

2. CRÍTICA DELS PLANTEJAMENTS DOMINANTS A L'ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES

1. De com les matemàtiques esdevinqueren modernes.

Els plantejaments actualment dominants a l'ensenyament de les matemàtiques són el fruit de la reforma que imposà les matemàtiques dites modernes. Aquesta reforma fou, d'alguna manera que després precisarem, una seqüela del punt de vista formalista i estructuralista que havia esdevingut hegemònic a l'ensenyament superior. Com que a hores d'ara també ho és a l'ensenyament bàsic i mitjà -almenys pel que es veu a la gran majoria de llibres de text i de recerques didàctiques- caldrà que ens aturem un moment a fi de citar-ne els trets més essencials.

S'ha dit moltes vegades que el punt de vista bourbakista està molt a prop de la matemàtica dita clàssica. De fet l'esperit, la concepció bàsica, és la mateixa que Lakatos caracteritzava així:

"Durant dos cents anys, l'epistemologia clàssica ha conformat el seu ideal d'una teoria, científica o matemàtica, en la seva concepció de la geometria euclídiana. La teoria ideal és un sistema deductiu amb una veritat indubtable injectada a dalt de tot (una conjunció finita d'axiomes) de manera que la veritat, fluint des de dalt a través de les se- gures canonades conservadores de la veritat que són les inferències vàlides, inunda la totalitat del sistema". (1)

Es aquesta afinitat profunda amb la filosofia de les matemàtiques de tota la vida la que explica la dèria dels bourbakistes de fer les matemàtiques un sistema deductiu, complet, rigorós, conceptualment econòmic i formalment estètic.

Les novetats que oferí el nou enfocament: a) Un considerable embalum de noms i signes novíssims; b) la revalorització de la teoria de conjunts a partir de la idea que oferia una bona fonamentació (en el sentit de la cita anterior); c) una nova organització dels continguts pensada fonamentalment per encabir-los dins del sistema deductiu que acabem d'esmentar. Això tingué dues repercussions serieres: va revaloritzar les estructures algebraiques per la seva considerable capacitat de síntesi (i d'aquí que algú, enlluernat, arribés a dir que les matemàtiques eren l'estudi de les estructures formals), al mateix temps que desvaloritzava els conceptes i les parts de les matemàtiques de caire més instrumental (doncs acostumen a aparèixer com ramificacions dels nuclis teòrics importants); i d) la pretensió inconfessada que ara sí que, gràcies als nous formalismes i definicions, a la teoria de conjunts i a la cura amb que s'havien refet les demostracions, que gràcies a tot això ara sí que ja tot era veritat.

Un dels arguments principals pels teòrics de la reforma de les matemàtiques modernes fou aquest sentiment que ara sí que ja tot és clar. Com deia un dels seus partidaris, R. Godement:

"Moltes persones, i sobretot les que es limiten a utilitzar les matemàtiques, pretenen que quan s'escriu per a principiants, és inútil, i fins i tot perjudicial, ésser rigorós, demostrar-ho tot, introduir nocions massa generals i utilitzar una terminologia estrictament definida. Si aquestes persones tinguessin raó, resultaria que, a diferència dels matemàtics professionals i contra el que és de sentit comú, els principiants comprenen molt millor un text quan més mal escrit estigui." (2)

Pels partidaris d'aquella reforma, els nombrosos fracassos que es produïen en l'aprenentatge de les matemàtiques eren deguts, de forma principalíssima, a les presentacions clàssiques, defectuoses per la seva falta de definicions prou precises, de formalismes adequats, de conceptes no prou generals i per les seves

inferències no sempre prou rigoroses. En suma, per l'absència d'una estructura deductiva com cal. Però ara que ja tot era veritat, ara ja es podia posar fi a aquesta situació: no calia si nó oferir als estudiants aquell sistema inundat de veritat indubtable que, per això mateix, cap intel·ligència normalment constituïda podia deixar d'entendre.

Seria injust no dir, finalment, que aquest moviment de reforma que ara estem criticant entre altres coses pretenia aconseguir, d'aquesta manera, que l'aprenentatge de les matemàtiques col·laborés de forma destacada a l'educació general dels alumnes com l'instrument més adequat per la formació i el desenvolupament d'hàbits de pensament deductiu, abstracta i rigorós. Doncs el primer deure dels matemàtics, deia Godement, era proporcionar "homes capaços de reflexionar per ells mateixos, de despreciar els arguments falsos i les frases ambigües, pels quals la difusió de la veritat importa molt més que, per exemple, la Televisió planetària en colors i en relleu: Homes lliures i no tecnòcrates-robot." (3)

2. Les raons d'un fracàs.

No és necessari cap preàmbul per afirmar que les matemàtiques modernes, com reforma didàctica, han estat un fracàs més aviat estrepitós, baldament en aquest país tan ràpid de reflexos encara gaudeixin d'uns quants addictes. El fracàs es pot veure, i viure, cada dia a les aules, especialment a les de l'E.G. B.. Però sí que cal intentar-se explicar per què una reforma tan ben intencionada, i que es creia tan ben fonamentada, ha estat infructuosa.

