QUÈ FEM AMB LA BASE DOS?

Mª Lluïsa Fiol*
i Miquel A. Fiol**

* Escola de Mestres de Sant Cugat de la U.A.B.

** Escola Tec. Sup. d'Enginyers de Telecomunicació de la U.P.B.

I. INTRODUCCIÓ

El mínim nombre de símbols que es necessiten a un sistema de numeració posicional, són dos: "0" i "1" (sistema binari). Aquest sistema, construit sobre les potències de dos, va ser conegut pels matemàtics xinesos ja a l'antiguitat però el primer que el va desenvolupar amb detall va ser Leibniz (1646-1716). Els matemàtics després de Leibniz dedicaren poca atenció al tema, i de fet cal arribar a Boole per retrobar la importància de llenguatges que utilitzen sols dos signes. Fita del treball de Boole és la publicació a 1854 del llibre: "Una investigació de les lleis del pensament"[2].

A Matemàtiques Recreatives el sistema binari s'utilitza en el joc de Nim, i a alguns trencaclosques com el de la Torre de Hanoi, així com a algun truc de cartes i al joc de "transmissió de pensament" [1].

Nota: Els editors del "Butlletí" lamenten que aquest article va aparèixer al nº 15 amb errors de compaginació que en dificultaven la lectura. És per això que el tornem a publicar en aquest butlletí.

Actualment, en l'estudi de les equacions funcionals té importància l'expressió en base dos dels nombres reals de l'interval $[0,1]$ com sèries de la forma $\sum_{i \in N^*} \frac{a_i}{2^i}$, $a_i \in \{0,1\}$. Això simplifica els càlculs i també algunes demostracions - per exemple, sobre caracteritzacions de les equacions funcionals convexes.

A informàtica, l'escriptura dels nombres en base dos, és un llenguatge quotidià. L'economia de signes del sistema binari permet representar nombres utilitzant dispositius físics molt senzills que puguin existir en qualsevol de dos estats estables. Per exemple, un interruptor pot estar obert o tancat, un corrent elèctric circula o no, un imant pot estar polaritzat sud-nord o nord-sud.[4]

Aquets fets han donat lloc al gran desenvolupament de les computadores digitals i amb elles, a tot el creixement tecnològic que això comporta [3]. Cada vegada amb més frecuència, els cursos de Matemàtiques a l'escola estan incloent temes d'Informàtica, i per tant, l'estudi del sistema binari. I és cert que aquest tema està explícitament posat al programa oficial del cicle mitjà.

II. DIFICULTATS A NIVELL DIDÀCTIC

Dintre dels sistemes de numeració, la base dos és la que presenta més problemes a nivell didàctic, precisament pel fet de que sols utilitza dos signes. Bàsicament, aquets problemes són:

a - Els dos signes utilitzats: 0 i 1, ja tenen per a l'alumne tota una significació "afectiva" lligada amb l'expressió decimal dels nombres, que ja coneix. Per una part, aquets signes aïllats representen "ben poca cosa", i per l'altra, junts donen lloc a nombres tan "importants", amb tanta personalitat pròpia, com 10, 11, 100, 1000 etc...

b - Al treballar sols amb dos signes -i no amb deu- els nombres, és a dir la seva representació, prenen un aspecte d'uniformitat estrany i difícil d'acceptar, en principi.

c - En base dos els nombres "creixen" es fan "grans" molt ràpidament: s'han d'escriure molts 1's i/o molts 0's per nombres que en base deu tenen sols dues o tres xifres.

III. TREBALL A DIFERENTS NIVELLS.

Com podríem treballar la base dos a diferents nivells?. Hi ha uns criteris didàctics a tenir en compte davant de qualsevol sistema de numeració. És clar que aquí ens interessen els sistemes de numeració posicionals i, per tant, ja desde el cicle inicial, es poden treballar dos aspectes:

1 - Les agrupacions

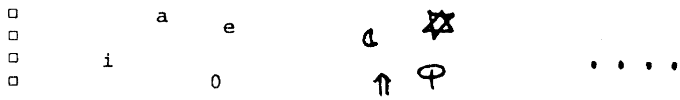
2 - Les codificacions

1 - En primer lloc, donada una col·lecció d'objectes i quan l'alumne ja té un cert coneixement dels nombres escrits en base 10 -la qual cosa vol dir a finals del primer nivell o principis del segon-, es poden agrupar de forma que en cada grup, hi hagi un mateix nombre d'elements, així per exemple, de 2 en 2, o de 5 en 5 -treball amb duros i pessetes- o de 6 en 6 -amb 6 triangles equilàters formar un hexàgon- etc...

