

OLIMPIÁDA MATEMÁTICA 1983

A continuació reproduïm els exercicis plantejats a la darrera Olimpíada Matemàtica:

1.- Trobeu totes les funcions f , definides en el conjunt dels nombres reals estrictament positius, que prenen valors reals estrictament positius i que compleixen les condicions:

- i) $f(xf(y)) = yf(x)$ per a tot x i y positius
- ii) $f(x) \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow +\infty$

2.- Determineu els triangles tals que l'altura i la media na concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

3.- Demostreu que si la funció $f(x)$ és contínua, positiva i decreixent per a $x \geq 0$ i compleix

$$x \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = s.$$

aleshores

$$x \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$$

4.- Donat un triangle A, B, C considerem el triangle A_1, B_1, C_1 que té els vèrtexs sobre els costats oposats a A, B, C , respectivament i els seus costats són perpendiculars als costats del primer triangle. Calculeu la raó d'àrees dels dos triangles en funció dels angles del triangle A, B, C .

5.- Trobeu el mínim nombre natural m tal que $m!$ és divisible per 7^{1983} .

6.- Donat un triangle equilàter considerem les rectes que passen pel punt mig d'un costat. Estudieu la variació de la longitud dels segments d'aquestes rectes interceptats pel triangle.