EL TEOREMA DE LA DIVERGÈNCIA

Xavier Mora

El teorema de la divergència estableix la igualtat entre una integral de volum estesa a una certa regió de l'espai i una integral de superfície estesa a la frontera d'aquella regió. Concretament, si Ω denota una regió acotada de l'espai, limitada per la superfície $\partial\Omega$, i $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ denota una funció vectorial sobre Ω, el teorema de la divergència assegura que

$$\int_{\Omega} (D_x F_x + D_y F_y + D_z F_z)\, dV = \int_{\partial\Omega} F_n dS \qquad (1)$$

Aquí i en tot el que segueix D_x, D_y, D_z indiquen les derivades parcials respecte a les variables x, y, z, F_n representa la component de $\mathbf{F}$ en la direcció $\mathbf{n}$, i $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ representa el vector unitari normal a la superfície $\partial\Omega$ i dirigit cap a l'exterior de Ω (evidentment, el vector $\mathbf{n}$ varia al despaçar-nos sobre la superfície $\partial\Omega$). L'expressió que apareix com a integrand al primer membre de (1) s'anomena divergència del camp vectorial $\mathbf{F}$, i generalment es representa mitjançant la notació $\mathrm{div}\mathbf{F}$ o bé $\nabla\cdot\mathbf{F}$. Ja que el vector normal $\mathbf{n}$ l'estem considerant unitari, l'integrand del segon membre de (1) es pot escriure tant F_n com $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$, moltes vegades el vector normal **n** es considera associat amb l'"element de superfície" dS i llavors el segon membre de (1) s'escriu $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}$. Per a que sigui vàlida la relació (1) cal que la regió Ω (que suposem acotada) i el camp **F** satisfacin unes mínimes condicions de regularitat; concretament, pel que fa a la regió Ω n'hi ha prou amb que la seva superfície es pugui descompondre en un nombre finit de troços de classe C^1 els quals enllacin amb angles no nuls; d'albra banda, referent al camp vectorial **F** és suficient que les funcions F_x, F_y, F_z siguin diferenciables amb derivades parcials de primer ordre uniformement contínues sobre Ω. Per a una explanació precisa d'aquestes condicions, i com a referència general sobre anàlisi vectorial, el lector pot consultar per exemple el text de Protter, Morrey [1977: Cap. 16].

Segons la majoria d'autors soviètics i molts dels francesos, el teorema que ens ocupa seria degut a Ostrogradskiĭ; en canvi, molts altres autors solen atribuir-lo a Gauss, i encara hi ha un tercer grup que tendeix a associar-lo amb el nom de Green. A continuació veurem el que va fer cadascun d'aquests autors, i desprês seguirem amb altres consideracions sobre la història i les aplicacions del teorema de la divergència. És de notar que els diversos treballs que van donar lloc a l'aparició d'aquest teorema estaven motivats tots ells per l'aplicació de la matemàtica a les ciències de la natura.

El doble objectiu del present article, exposar la història del teorema de la divergència i mostrar la manera com s'aplica, ha fet quelcom difícil decidir si utilitzar notació i terminologia modernes o bé les originals. Al final hem acabat per re nunciar a la notació i terminologia estrictament originals, doncs això hagués suposat un llenguatge bastant poc àgil. Bàsicament, la diferència entre la nostra manera de parlar i la dels articles originals consisteix en que nosaltres utilitzem llenguatge i notació vectorials, mentre que els autors a que ens referim parlaven sempre en termes de components (tingui's en compte que la noció de vector i la notació associada no van ser introduïts fins a finals del segle passat, mentre que els treballs que ens interessen a nosaltres daten del primer terç d'aquell segle). Un punt en què no ens apartarem dels treballs originals és l'ús d'infinitèssims; és clar que totes les coses que diem en termes d'infinitèssims es poden posar en termes de límits, però moltes vegades el llenguatge infinitessimal resulta més àgil. Per últim, un altre aspecte en què també seguirem els autors originals és que per regla general no prestarem gaire atenció a les condicions de regularitat que hagin de cumplir les funcions i dominis espacials intervinents; tot el que fem valdrà sempre que les funcions i dominis espacials siguin suficientment regulars, per exemple si són infinitament diferenciables.

GAUSS

Dels autors esmentats més amunt, el primer en ordre cronològic és Gauss, amb un treball que data del 1813. Encara que no conté cap enunciat general del teorema de la divergència, en aquest treball s'hi troben fins a sis casos particulars d'ell, cadascun amb la seva demostració. Tot i que no arribés a abstreure el resultat general, dóna la impressió de que Gauss dominava perfectament la tècnica de la seva demostració, la qual aplicava sempre que li feia falta. La mateixa manera de fer s'observa en els seus articles posteriors dedicats al magnetisme i en general a les forces inversament proporcionals al quadrat de la distància (1832-1841), on tampoc hi hem trobat cap enunciat general del teorema de la divergència.

