començarem fent un breu repàs de les inversions en el pla.

INVERSIONS

Oblidem-nos ara per una estona dels axiomes i fem geometria euclidiana plana de la que vem aprendre quan erem petits.

Sigui c una circunferència del pla de centre O i radi r. sigui A un punt del pla. Sigui A' el punt situat sobre la recta OA i tal que

$$\text{longitud de } OA' = \frac{r^2}{\text{longitud de } OA}$$

El punt A' s'anomena invers de A respecte c . Si pensem el pla com el pla complex, la inversió respecte la circunferència de centre ζ i radi r és l'aplicació que tranforma z en z' , on z' ve donat per

$$(1) \qquad z' - \zeta = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{\zeta}} \quad .$$

És fàcil de veure que la imatge per una inversió d'una recta o una circumferència. És una recta o una circumferència. (Això no vol dir que les rectes es transformin en rectes. Les rectes es poden transformar en circumferències). Es pot veure fàcilment que el producte d'un nombre parell d'inversions és de la forma.

$$(2) \qquad z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad ,$$

amb a, b, c, d nombres complexos, i que el producte d'un nombre senar d'inversions és de la forma

$$(3) \qquad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad .$$

Una propietat important de les inversions és que conserven la raó doble de quatre punts o bé la canvien pel seu conjugat. Per poder enunciar amb precisió aquest fet, comencen definint la raó doble de quatre nombres complexos u, v, s, t, que designarem per (u,v,s,t), de la següent manera:

$$(4) \qquad (u, v, s, t) = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t} \quad .$$

A la definició es pot permetre que un dels quatre nombres u, v, s, t sigui ∞, substituint a la definició (4) els quotients del segon membre pel valor que prendrien amb les regles usuals del càlcul de límits. Així per exemple, si $t = \infty$, la definició (4) s'hauria de substituir per

$$(5) \qquad (u, v, s, \infty) = \frac{u - s}{v - s}$$

Es pot comprovar el següent fet, molt important. Si s'aplica als quatre nombres complexos u, v, s, t, una transformació del tipus (2) i si s'anomenen u', v', s', t' els tranformats, llavors $(u, v, s, t) = (u', v', s', t')$. Si s'aplica a u, v, s, t una transformació del tipus (3), llavors $(u, v, s, t) = \overline{(u', v', s', t')}$.

A partir d'ara només considerarem inversions respecte circumferències que tinguin centre sobre l'eix real. Aquestes inversions transformen òbviament el seimiplà superior en ell mateix. El producte d'un nombre parell d'inversions d'aquesta mena és de la forma (2) amb a, b, c, d reals i tals que $ad - cb > o$.

MODEL DEL SEMIPLÀ DE POINCARÉ

El conjunt P de punts de la nostra geometria hiperbòlica serà el semiplà superior $\{z \in \mathbb{C}$ tals que $\operatorname{Im} z > o\}$. El conjunt R de rectes de la nostra geometria serà el conjunt reunió del conjunt de totes les semicircumferències contingudes en el

semiplà superior, de centre un punt de l'eix real, i del conjunt de semirectes contingudes en el seimplà superior, paral.leles a l'eix imaginari (paral.leles en el sentit habitual, euclidià). La noció d'incidència entre un punt i una recta d'aquesta geometria és l'habitual, és a dir, un punt del semiplà superior està sobre una "recta" (circumferència o recta paral.lela a l'eix imaginari) si ho està en el sentit habitual de la geometria euclidiana. La noció d'ordre, "un punt està situat enmig d'altres dos", també és l'habitual. Amb aquestes definicions es compleixen els axiomes dels grups I i II .

Anem a definir la noció de congruència de segments. Dos segments no euclidians $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ direm que són congruents si existeix una successió d'inversions (respecte cercles de centre sobre l'eix real) el producte de les quals transforma $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$ ($\overline{AB}$ serà un segmen euclidià paral.lel a l'eix imaginari o bé un arc de cercle euclidià. El mateix serà $\overline{A'B'}$. Transformar $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$ vol dir transformar l'un en l'altre com a arcs de cercle o segments rectilinis). Anàlogament direm que un angle no euclidià $\widehat{h\,k}$ és congruent amb $\widehat{h'\,k'}$ si existeix una successió d'inversions (respecte cercles de centre sobre l'eix real) el producte de les quals transforma h i k amb h' i k' respectivament. Amb aquestes definicions es pot veure que es compleixen tots els axiomes dels grups I,II,III i IV.