Les definicions formalitzades. Un dels punts febles de les versions didàctiques del bourbakisme és la identificació tàcita entre el concepte que es pretén ensenyar i la seva definició formalitzada. És aquesta una convicció sorprenent perquè la història de les matemàtiques dóna un seguici de contra-exemples. De fet la majoria dels conceptes -tots llevat dels introduïts en els darrers 100 anys, que són els que no apareixen sinó a la Universitat- van ser utilitzats durant molts anys sense haver es

tat definites; i quan ho eren, a més a més, les definicions sofriren un procés de reelaboracions que sovint durava molts anys. Un concepte científic, per simple que sigui, mai està contingut dins d'una definició. Per això la seva comprensió-assimilació no és un acte puntual, sinó el procés de descobriment de les seves diferents formes de funcionament, de les seves propietats i de les seves relacions amb d'altres conceptes. Potser quedarà més clar el que volem dir amb el següent exemple. Abans de disposar de les definicions modernes i rigoroses dels conjunts N , Z , Q i R (que no tenen més de 100 anys), ja s'utilitzaven correctament totes aquestes classes de nombres dins de límits que no sembla que un alumne de E.G.B. hagi d'ultrapassar. En canvi aquestes definicions, més o menys empastifades de pinzellades didàctiques, es van considerar necessàries per introduir l'estudi dels conjunts numèrics.

El mite de la generalització. Una concepció molt lligada a l'anterior fa que els conceptes es presentin de la manera més general possible. Així, per parlar d'espais vectorials (encara que només es fagin servir els R^n i quan n és petit) cal parlar de grups i operacions externes; les progressions sempre hauran de ser casos particulars de successions, i les variacions s'han de considerar aplicacions, etc., etc.. Les relacions jeràrquiques entre els conceptes en funció del seu grau de generalitat constitueixen, no cal dir-ho, un dels aspectes més fructífers del pensament matemàtic (i no matemàtic). Aquesta és, precisament, una de les raons per les quals la majoria dels professors de matemàtiques tenim una tendència molt marcada a fer aquesta mena de presentacions.

Però des del punt de vista de l'aprenentatge és erroni pensar que quan més abstracta i general és la definició, més fàcil resultarà comprendre el concepte corresponent, doncs, ni es pot oblidar l'existència d'un contingut intuïtiu que ha de ser assimilat prèviament a qualsevol definició formal, ni deixar d'advertir que la inclusió d'un concepte dins d'una categoria més general és en si mateix una dificultat nova que, en general, complica més les coses que no pas les facilita.

Els conceptes estructurals. Un altre dels entrebancs artificials que les matemàtiques modernes afegeixen a l'ensenyament és el lloc totalment desproporcionat que concedeixen als conceptes estructurals.

En els nivells no universitaris aquests conceptes no aporten ni afegeixen res als conjunts numèrics, als polinomis o a qualsevol altre dels temes on els fan sortir. Es la fe, que ja hem analitzat, en el poder taumatúrgic de la formilització i la generalització la que fa que de conjunts dels quals els alumnes coneixen, o malconeixen, quatre propietats elementals s'en dongui a corre-cuita la caracterització com estructura algebraica. Com que això no ajuda a "moure's" millor dins d'aquests conjunts, hem de pensar que té un valor per se el coneixement de l'estructura. Encara que fos així, no podem oblidar que cap de les estructures algebraiques que els programes actuals pretenen ensenyar a l'E.G.B. o al B.U.P. van sorgir per caracteritzar els conjunts que s'ofereixen com models trivials de les mateixes. Es per això que, a més a més d'artificial (llegeixi's incompreensible, sense sentit per l'alumne), seria ineficaç estudiar conceptes que no es justifiquen sinó en presència de models molt més complicats.

Les tècniques de càlcul i els recursos algorísmics. L'interès per que els alumnes sàpiguen el que són els nombres enters, o els nombres complexos, o els polinomis, o les funcions, etc.; acompanya en molts de casos a una actitud indiferent o tolerant cap a la necessitat que sàpiguen com manejar-los, com utilitzar-los. Si bé es mira, això és una conseqüència gairebé normal dels plantejaments que estem analitzant: Com pot ser que els alumnes tinguin dificultats sumant fraccions si s'els hi ha explicat acuradament i rigurosament la suma de nombres racionals i s'han demostrat amb tots els ets i uts les propietats d'aquesta operació

El que pot passar quan aquest punt de vista es porta a les últimes conseqüències és que les tècniques de càlcul aritmètic o algebraic esdevenen receptoris o algorismes misteriosos (un arquetip dels quals seria el mètode dit de Ruffini per descomposar polinomis) tractats molt descuidadament, des del punt de vista didàctic,

simplement perquè no es pensa en el contingut conceptual que té la més simple de les notacions o dels artificis de càlcul. Donar un contingut, per exemple, a les operacions amb fraccions dins de l'E.G.B. és una cosa que es pot fer, que s'ha de fer i que no és en absolut una conseqüència que s'imposarà per si mateixa un cop que les operacions estiguin definides formalment. Al contrari, aquestes definicions, i les que les hauran precedit per arribar amb tot rigor al nombre racional, hauran estat per la majoria dels alumnes un galimaties inaccessible.