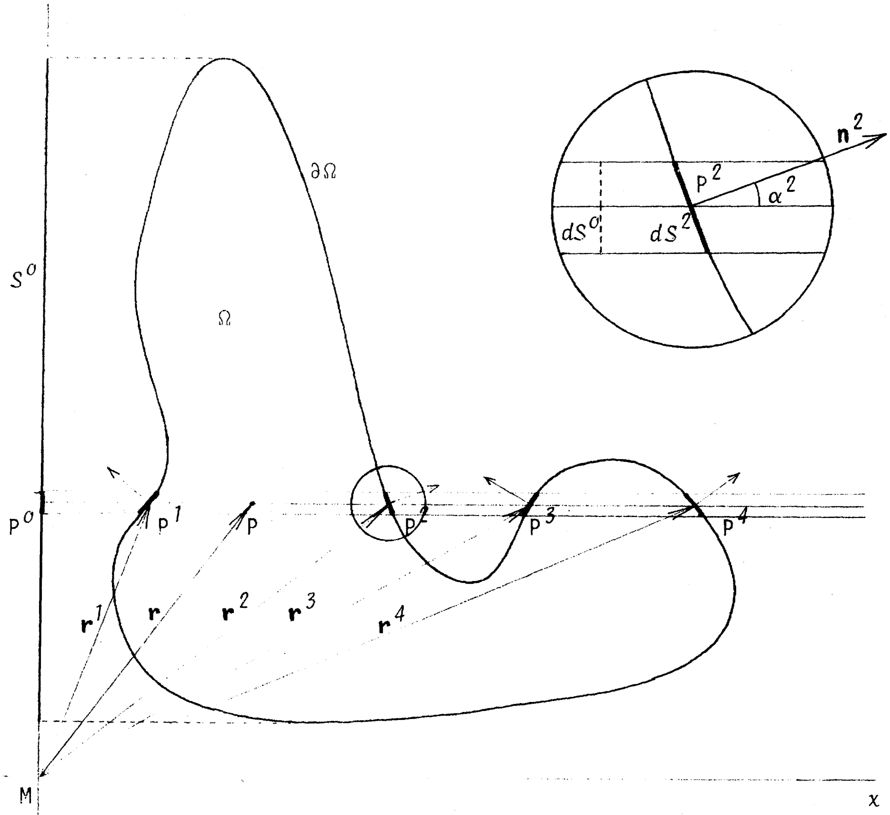
En el treball de 1813, Gauss s'ocupa del problema de determinar el camp gravitatori degut a un cos homogeni de forma esferoïdal o el·lipsoïdal (per esferoide s'entén aquí un el·lipsoide amb dos semieixos iguals, com és el cas de la Terra). El problema del càlcul del camp gravitatori d'esferoides i el·lipsoides homogenis ja havia estat tractat anteriorment per MacLaurin, Lagrange, Legendre i altres autors, però en el treball a què ens estem referint, Gauss va donar un nou mètode bastant més senzill que els anteriors. La clau d'aquest nou mètode consisteix en prendre la integral de volum que dóna el camp gravitatori i transformar-la en una integral de superfície; això es fa mitjançant un argument que és essencialment el que dóna el teorema de la divergència. Com a mostra típica d'això, a continuació expliquem el teorema tercer del treball a què ens estem referint, el qual dóna un resultat més general del que sembla a primera vista.

Consideri's un cos finit Ω de forma qualsevol i densitat constant igual a la unitat. Sigui $f(r)$ la força d'atracció entre dues partícules de massa unitat en funció de la seva distància r (Gauss dóna per suposat que aquesta força és central i proporcional al producte de les masses). El problema consisteix en determinar la força que el cos Ω exerceix sobre una partícula de massa unitat situada en un punt qualsevol M. Fixem un sistema de coordenades rectangular amb origen al punt M . La força que volem calcular vindrà donada per un vector que denotarem $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$. En el que segueix P denotarà un punt genèric de Ω el qual vindrà representat pel vector de posició $\mathbf{r} = (x,y,z)$. La força exercida per un element de volum dV entorn de P vindrà donada per $f(r)dV$, i la seva component en la direcció x vindrà donada per $\frac{x}{r}f(r)dV$. En total, la component x de la força exercida per tot el cos Ω vindrà donada per la integral de volum

$$E_x = \int_\Omega \frac{x}{r} f(r) \, dV. \tag{2}$$

Evidentment, les altres components vindran donades per expressions anàlogues on x estarà substituïda per y i z, de manera que serà suficient considerar el problema per la component x.

Per transformar la integral (2), Gauss considera una partició de Ω mitjançant un feix de cilindres molt prims paral·lels a l'eix de les x: Prenguem un pla perpendicular a aquest eix i denotem S^0 i P^0 les projeccions de Ω i P sobre ell (vegi's la figura adjunta).