2 - Però el segon pas és la codificiació. Cal tenir en compte que escriure un nombre en una base qualsevol, de fet és codificar de forma diferent, o sigui, representar objectes o propietats utilitzant diferents signes.

Aquesta idea està subjacent en el treball que fa l'alumne des que comença a treballar el nombre natural.

Per exemple, totes aquestes col·leccions



tenen una propietat comú que podem representar amb els signes: |||| , 4, quatre, o amb un altre, sempre que ens posem d'acord amb el conveni.

Això vol dir que per fer un treball coherent sobre sistemes de numeració, s'hauria de començar per escriure utilitzant diferents signes gràfics, per exemple enviant missatges secrets als quals són tan aficionats els alumnes del cicle inicial.

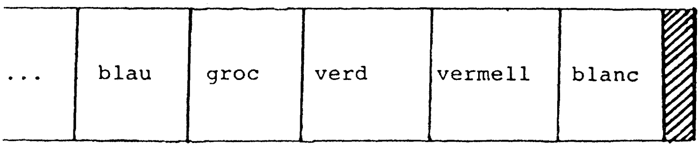
Per la base dos podem, inicalment, aprofitar aquesta idea. En primer lloc es tracta d'utilitzar un codi per transcriure nombres de diferents maneres, i arribar a veure que això es pot fer utilitzant sols dos signes diferents. Que aquests signes són usualment 0 i 1, serà una qüestió posterior.

IV. MATERIAL

Presentem aquí un material molt fàcil de construir i molt des d'els adient per treballar la base dos des els primers nivells. L'ordre de la seva presentació a l'alumne és:

1er material

a) Cintes amb quadrats de diferents colors i amb un senyal gruixut negre a un extrem. El senyal ha de quedar sempre situat a la dreta de l'alumne.



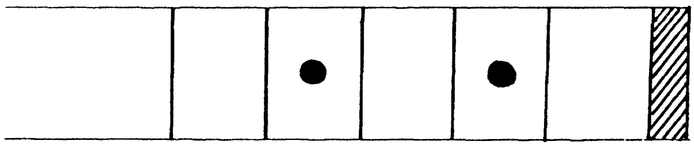
b) Algunes fitxes o botons negres.

Com s'ha de treballar?

En principi les cintes poden tenir de quatre a cinc colors. A cada quadrat sols hi podem posar -o no- una fitxa.

Al nostre cas, la fitxa situada al quadrat blanc, vermell, verd, groc o blau, pren el valor 1,2,4,8 o 16 respectivament.

Per exemple la cinta i dues fitxes collocades aixi:

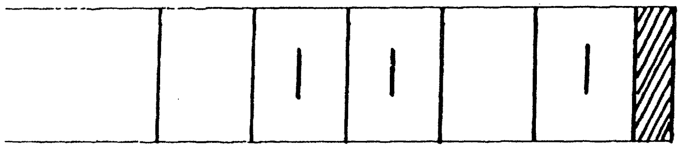


representa el nombre 10.

De fet aquest trebal es pot iniciar al 2on nivell degut a que surten exercicis senzills de suma. L'exercici invers d'expressar un nombre -donat en base 10- a través de la cinta, és posterior i adequat a un 3er nivell.

2on material

També a partir de 3er nivell es pot utilitzar un material més senzill: cintes de paper quadriculades però en blanc i neare, i substituir les fitxes per senyals verticals: |. Per exemple la cinta:



representa el nombre 8 + 4 + 1 = 13

3er material

A partir d'aquí cal introduir l'escriptura que ens permetrà prescindir de les cintes. Així a la cinta anterior la representerem: ||□| . Aquest conveni pot portar tan ràpidament com es vulgui a l'escriptura dels nombres amb els signes 0 i 1.

En principi, però, hi ha una reflexió que didàcticament és la més important: adonar-se de que sols amb dos signes es poden escriure els nombres naturals.

Per 4^{art} nivell triam diferents materials

- fitxes blanques i negres
- escacs
- troços de paper quadrats i circulars
- botons de dos colors
- "kliks" amb cabell ros i amb cabell negre

- agulles de cosir i agulles de cap.