Les matemàtiques, el mètode deductiu i la intel·ligència. Ja hem dit que dels arguments majors dels adeptes a l'enfocament deductiu formalista és que per l'alumne, per la seva capacitat d'utilitzar el mètode deductiu, per força ha de ser profitós l'estudi de les cadenes deductives que constitueixen, pels adeptes esmentats, el nucli de l'assignatura.

De fet, però, qualsevol teoria (axiomàtica o no) és el resultat final d'un procés d'elaboració de coneixements -construcció de conceptes, verificació formal o empírica de relacions, etc.- que no han estat, com a tal procés, una cadena de deduccions. La psicologia ha demostrat que nombrosos matemàtics creadors havien dit molt abans: la intel·ligència, entesa com la capacitat de creació intel·lectual, no funciona deductivament. Per dir-ho amb paraules de Galois:

"Vanament els analistes voldrien amagar-s'ho: ells no dedueixen pas, ells combinen, componen: tan inmaterial com és l'anàlisi i no és pas més en poder nostre que d'altres; cal espigar-la, sondejar-la, sol·licitar-la. Quan arriben a la veritat, és xocant d'aquest costat i de l'altre que hi arriben a caure". (4)

Quedi clar, doncs, que si per mètode o pensament deductiu es fa referència a l'utilització exclusiva de deduccions, s'està fent referència a una entelèquia inexistente. La confusió entre la forma final d'una teoria axiomatitzada (final, però, sempre provisional perquè tard o d'hora serà contestada, ampliada o reformada) i el seu procés de creació cal relacionar-la amb la confusió, ja criticada, dels conceptes amb llur definició formalitzada

Ambdues coses revelen que s'està confonent la lògica del pensament real amb la lògica formal.

Ja direm més endavant alguna cosa sobre com el desenvolupament de la lògica real condiciona l'aprenentatge. Senyalem ara per ara que un ensenyament basat en l'estructuració formal i deductiva, com que no té en compte les característiques del desenvolupament intel·lectual real de l'alumne, que depèn de l'edat, genera tot sovint conflictes de inadequació entre resultats matemàtics i capacitat intel·lectual. En particular mai no té en compte les dificultats i els obstacles reals, d'ordre epistemològic, que cal vèncer per adquirir els coneixements transmesos i que, en general, no tenen res a veure amb les dificultats que sorgeixen a l'hora d'encabir-los dins d'una estructura formal i deductiva.

Fins aquí hem destriat alguns dels inconvenients didàctics que presenta l'ensenyament de les matemàtiques quan pren la perspectiva que domina l'ensenyament universitari. Altres inconvenients de caire més pedagògic deriven de la visió falsa o incompleta que de les matemàtiques, i de les seves relacions amb les altres ciències, transmet aquest tipus d'actitud de l'alumne.

La història ensenya prou bé que el treball dels matemàtics no ha estat inspirat per la construcció de sistemes axiomàtics sinó secundàriament, i que els conceptes i les teories més fructífers mai no han sorgit dels esforços de reorganització deductiva: el desenvolupament de les matemàtiques, que no té res de gratuït o d'arbitrari, s'ha fet a partir de problemes o bé externs (plantejats per d'altres ciències) o bé sorgits de la pròpia dinàmica del seu desenvolupament. Aquesta realitat queda totalment desfigurada amb els plantejaments bourbakistes, incapaços de donar cap motivació que no sigui, en el millor dels casos, purament formal. En particular les aplicacions de la matemàtica (per exemple, la introducció a l'Astronomia) han quedat molt desplaçades dins l'escala de valors de les matemàtiques modernes, essent així que els hi correspon jugar un paper important a l'hora de donar als alumnes elements per comprendre els mecanismes de la recerca i el coneixement científic.

Podem acabar, sense més comentaris, amb les següents paraules de Puig Adam:

"El interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa de la parte activa que toma él mismo en su adquisición. En matemáticas, concretamente, las síntesis euclídeas resolvieron el problema de sistemática transmisión de conocimientos matemáticos, separando totalmente la transmisión de la génesis. La solución, perfecta o casi desde un punto de vista lógico, era equivocada desde un punto de vista psicológico, porque la síntesis, al ocultar hipócritamente todo el proceso activo de elaboración, en el que radica la génesis del conocimiento transmitido, pierde en vitalidad, en interés y en eficacia formativa, lo que gana en valores estrictamente lógicos. Por muy elevado que sea el concepto que el alumno tenga de su maestro, difícilmente se interesará en recibir pasivamente los productos elaborados a través de procesos sintéticos, en los cuales él no ha tomado arte ni parte". (5)

Antoni Malet