Els successius punts en què la recta P^oP travessa la superfície $\partial\Omega$ els denotarem $P^i (i = 1,2,...)$ i els seus vectors de posició els denotarem respectivament $\mathbf{r}^i = (x^i, y^i, z^i)$; és evident que el nombre de punts P^i és sempre parell. Sigui dS^o un element de la superficie S^o situat entorn de P^o, i considerem el cilindre de secció dS^o i generatriu l'eix de les x. Els successius elements de superfície determinats per aquest cilindre al tallar $\partial\Omega$ entorn dels punts P^i els deno tarem dS^i. Finalment, siguin $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ els angles que la normal exterior a la superfície $\partial\Omega$ en el punt P^i forma amb cadascun dels eixos x, y, z (en termes d'aquests angles, el vector unitari normal a $\partial\Omega$ i dirigit cap a l'exterior de Ω ve donat per $\mathbf{n}^i = (\cos\alpha^i, \cos\beta^i, \cos\gamma^i)$). Per la llei de transformació de les àrees al projectar figures planes tenim la relació

$$dS^0 = -dS^1 \cos\alpha^1 = dS^2 \cos\alpha^2 = -dS^3 \cos\alpha^3 = dS^4 \cos\alpha^4 \quad \ldots. \tag{3}$$

(el lector verificarà fàcilment que tots els termes d'aquesta igualtat són positius, doncs els nombres $\cos\alpha^i$ són negatius o positius segons que i sigui senar o parell). Considerem la contribució a E_x deguda a la part de Ω limitada pel cilindre de base dS^0; aquèsta ve donada per

$$\int_{x^1}^{x^2} \frac{x}{r} f(r)\, dx \quad dS^0 \quad + \quad \int_{x^3}^{x^4} \frac{x}{r} f(r)\, dx \quad dS^0 \quad + \ldots.$$

Si canviem la variable d'integració de x a r, aquesta expressió es transforma en la següent

$$\int_{r^1}^{r^2} f(r)\, dr \quad dS^0 \quad + \quad \int_{r^3}^{r^4} f(r)\, dr \quad dS^0 \quad + \ldots.$$

Sigui ara F una primitiva de f; aplicant el teorema fonamental del càlcul infinitessimal, l'expressió precedent pren llavors la forma següent:

$$[F(r^2) - F(r^1)]\, dS^0 \quad + \quad [F(r^4) - F(r^3)]\, dS^0 + \ldots.$$

Ara bé, si tenim en compte la relació (3), aquesta expressió resulta equivalent a la següent:

$$F(r^1)\cos\alpha^1\, dS^1 + F(r^2)\cos\alpha^2\, dS^2 + F(r^3)\cos\alpha^3\, dS^3 + F(r^4)\cos\alpha^4\, dS^4 + \ldots$$

Així doncs, si sumem les contribucions degudes als diferents elements dS^0, obtenim el resultat següent:

$$E_x = \int_{\partial\Omega} F(r)\cos\alpha\, dS \tag{4}$$

on la integral s'estén a tota la superfície del cos considerat.

Més endavant, Gauss aplica aquesta fórmula al cas específic d'esferoides i el·lipsoides, la qual cosa li permet d'arribar a una fórmula per a E_x que no conté més que una integral simple, i encara en el cas dels esferoides aquesta integral es pot fer analíticament. El resultat que ens interessa més a nosaltres és la igualtat entre les dues expressions (2) i (4). Encara que Gauss només parla de forces, és clar que l'argument precedent val per a qualsevol funció escalar F que sigui diferenciable amb continuïtat a un entorn del domini de variació de r. Així doncs, per a qualsevol d'aquestes funcions queda demostrada la següent relació:

$$\int_{\Omega} F(r)\,\frac{x}{r}\, dV = \int_{\partial\Omega} F(r)\cos\alpha\, dS, \tag{5}$$

la qual cosa podem escriure també de la manera següent:

$$\int_{\Omega} D_x\,\phi\, dV = \int_{\partial\Omega} \phi\, n_x\, dS \tag{6}$$

on ϕ representa la funció escalar definida com

$$\phi(x,y,z) \equiv F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \qquad (7)$$

Evidentment, la relació (6) també és vàlida si canviem x per y o z. Com es pot veure, per a obtenir la forma general del teorema de la divergència només manca que ϕ pugui ser qualsevol funció de (x,y,z) i no solament una funció de la forma (7).

OSTROGRADSKII I GREEN

La contribució d'Ostrogradskiĭ es troba en tres comunicacions presentades respectivament els anys 1826, 1827 i 1828. D'aquestes, les dues primeres, presentades a l'Acadèmia de Ciències de Paris, van romandre inèdites fins el 1965, any en què van ser publicades unes traduccions russes; la comunicació de 1828, presentada aquèsta a l'Acadèmia Imperial de Ciències de Sant Petersburg, va ser l'única que fou publicada a l'època, concretament el 1831. D'aquests treballs, la part que ens interessa a nosaltres i que describim a continuació és pràcticament comuna als tres articles.

