PERIODES DE LES APLICACIONS CONTÍNUES

DE L'INTERVAL I DEL CERCLE

Jaume Llibre

En aquesta nota veurem que l'estructura del conjunt de periodes de les aplicacions continues de l'interval i del cercle en ell mateix es coneix completament. Mentre que per a les aplicacions continues de qualsevol altre graf (com dos cercles enganxats per un punt, o un conjunt en forma de Y,...) és un problema obert.

1. L'interval

Sigui $C(I)$ l'espai de les aplicacions continues de l'interval tancat I en ell mateix. Sigui $x \in I$, direm que x és un punt periòdic de $f \in C(I)$ de periode n si $f^n(x)=x$ i $f^k(x) \neq x$ per $k = 1,2,\ldots,n-1$. Definim l'òrbita de x com $\{f^n(x) : n = 0,1,2,\ldots\}$.

Sigui $P(f)$ el conjunt dels enters positius n pels que f té un punt periòdic de periode n. $P(f)$ és un subconjunt de $\mathbb{N}$, el conjunt dels naturals.

Considerem a $\mathbb{N}$ l'ordre de Sarkovskii

$$3\to 5\to 7\to \ldots\to 2.3\to 2.5\to 2.7\to \ldots\to 4.3\to 4.5\to 4.7\to \ldots\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1.$$

Afegim el simbol 2^{∞} davant de totes les potències de 2, i obtenim un ordre en el conjunt $\mathbb{N}\cup\{2^{\infty}\}$. Amb aquest ordre el supreme de $\mathbb{N}\cup\{2^{\infty}\}$ és 3 i l'ínfim és 1.

Siguin $S_s = \{n \in \mathbb{N} : s \rightarrow n\}\cup\{s\}$ per a tot $s \in \mathbb{N}$ i $S_{2^\infty}=\{1,2,4,8,\ldots\}$. Aquests conjunts seran anomenats conjunts de Sarkovskii.

<u>*Teorema 1.*</u> *(1) Si* $f \in C(I)$ *llavors existeix* $s \in \mathbb{N}\cup\{2^{\infty}\}$ *tal que* $P(f) = S_s$.

(2) Per a tot conjunt de Sarkovskii S_s *existeix* $f \in C(I)$ *tal que* $P(f) = S_s$.

(3) Sigui $C(I)$ *l'espai topologic amb la topologia donada per la convergencia uniforme. Si* $f \in C(I)$ *i* $P(f) = S_s$ *amb* $s \neq 1$, *llavors existeix un entorn* V *de* f *a* $C(I)$ *tal que per a tota* $g \in V$, $P(g) \supset S_{\overline{s}}$ *on* $\overline{s}$ *és el seguent de* s *amb l'ordre de Sarkovskii.*

<u>*Corol.lari 2.*</u> *Sigui* $f \in C(I)$. *Llavors*

(1) $3 \in P(f)$ *si i sols si* $P(f) = \mathbb{N}$.

(2) Si $P(f)$ *és finit llavors existeix* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $P(f) = S_{2^n}$

Notem que l'ordre de Sarkovskii és suficient per descriure l'estructura del conjunt de periodes de les aplicacions continues de l'interval.

2. El cercle

Sigui $C(S^1)$ l'espai de les aplicacions continues del cercle en el mateix. Pensarem en el cercle com el conjunt de punts del pla complexe amb mòdul igual a 1.

Sigui $e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ l'aplicació $e(X) = \exp(2\pi iX)$. Llavors direm que $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una elevació de $f:S^1\rightarrow S^1$ si el següent diagrama és commutatiu

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "e"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\
S^1 \arrow[r, "f"] & S^1
\end{tikzcd}
$$

Es clar que f i F han de ser contínues.

Si F i F' són dues elevacions de f, llavors $F = F' + k$ per algun enter k. Existeix un enter G tal que $F(X+1) = F(X) + G$ per a tot $X \in \mathbb{R}$. G s'anomena el grau de f i es denota grau(f).

Sigui $C_G(S')$ l'espai de les aplicacions contínues del cercle en ell mateix de grau G.

(2.1) Resultats sense utilitzar el grau de l'aplicació $f \in C(S^1)$

Veurem que per descriure l'estructura del conjunt de periodes de les aplicacions $f \in C(S^1)$ necessitarem dos ordres, l'ordre de Sarkovskii i l'ordre usual.

Sigui $B_b = \{n \in \mathbb{N} : b < n\} \cup \{b\}$. Aquests conjunts seran anomenats de Block.

Teorema 3. *(1) Si* $f \in C(S^1)$ *i* $1 \in P(f)$ *llavors existeix* $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ *i* $b \in \mathbb{N}$ *tal que* $P(f) = S_s \cup B_b$.