Veiem també que es compleix l'axioma L.

Sigui a una recta no euclidiana (per exemple una circumferència de centre un punt de l'eix real) (figura 7). Sigui A un punt exterior. A la figura 7, a' i a" són precisament les paral.leles des de A a a , per la dreta i per l'esquerra. (Circumferències de centre sobre l'eix real que passen per B i A o bé per C i A , on C i B són les interseccions de a amb l'eix real). (Observem que a' i a" tallen a respectivament en B i C , però B i C no són punts de la nostra geometria).

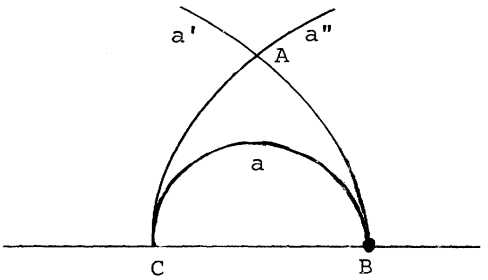

Figura 7

Qualsevol recta (és a dir, semicircumferència euclidiana amb centre sobre l'eix real) que passi per A , compresa entre a' i a" no tallarà a (serà ultraparal.lela).

CONSISTÈNCIA DE LA GEOMETRIA HIPERBÒLICA

El model del semiplà de Poincaré està fonamentat en la geometria euclidiana. Els seus conceptes, llevat d'un canvi de paraules, són euclidians (A determinats semicercles euclidians els

hem passat a anomenar rectes. Però això només per un canvi de paraules). Ara bé, si els axiomes de la geometria hiperbòlica portessin a contradicció, el model del semiplà de Poincaré que compleix aquests axiomes, portaria a contradicció, i com que a - quest model, fent un canvi de paraules, és euclidià, la geometria euclidiana portaria a contradicció. Com que la geometria euclidiana (en dues dimensions) es pot interpretar analíticament a $\mathbb{R}^2$, l'aritmètica portaria contradicció. Resumint, si els axiomes de la geometria hiperbòlica portessin a contradicció, també seria contradictòria la geometria euclidiana i l'aritmètica. (Es pot també demostrar el recíproc, és a dir, que si la geometria euclidiana fós contradictòria, també ho seria la hiperbòlica).

DISTÀNCIA HIPERBÒLICA EN EL MODEL DE POINCARÉ

Siguin u, v dos punts del semiplà de Poincaré. Considerem la recta de la geometria hiperbòlica que determinen. Aquesta recta és, o bé una semicircumferència (figura 8), o bé una recta paral.lela a l'eix imaginari. En el primer cas anomenem s, t els punts d'intersecció de la semicircumferència amb l'eix real (s i t no són punts de la geometria hiperbòlica). En el segon cas anomenem s la intersecció de la recta amb l'eix real i $t = +\infty$. Els punts s i t els anomenem punts de l'infinit de la recta hiperbòlica que passa per u i v . Amb aquestes notacions, (u, v, s, t) és un número real positiu. En efecte, comprovem-ho per exemple en el primer cas.

Sabem que

$$(u, v, s, t) = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t} \quad .$$

Amb les notacions de la figura 8 tindrem $u - s = r_1 e^{i\theta_1}$,

$u - t = r_2 e^{-i\theta_2}$, $\frac{u - s}{u - t} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{r_1}{r_2} i$.

Anàlogament es fa amb el quotient $\frac{v - s}{v - t}$. Està clar doncs que el quotient dels dos quotients serà un número real positiu.

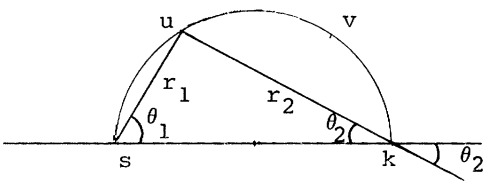

Figura 8

Definim la longitud hiperbòlica, $\zeta(\overline{u\ v})$, del segment $\overline{u\ v}$ per $\rho(\overline{u\ v}) = R\ |\ln(u, v, s, t)|$, on ln indica el logaritme neperià i R és el mùmero real determinat pel procediment següent. Elegim un segment (hiperbòlic) arbitrari $\overline{00'}$ que prendrem com unitat de longitud. Tornem a designar, per abús de llenguatge, per s, t, els punts de l'infinit de la recta hiperbòlica que passa per 0 i 0' . Determinem R tal que $R\ |\ln(0, 0', s, t)| = 1$.