En aquests tres articles d'Ostrogradskiĭ es dóna per primera vegada l'enunciat i demostració del teorema de la divergència en la forma general (1). Tanmateix, la demostració donada per aquest autor segueix un argument pràcticament calcat del de

Gauss. Així doncs, si bé Ostrogradskiǐ té el mèrit d'haver sigut el primer en abstreure el resultat general, també és clar que la idea de la demostració la devem sobretot a Gauss.

L'interès d'Ostrogradskiǐ en el teorema de la divergència provenia de la teoria matemàtica de la propagació de la calor, que feia poc havia estat desenvolupada per Fourier. Específicament, el lloc on Ostrogradskiǐ aplica el teorema de la divergència es centra en verificar l'ortogonalitat de les funcions pròpies de l'operador de Laplace amb condicions de contorn de tercera classe sempre que aquestes funcions pròpies corresponguin a valors propis diferents. En concret, si Δ denota l'operador de Laplace, definit per la fórmula $\Delta u = D_x^2 u + D_y^2 u + D_z^2 u$, i $D_n u$ denota la derivada de u en la direcció de la normal exterior $\mathbf{n}$, es tractava de veure que si ϕ i ψ són dues funcions sobre Ω satisfent les següents equacions

$$\Delta\phi = \lambda\phi \quad \text{a } \Omega \tag{8}$$

$$\Delta\psi = \mu\psi \quad \text{a } \Omega \tag{9}$$

$$D_n\phi = h\phi \quad \text{a } \partial\Omega \tag{10}$$

$$D_n\psi = h\phi \quad \text{a } \partial\Omega \tag{11}$$

amb $\lambda \neq \mu$, llavors ϕ i ψ satisfan la relació d'ortogonalitat

$$\int_\Omega \phi\psi \, dV = 0 \tag{12}$$

(a les equacions (10) i (11), h representa un nombre real positiu que és dada del problema). Per a obtenir la relació (12), Ostrogradskiĭ multiplica l'equació (8) per ψ i l'equació (9) per ϕ, fa la diferència i integra sobre Ω, la qual cosa dóna el següent:

$$\int_{\Omega} (\psi \, \Delta\phi - \phi \, \Delta\psi) \, dV = (\lambda-\mu) \int_{\Omega} \phi\psi \, dV \qquad (13)$$

Ara es tracta de donar-se compte de que l'integrand del primer membre és la divergència d'una certa funció vectorial; concretament, resulta que $\psi \, \Delta \phi - \phi \, \Delta \psi$ és la divergència de $\psi \, \mathbf{grad}\phi - \phi \, \mathbf{grad}\psi$, on la notació $\mathbf{grad}u$ l'adoptem d'ara en endavant per a representar el gradient d'una funció escalar u, és a dir la funció vectorial de components $(D_x u, D_y u, D_z u)$ (noti's que l'operador de Laplace equival a fer la divergència del gradient: $\Delta u \equiv D_x^2 u + D_y^2 u + D_z^2 u = \mathrm{div}\, \mathbf{grad}u$, i que la derivada en la direcció de la normal ve donada per $D_n u = n_x D_x u + n_y D_y u + n_z D_z u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}u$). Havent observat això, llavors el teorema de la divergència ens permet fer la següent assimilació:

$$\int_{\Omega} (\psi \, \Delta\phi - \phi \, \Delta\psi) \, dV = \int_{\partial\Omega} (\psi \, D_n\phi - \phi \, D_n\psi) \, dS \qquad (14)$$

Aplicant aquesta fórmula a (13) i tenint presents les relacions (10) i (11) s'en dedueix que

$$(\lambda-\mu) \int_{\Omega} \phi\psi \, dV = 0 \qquad (15)$$

la qual cosa ens dóna el resultat desitjat.

La contribució de Green està continguda en un llibret titulat "Un Assaig sobre l'Aplicació de l'Anàlisi Matemàtica a les Teories de l'Electricitat i el Magnetisme", el qual va escriure a les estones que li quedaven lliures d'ajudar el seu pare en la feina de forner i més tard moliner. Aquest treball fou publicat per subscripció (!) l'any 1828 (abans de la publicació d'Ostrogradskiĭ), però va passar desapercebut fins el 1846, en què va arribar a coneixement d'en Kelvin (quan ja feia cinc anys de la mort de l'autor).

L'objectiu de Green consistia en calcular el camp elèctric degut a un cos no puntual el qual està carregat elèctricament. Donat que la força electrostàtica obeeix una llei anàloga a la de l'atracció gravitatòria, al principi es pot pensar que el problema a què ens estem referint és bàsicament el mateix que hem comentat al parlar d'en Gauss, però traduït de la gravitació a l'electrostàtica. Tanmateix, a la pràctica el cas de l'electrostàtica presenta una diferència bastant notable, que és que quan el cos en qüestió és un conductor, llavors la càrrega elèctrica és lliure de moure's pel seu interior, i en particular la interacció de les diferents partícules de càrrega fa que aquèsta es distribueixi d'una certa manera que cal determinar. Així doncs, en el cas de l'electrostàtica el problema té dues incògnites: el camp elèctric i la distribució de càrrega sobre el conductor, mentre que en el cas de la gravitació només hi teniem la primera.