(2) Per a tot conjunt de Sarkovskii S_s *i conjunt de Block* B_b *existeix* $f \in C(S^1)$ *tal que* $P(f) = S_s \cup B_b$.

Corol.lari 4 *Sigui* $f \in C(S^1)$. *Llavors* $\{1,2,3\} \subset P(f)$ *si i sols si* $P(f) = \mathbb{N}$.

Notem que el Teorema 3 ens dona l'estructura de $P(f)$ només quan l'aplicació f tingui punts fixos.

(2.2) <u>Resultats utilitzant el grau a l'aplicació $f \in C(S^1)$</u>

Sigui $f \in C(S^1)$. Se sap que el nombre de punts fixos de f és més gran o igual que $|\text{grau}(f) - 1|$. Per tant, si el grau $(f) \neq 1$ llavors $1 \in P(f)$.

El resultat següent se segueix facilment del Teorema 3.

<u>Corol.lari 5</u>. *Sigui* $f \in C(S^1)$ *i suposem que grau* $(f) \neq 1$. *Llavors*

$$P(f) = \begin{cases} \mathbb{N} - \{2\} & \textit{si grau}(f) = -2 \text{ i } 2 \notin P(f) . \\ S_s & \textit{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

A més, $P(f) = S_s = \mathbb{N}$ *si grau* $(f) \notin \{-2,-1,0,1\}$.

Per tant, només ens queda per a estudiar l'estructura de $P(f)$ quan f és de grau 1.

Sigui $f \in C_1(S^1)$ i F una elevació de f. Com que grau $(f) = 1$ tenim que $F(X+1) = F(X)+1$ per a tot $X \in \mathbb{R}$. Si $x \in S^1$ és un punt periòdic de f de periode n i $e(X)=x$ amb $X \in \mathbb{R}$, llavors $F^n(X) = X + k$ on k és un enter. Direm que $\frac{k}{n}$ és el nombre de rotació del punt x, i el denotarem per $\rho(x)$ o $\rho_F(x)$. Es pot comprovar que

$$\rho_F(x) = \lim_{m \to \infty} \frac{F^m(X)-X}{m}$$

Escriurem $L(f)$ o $L_F(f)$ per al conjunt de tots els nombres de rotació. Es pot demostrar que $L_F(f) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ amb $a, b \in \mathbb{R}$. Per tant, direm que $L_F(f)$ és un interval de rotació de f.

Sigui $f \in C_1(S^1)$ i $L_F(f) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Si $a \in \mathbb{Q}$ i

$a = {}^{p}/_{q}$ amb $(p,q) = 1$, llavors definim $S(a) = q\, P(F^q - p)$, on $P(F^q - p)$ és el conjunt de pèriodes de l'aplicació $F^q - p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, i per tant és un conjunt de Sarkovskii. El Teorema 1 és vàlid per a qualsevol interval I sempre que $f : I \longrightarrow I$ tingui punts fixos. Si $a \notin Q$ llavors definim $S(a) = \emptyset$. Similarment, si $b \in Q$ i $b = {}^{r}/_{s}$ amb $(r,s) = 1$, llavors definim $S(b) = s.P(F^s - r)$; i si $b \notin Q$ llavors $S(b) = \emptyset$.

Sigui $M(a,b) = \{n \in \mathbb{N} : a < {}^{k}/_{n} < b$ per a algun k enter$\}$. És clar que $M(a,b) = \emptyset$ si $a = b$.

El teorema següent completa la classificació de l'estructura del conjunt de periodes de les aplicacions continues del cercle en ell mateix.

Teorema 6. (1) Sigui $f \in C_1(S^1)$ *amb* $L(f) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$. *Llavors* $P(f) = S(a) \cup M(a,b) \cup S(b)$.

(2) Per a qualsevol $S(a) \cup M(a,b) \cup S(b)$ *existeix* $f \in C_1(S^1)$ *tal que* $L(f) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ *i* $P(f) = S(a) \cup M(a,b) \cup S(b)$.

Corol.lari 7. Sigui $f \in C(S^1)$. *Si* $P(f)$ *és finit llavors existeixen* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i* $m \in \mathbb{N}$ *tals que* $P(f) = \{m, 2m, 4m, \ldots, 2^n m\} = m\, S_{2^n}$

Corol.lari 8. Sigui $[a,b]$ *un interval amb* $a \neq b$. *Llavors existeix* $r \in \mathbb{N}$ *i un subconjunt finit* H *dels naturals tal que*

$$M(a,b) = B_r \cup \left(\bigcup_{h \in M} \{ n \,.\, h : n \in \mathbb{N} \} \right).$$

Tots aquest resultats proven que per descriure l'estructura del conjunt de periodes de les aplicacions continues del cercle en el mateix, només necessitem dos ordres, l'ordre de Sarkovskii i l'usual.