Es tracta de veure que la longitud que hem definit coincideix amb la contruida abans, a partir dels axiomes. Per això

basta comprovar que la longitud de segments que acabem de definir compleix les tres propietats següents:

1) $\overline{u\ v} \equiv \overline{u'\ v'} \iff \rho(\overline{u\ v}) = \rho(\overline{u'\ v'})$

2) Si w està enmig de u i v, en el segment $\overline{u\ v}$, llavors $\rho(\overline{u\ w}) + \rho(\overline{w\ v}) = \rho(\overline{u\ v})$

3) $\rho(\overline{0\ 0'}) = 1$

L'única propietat no immmediata de comprovar és 2. Es pot veure que se w està enmig de u i v, llavors $(u, v, s, t) = (u, w, s, t)\ (w, v, s, t)$. Prenent logaritmes i després valors absoluts en aqeusta identitat, s'obté 2 .

ANGLE DE PARAL.LELISME. FUNCIÓ DE LOBATCHEWSKI

Sigui r una recta (hiperbòlica) i A un punt exterior a r. Sigui α l'angle de paral.lelisme del punt A respecte de r. El nostre objectiu és demostrar, mitjançant un raonament simple, la següent expressió de α.

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\ell}{R}}, \tag{6}$$

on ℓ és la distància (hiperbòlica) de A a r i R és el número real que hem utilitzat a la definició de longitud d'un segment (i que quedava determinat elegint el segment unitat $\overline{0\ 0'}$).

Situen-nos en el cas particularment senzill en què la recta hiperbòlica r és una circumferència euclidiana de centre l'eix real i A és un punt situat sobre la recta paral.lela a l'eix imaginari que passa pel centre de la circumferència anterior (figura 9). Sempre podrem arribar a aquesta situació, partint d'una situació qualsevol, per un número finit d'inversions respecte circumferències de centre sobre l'eix real. Com que aquestes transformacions conserven, per definició, les distàncies hiperbòliques i els angles, bastarà provar el resultat en aquest cas particular.

Anomenem s, t els punts de l'infinit de la recta hiperbòlica r (figura 9). Sigui O el centre de r, considerada com a circumferència euclidiana. Sigui c el punt d'intersecció de $\overline{OA}$ amb r. Sigui h la longitud euclidiana de $\overline{AC}$ i k el radi euclidià de la circumferència r. Tracem la circumferència euclidiana de centre sobre l'eix real que passi per t i A. Sigui P el centre d'aquesta circumferència. Sigui b la tangent per A a aquesta circumferència. L'angle de paral.lelisme α és l'angle de b amb $\overline{AO}$. Considerem el triangle euclidià PAt. Veiem a la figura 9 que $\widehat{APK}$ és α. Anomenem β l'angle $\widehat{PtA}$. Com que el triangle PAt és isòsceles, $2\beta + \alpha = 180$. Per tant $\beta = (180 - \alpha)/2$. Per tant, $\operatorname{tg}\beta = \cot(\alpha/2) = (h + k)/k$. Ara bé, si anomenem ℓ la longitud hiperbòlica del segment $\overline{AC}$, de la definició de longitud hiperbòlica es desprèn que

$$\ell = R \ln \frac{h + k}{k}$$

Per tant , $\ell = R \ln \frac{h + k}{k}$,

Per tant, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{\ell}{R}}$,

d'on s'obté (6)

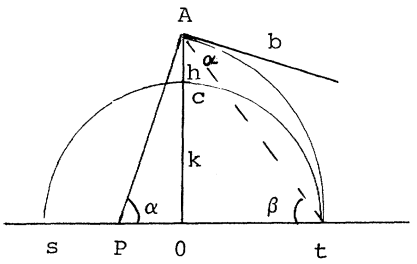

Figura 9

BIBLIOGRAFIA

Per a una exposició detallada de la geometria hiperbòlica a partir dels axiomes de Hilbert o d'altres axiomes equivalents, recomanem aquests dos llibres:

N. Efimov. Géometrie Supériure. Éditions MIR. Moscou, 1981.

E.E. Moise. Elementary Geometry from an advanced standpoint. Addison-Wesley Publ. 1974.