Per tractar aquest problema, Green es va basar en l'observació, que havia estat feta per Laplace (1782, 1787) en el cas de la gravitació, de que el camp $\mathbf{E}$ degut a una certa distribució de càrrega té la particularitat de que les seves components en les tres direccions de l'espai vénen donades per les corresponents derivades parcials, canviades de signe, d'una certa funció escalar ϕ, la qual rep el nom de potencial. Segons va mostrar Green, el problema de l'electrostàtica es redueix a determinar el potencial ϕ a partir de les condicions següents

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{a } \Omega \tag{16}$$

$$\phi = V_i \quad \text{a } \Sigma_i \tag{17}$$

$$\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow 0 \quad \text{quan } r \longrightarrow \infty \tag{18}$$

on Ω representa l'espai no ocupat pels conductors i cada parella Σ_i, V_i representa la superfície d'un d'ells i el corresponent valor del potencial, el qual se suposa conegut (aquí estem suposant que el nombre de conductors és finit i la seva extensió limitada). En particular, a partir de les condicions (16)-(18) Green va mostrar que la funció potencial ϕ determina de manera única la distribució de càrrega sobre els conductors. Referent a la recerca de la solució del problema (16)-(18), en el treball que estem comentant Green va introduir una eina bàsica que és la que ara es coneix com a "funció de Green", i en un treball cinc anys posterior va introduir una primera versió de l'important principi de que la solució de (16)-(18) és la funció que minimitza el valor de la integral $\int_\Omega \|\mathbf{grad}\phi\|^2 \, dV$ d'entre totes les que satisfan les condicions (17)-(18).

Per obtenir aquests resultats, Green es va basar de manera clau en unes identitats més o menys afins al teorema de la divergència, les quals són conegudes com a "fórmules de Green". Una d'aquestes identitats és la fórmula (14) que ens ha sortit ja al parlar d'Ostrogradskiĭ. En el treball de Green aquesta fórmula s'obté a partir de la següent, la qual resulta ser també molt important:

$$\int_{\Omega} \phi \, \Delta\psi \, dV = \int_{\partial\Omega} \phi \, D_n\psi \, dS - \int_{\Omega} \mathbf{grad}\phi \cdot \mathbf{grad}\psi \, dV \qquad (19)$$

(per a passar de (19) a (14) només cal sostreure de (19) una relació anàloga on s'han intercanviat ϕ i ψ). Com es podrà apreciar, la fórmula (19) equival al teorema de la divergència aplicat a la funció ϕ **grad** ψ. Referent a la demostració donada per Green, no hi ha altra cosa a dir sinó que aquesta segueix bàsicament la idea de Gauss.

Com a mostra típica de la utilitat d'aquestes fórmules podem referir la demostració de la unicitat de solucions del problema (16)-(18): Si ϕ_1 i ϕ_2 són dues solucions d'aquest problema, llavors és clar que la diferència $\phi_1 - \phi_2$ serà solució del problema anàleg amb totes les V_i iguals a zero. Si el domini Ω fos acotat, llavors no tindriem més que aplicar la fórmula (19) amb $\phi = \psi = \phi_1 - \phi_2$, la qual cosa ens dóna el següent resultat:

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{grad}\ (\phi_1 - \phi_2)\|^2 \, dV = 0 \qquad (20)$$

(doncs $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ i $(\phi_1 - \phi_2)|_{\partial\Omega} = 0$); donat que la funció que apareix sota el signe integral és positiva pertot, aquesta relació implica que $\mathbf{grad}(\phi_1 - \phi_2)$ és sempre nul, i per tant la funció $\phi_1 - \phi_2$ és constant; finalment, com que $\phi_1 - \phi_2$ val zero a la superfície $\partial\Omega$, resulta que aquesta constant ha de ser zero, i per tant obtenim que les funcions ϕ_1 i ϕ_2 són exactament la mateixa. En el cas en què el domini Ω no és acotat, llavors la fórmula (19) no és aplicable directament, però la condició (18) permet d'obtenir el mateix resultat considerant un domini acotat cada vegada més gran.

Mencionem aquí que el nom de "fórmula de Green" s'utilitza també per a referir-se al teorema de la rotació (o de Stokes) en dimensió dos, resultat que és equivalent al teorema de la divergència en dimensió dos; tanmateix, el cert és que no hi ha cap evidència de que Green hagués fet mai res semblant (més aviat sembla que aquest resultat és degut a Cauchy i Riemann). En canvi, el problema (16)-(18) i el corresponent principi de mínim a què hem al.ludit abans, els quals sí que van ser considerats per primera vegada per Green, aquests no reben pas el seu nom sinó el de Dirichlet. Diguem també que Green va ser el primer en utilitzar una notació abreujada per a l'operador de Laplace, que ell expressava mitjançant el símbol δ (la notació actual Δ és deguda a Robert Murphy: "Elementary Principles of the Theories of Electricity, theat, and Molecular Actions", 1833).