I així la llista pot continuar... . Les peçes que es poden escollir són moltes i variades; sols cal que siguin de dos tipus i assignar a una d'elles el paper del senyal "I", i a l'altre el de "manca" de senyal "□". Caldrà escollir alguns d'aquests materials i fer abundants exercicis d'escriptura de nombres en base dos.

Es inevitable que en aquest treball surtin unes altres reflexions: a) cal elegir un punt "origen de lectura" i un sentit que a les cintes era implicit, b) les primeres peces tenen diferent valor segons el lloc que ocupen i les segones són imprescindibles per poder llegir el nombre.

<u>4art material</u>

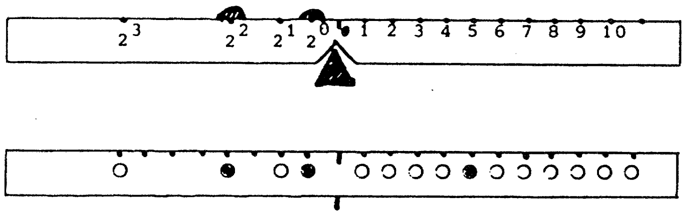
Més propi del 5è nivell és aprofundir la qüestió: tot nombre natural es pot descompondre en suma de potències de 2. D'entrada aquesta afirmació als alumnes els sembla molt gratuita, després, i passada l'acceptació del 2^0 com a nova escriptura de l'1 -la qual cosa sempre resulta que es fa "de forma resignada"-, la resta del treball és fàcil i, per això, molt gratificant.

Per exemple, es pot posar a la pissarra, per una part, la llista de les potències de dos i, per l'altra, la dels nombres naturals, i demanar que les descomposicions del tipus...

$12 = 8 + 4$; $13 = 8 + 4 + 1$; $14 = 8 + 4 + 2$, ... etc es facin mentalment.

Això es pot reforçar treballant amb material adequat. Hi ha dues possibilitats

A - Es pot treballar amb unes balances fetes amb un tauló de fusta amb clots o claus que permetin fixar una sèrie de boles del mateix pes i tamany



A un dels braços d'aquesta balança s'ha de poder col·locar una bola a distància $n = 1, 2, 3, \ldots$ etc del punt 0, i retrobar l'equilibri col.locant una o més boles a l'altra braç a distància 2^0, 2^1, 2^2, etc...

Per la llei de la palanca, per cada n es compleix $p_o 2^o + p_1 2^1 + p_2 2^2 + \ldots = p\,n$ a on $p = 1$ -pes d'una bola- i p_i és 1 o 0 segons si hi ha bola o no a distància 2^i.

B - Una altra possibilitat és utilitzar un material més assequible, perque és més fàcil de construir. Es tracta de:

. una cinta mètrica

. una sèrie de tires -sols una de cada- de 1,2,4,8,16, 32, i 64 cm.

Treball a fer: asenyalar un nombre sobre la cinta mètrica i arribar-hi utilitzant les tires donades. En cada cas s'ha de comptabilizar el fet sobre un esquema semblant a:

nombre de tires								nombre assenyalat sobre la cinta mètrica
...	de 64 cm	de 32 cm	de 16 cm	de 8 cm	de 4 dm	de 2 cm	de 1 cm	

V. CONCLUSIÓ

El sistema binari que té, de cara a una formació actualizada, una importància indiscutible tant a nivell pràctic com a nivell teòric, presenta desde la didàctica unes grans dificultats, sobre tot si es vol treballar als primers nivells d'E.G.B. Penseu que, d'alguna forma, aquestes dificultats es poden pal.liar:

$1^{\underline{er}}$ treballant les idees d'agrupacions i codificacions.

$2^{\underline{on}}$ Fent un treball esglaonat utilitzant prou material.

Queda per treballar el pas d'un sistema a l'altre utilitzant calculadores i tota la qüestió dels algorismes en base dos.

REFERÈNCIES

[1] M. Gardner: Nuevos pasatiempos matemáticos. Libro de Bolsillo nº 391. Alianza Editorial, Madrid, 1982.

[2] Ch. D. Miller y V.E. Hecren: Introducción al pensamiento matemático. Ed. Trillas, México, 1979.

[3] Scientific American: Selección de artículos sobre "Computadores y Computación". Ed. Blume, Madrid, 1974.

[4] I. Stewart: Conceptos de Matemática Moderna. A.V. nº 187. Alianza Editorial, Madrid, 1977.