Més o menys al mateix temps que Ostrogradskiĭ i Green, el teorema de la divergència va ser utilitzat per Sarrus [1828] i Poisson [1829], que, com es veurà pels títols dels seus treballs, estaven motivats respectivament per les oscil.lacions dels cossos flotants i per l'elasticitat. Encara que aquest autors no diuen pas d'on han tret el teorema, és bastant plausible que el coneguéssin per les comunicacions d'Ostrogradskiĭ a Paris.

DIVERGÈNCIA I FLUX

Una aplicació típica del teorema de la divergència consisteix en la deducció de diverses equacions diferencials que descriuen processos de transport. Considerem per exemple el cas del moviment d'un fluid. Sigui Ω una regió d'espai fixa (respecte un cert sistema de referència), i sigui $M(t)$ la quantitat de massa continguda a Ω en el moment t. D'una banda tenim que

$$\mathcal{D}_t M = \mathcal{D}_t \left(\int_\Omega \rho \, dV\right) = \int_\Omega \mathcal{D}_t \, \rho \, dV \qquad (21)$$

on ρ denota la densitat del fluid. D'altra banda, és clar que la variació de M en un interval de temps ha de ser igual a la quantitat neta de massa que ha entrat a través de la frontera de Ω durant aquest interval de temps. Aquesta última quantitat es pot comptabilitzar integrant la contribució dels diferents elements de superfície de $\partial\Omega$: segons es veu fàcilment, la quantitat de massa que entra per l'element de superfície dS durant l'element de temps dt ve donada per $-u_n \, dt \, dS$, on el vector $\mathbf{u}$ representa la velocitat del fluid, i u_n representa la seva component normal; integrant aquesta expressió sobre tota la superfície $\partial\Omega$, i dividint per dt obtenim que

$$\mathcal{D}_t M = - \int_{\partial\Omega} u_n \; dS \tag{22}$$

De (21) i (22) resulta doncs que

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}_t \rho \; dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \, u_n \; dS \tag{23}$$

Sobre aquesta relació s'aplica llavors el teorema de la divergència per tal de transformar la integral de superfície en una integral de volum; això ens dóna el següent resultat:

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}_t \rho \quad dV = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \quad dV \tag{24}$$

Ara bé, aquesta relació ha de valer per a una regió Ω qualsevol, de la qual cosa s'en dedueix que els integrands dels dos membres han de ser iguals:

$$\mathcal{D}_t \rho = - \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \tag{25}$$

Amb això hem obtingut una equació diferencial fonamental de la dinàmica de fluids, que s'acostuma a anomenar "equació de continuïtat".

Una propietat que diferencia els líquids dels gasos és que els primers són pràcticament incompressibles, és a dir que la seva densitat es manté sempre la mateixa; en tal cas tenim que $\mathcal{D}_t\rho = 0$ i per tant l'equació (25) ens diu que s'ha de complir la relació $\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$.

L'exemple anterior inspira molta de la terminologia que s'utilitza en alàlisi vectorial. Així per exemple, una integral de superfície de la forma $\int_\Sigma F_n\, dS$, on $\mathbf{F}$ representa un camp vectorial donat, s'anomena "flux" del camp $\mathbf{F}$ a través de la superfície Σ. Un altre exemple és la noció de "línia de corrent"; per definició, una línia de corrent del camp $\mathbf{F}$ vol dir una línia que en cadascun dels seus punts te el vector $\mathbf{F}$ com a tangent; el conjunt de línies de corrent que passen per una corba tancada forma una superfície que s'anomena "tub de corrent". Aplicant el teorema de la divergència a la regió d'espai interior a un tub de corrent i compresa entre dues superfícies limitants Σ_1 i Σ_2 (és a dir, dues "tapes"), es veu fàcilment que si el camp te divergència nul·la llavors el flux a través de Σ_1 és igual al flux a través de Σ_2; degut a aquesta propietat dels tubs de corrent, els camps vectorials que tenen divergència nul·la s'anomenen "solenoïdals" (del grec $\sigma\omega\lambda\eta\nu$, $-\eta\nu$os: tub). Aquest terme va ser introduït per Maxwell [1873], que també és el principal responsable del terme "divergència" (en realitat, Maxwell parlava de la "convergència" volguent dir el que nosaltres anomenem divergència però canviat de signe; el primer en utilitzar exactament el terme "divergència" va ser Clifford).

Un camí similar al que ens ha portat a l'equació de continuïtat permet deduir també l'equació de la calor. En aquest cas, enlloc de la massa M es fa balanç de l'energia interna E, i per a comptabilitzar el flux de calor a través de $\partial\Omega$ es te en compte que la calor flueix en sentit contrari al gradient de temperatura amb una intensitat proporcional a la magnitud d'aquest gradient (llei de Fourier), és a dir, que el paper que més amunt feia la quantitat $\rho\mathbf{u}$, ara el farà la quantitat $-\kappa\ \mathbf{grad}\, T$, on κ és una magnitud positiva característica del medi anomenada conductivitat tèrmica. Seguint un procés completament anàleg al de més amunt resulta llavors la següent equació diferencial

$$\mathcal{D}_t \epsilon = \operatorname{div}(\kappa\ \mathbf{grad}\, T) \qquad (26)$$

on ϵ representa la densitat d'energía interna. Si no tenen lloc reaccions químiques ni canvis de fase, llavors la variació d'energia interna s'inverteix en un augment de la temperatura segons la relació $d\epsilon = c\, dT$, on c és una magnitud característica del medi anomenada calor específica. En tal cas, l'equació precedent es transforma en la següent

$$\mathcal{D}_t T = \frac{1}{c} \operatorname{div}(\kappa\ \mathbf{grad}\, T), \qquad (27)$$

i si suposem κ constant i posem $a^2 \equiv \kappa/c$, s'obté l'anomenada equació de la calor:

$$\mathcal{D}_t T = a^2\ \Delta T \qquad (28)$$

L'equació de continuïtat (25) va ser obtinguda per primera vegada per Euler (1755), i l'equació de la calor (28) va ser obtinguda per Fourier en un treball presentat a l'Acadèmia de Ciències de Paris l'any 1807, encara que no publicat fins el 1822. Com es podrà apreciar, aquestes dates són bastant anteriors als treballs de Gauss i Ostrogradskiĭ que hem comentat més amunt, de manera que, o bé les deduccions de Euler i Fourier procedien per un camí diferent, o bé el teorema de la divergència és més vell del que en pensem.

En el cas d'Euler i l'equació de continuïtat es tracta efectivament d'un camí diferent: enlloc de parar l'atenció en una regió d'espai fixa, Euler considera l'evolució d'un troç de fluid al llarg del seu moviment.

En el cas de Fourier no és pas la mateixa cosa, sinó que d'alguna manera el seu raonament conté un germen del teorema de la divergència. Per deduir l'equació de la calor, Fourier fa balanç de l'energia interna sobre una regió d'espai fixa; la diferència respecte al raonament que hem seguit nosaltres és que aquesta regió la pren de grandària infinitessimal i amb una forma particular. En cada punt de l'espai, Fourier considera el que ell en diu una "molècula prismàtica", que ve a ser un ortoedre ω d'arestes infinitessimals amb un vèrtex sobre el punt en qüestió. Les tres arestes que conflueixen en aquest vèrtex les prendrem com a definidores dels eixos x, y, z d'un sistema de coordenades rectangular; les longituds de les corresponents arestes de l'ortoedre les anomenarem respectivament dx, dy, dz. Fent balanç de l'energia de la manera que hem indicat més amunt s'arriba a l'equació següent,

$$\int_{\omega} \mathcal{D}_t \epsilon \; dV \;=\; - \int_{\partial\omega} F_n \; dS \qquad (29)$$

on $\mathbf{F}$ denota el camp vectorial $-\kappa\,\mathbf{grad}\,T$, i ω denota l'ortoedre infinitessimal (compari's amb l'equació (23)).

Ara no disposem del teorema de la divergència, però com que l'ortoedre ω és infinitessimal, el valor de $\mathcal{D}_t\epsilon$ es pot prendre com a constant i $\mathbf{F}$ es pot suposar una funció lineal de x,y,z; en tals condicions es poden calcular explícitament les dues integrals de (29): la primera dóna immediatament el resultat $\mathcal{D}_t\epsilon\,|\omega|$, on $|\omega|$ representa el volum de ω; la segona requereix uns quants càlculs després dels quals s'arriba al següent resultat

$$\int_{\partial\omega} F_n \; dS \;=\; (\mathcal{D}_x F_x + \mathcal{D}_y F_y + \mathcal{D}_z F_z)\,|\omega| \qquad (30)$$

Aplicant aquests dos resultats, l'equació (29) es transforma en l'equació (26), d'on es dedueix l'equació de la calor.

L'anterior raonament suggereix una tàctica per a demostrar el teorema de la divergència diferent de la de Gauss. La idea és aproximar la regió Ω mitjançant un mosaic de petits ortoedres ω_i; si sumem les relacions (30) corresponents a tots aquests ortoedres obtenim el següent

$$\sum_i \int_{\partial\omega_i} F_n \; dS \;=\; \sum_i \,(\mathcal{D}_x F_x + \mathcal{D}_y F_y + \mathcal{D}_z F_z)_i \,|\omega_i| \qquad (31)$$

Ara bé, en el primer membre d'aquesta igualtat resulta que sempre que dos ortoedres ω_i i ω_j tenen un troç de frontera comú, el flux a través d'aquest troç és comptat dues vegades, una vegada amb signe més i l'altra amb signe menys. Així doncs, està clar que aquest primer membre el podem substituir de la manera següent:

$$\int_{\Sigma} F_n \, dS = \sum_i (\mathcal{D}_x F_x + \mathcal{D}_y F_y + \mathcal{D}_z F_z)_i \, |\omega_i| \qquad (32)$$

on Σ denota la superfície exterior a tot el mosaic d'ortoèdres. Si ara anem refinant aquest mosaic, fent que els seus components siguin cada vegada més petits, i que el total s'aproximi cada vegada més a Ω, resulta que en el límit la relació anterior es transforma en el teorema de la divergència (també és veritat però, que això es diu molt de pressa i en canvi fer-ho de manera rigorosa dóna bastant de feina).

La relació (30) es pot considerar una versió local del teorema de la divergència. En general, si prenem la fórmula (1) que expressa el teorema en la forma usual, apliquem el teorema del valor mig al primer membre, i considerem el límit quan el domini tendeix a un punt, llavors obtenim la relació següent

$$\mathcal{D}_x F_x + \mathcal{D}_y F_y + \mathcal{D}_z F_z = \lim_{\delta(\omega)\to 0} \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} F_n \, dS \qquad (33)$$

on $\delta(\omega)$ denota el "diàmetre" de ω és a dir el suprem de les distàncies entre dos punts de ω. Aquesta fórmula ve a expressar el mateix que (30) però sense l'ús d'infinitèssims i sense la restricció que allà teniem de que els dominis ω fossin ortoedres amb arestes paral·leles als eixos. Ja que el segon membre de (33) no fa referència a cap sistema de coordenades, aquesta relació mostra que el valor de l'expressió $D_x F_x + D_y F_y + D_z F_z$ no depèn pas del sistema de coordenades que estiguem utilitzant. Evidentment, aquesta propietat és molt significativa, doncs el sistema de coordenades és una cosa que posem nosaltres, i per tant no te res d'inherent al camp **F**. La manera d'entendre la divergència sense coordenades és tal com diu el segon membre de (33): si considerem una regió ω cada vegada més petita entorn d'un punt, la divergència de **F** en aquell punt és el límit a que tendeix el quocient entre el flux a través de $\partial\omega$ i el volum de ω; dit d'una altra manera, la divergència és la densitat corresponent a la variable aditiva que a cada regió li associa el flux a través de la seva superfície; una altra manera d'expressar això és dir que la divergència d'un camp a un punt representa la contribució d'aquest punt al flux a través d'una superfície que l'envolti. La veritat és que el nom donat per Maxwell s'hi adiu força.

Les consideracions precedents fan molt temptador de prendre com a definició de divergència el segon membre de (33) enlloc del primer. Tanmateix, això te el problema de que la successió d'oberts ω que apareix al segon membre de (33) es pot escollir de moltes maneres diferents, i per tant, per a que la definició fos coherent, hauriem de garantir que el resultat no depèn de la manera concreta en què es faci l'elecció. Al final ens trobariem que hauriem de començar prenent els ω d'un tipus concret (per exemple ortoedres), i per a veure que al fer una altra elecció surt el mateix resultat no hi hauria més remei que demostrar abans el teorema de la divergència; així doncs, la situació no és pas millor que la que trobem al prendre com a definició el primer membre de (33).

REFERÈNCIES (per ordre cronològic)

Fourier, J., 1807. Théorie de la chaleur dans les solides. Manuscrit presentat a l'Académie des Sciences de Paris, el 21 de desembre de 1807 / Publicat a "Joseph Fourier" (I. Grattan-Guinness, MIT Press, 1972) : 33-440.

Gauss, K.F., 1813. Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogenorum methodo novo tractata. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, 2 / = Werke (K.Gesell. Wissen., Göttingen,) V:1-22.

Ostrogradskiĭ, M.V., 1826. Démonstration d'un théoreme du calcul intégral. Manuscrit presentat a l'Académie des Sciences de Paris el 13 de febrer de 1826 / Trad. russa : Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya 16:49-64 (1965).

Ostrogradskiĭ, M.V., 1827. Mémoire sur la propagation de la chaleur dans un corps rigide. Manuscrit presentat a l'Académie des Sciences de Paris el 6 d'agost de 1827 / Trad. russa: Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya 16:65-96(1965).

Ostrogradskiĭ, M.V., 1928. Note sur la théorie de la chaleur. Manuscrit presentat a l'Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbourg el 5 de novembre de 1828. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint Petersbourg (6) 1:129-133 (1831).

Green, G., 1828. An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottinham, T. Wheelhouse / = Journal für die reine und angewandte Mathematik 39:73-89 (1850), 44:356-374(1852), 47:161-221 (1854).

Sarrus, F., 1828. Mémoire sur les oscillations des corps flotans. Annales de Mathématiques Pures et Appliquées (Nîmes) 19:185-211.

Poisson, S., 1829. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France 8:357-571.

Maxwell, J.C., 1873. A Treatise on Electricity and Magnetism (2 vols.). Oxford, Clarendon Pres / = Dover, New York (1954).

Protter, M.H., i Morrey, C.B., 1977. A First Course in Real Analysis. Springer-Verlag, New York.