INTEGRACIÓ EN TERMES DE FUNCIONS ELEMENTALS: EL TEOREMA DE LIOUVILLE

Santiago Zarzuela Armengou

Universitat de Barcelona

0.- Introducció.

El càlcul de primitives de funcions en forma explícita ha estat sempre un tema un xic esotèric en el sentit que fora de tècniques ben populars no és gaire conegut el tractament sistemàtic d'aquesta qüestió. Per exemple, és ben sabut de tothom que no es pot trobar en forma explícita una primitiva de e^x/x, o e^{x^2} o $\sin x/x$, etc. (i això és un fet acceptat), però no és en canvi gens conegut que aquesta qüestió, és a dir, saber quan la primitiva d'una funció es pot trobar ó no en forma explícita, va ser resolta per *Liouville* en una sèrie de treballs publicats en el període que va de *l'any 1833 a l'any 1838* i en els quals va demostrar el resultat del qual parlarem.

1.- Precedents històrics.

Es desprèn de la lectura dels treballs d'en Liouville que l'esperit de l'època vers aquest problema es pot resumir en el Principi que *"L'intégralle d'une fonction differentielle ne peut contenir d'autres quantités exponentielles et radicales que celles qui sont contenues dans cette fonction"*, i que *Laplace* va enunciar en el seu llibre Théorie analytique des probabilites. Encara que aquest principi es pot intuir a partir de l'experiència heurística en el càlcul de primitives no havia estat demostrat enlloc, i va ser la intenció inicial d'en Liouville donar-ne una demostració rigorosa.

També *Abel* havia tractac qüestions semblants pocs anys abans i, en particular, havia demostrat que si $u = \int y\, dx$ és algebraica en x i y és també algebraica en x aleshores u és una funció racional de x i y. (Journal für Mathematik, IV, 260 (1829)). De fet, en Liouville redescobrí aquest resultat, encara que posteriormente reconegué el treball d'Abel, i s'aprofità dels mètodes utilitzats per aquest.

2.- Els treballs, d'en Liouville.

Per tenir una visió més bona de com Liouville va arrribar al seu Teorema anem a fer una revisió cronològica dels diferents treballs que realitzà en aquest camp. En tot moment utilitzarem, aproximadament, la notació i llenguatge del mateix Liouville.

En les dues primeres memòries, publicades una al darrera de l'altra en el mateix volum del Journal de l'École Polytecnique l'any 1833, el problema que Liouville es planteja és el de si donada una funció algebraica y de x (és a dir, una funció que verifica una equació polinòmica a coeficients reals) hi ha un mètode per poder decidir quan la integral de y : $\int y dx$ és també algebraica, i en cas afirmatiu que aquest mètode donés ja directament la primitiva. Com es veu és un problema restringit. Per resoldre aquesta qüestió redemostra en primer lloc el resultat d'Abel:

- *Si* $\int y dx$ *és algebraica aleshores* $\int y dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{n-1}$,

sent $\alpha, \beta, y, \ldots, \lambda$ *funcions racionals de* x *i* μ *el grau de* y.
Ara, i a partir d'aquesta igualtat derivada recondueix el problema de trobar els possibles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ al de trobar-los com a solucions racionals d'un cert conjunt de equacions diferencials lineals de 1er ordre a coeficients funcions racionals (cada un és solució d'una d'aquestes equacions). I ara el problema se li ha simplificat ja que dóna un mètode pel qual en un nombre finit de passos pot trobar aquestes solucions racionals. (A més a més, aquest mètode el desenvolupa per equacions diferencials lineals d'ordre qualsevol a coeficients racionals).

Es així com prova, per exemple, que les integrals el.líptiques de la. i 2a. espècie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \quad \text{i} \quad \int \frac{(1-c^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \, dx$$

no són funcions algebraiques.

La refinació d'aquest procediment és l'objectiu de la seva última memòria sobre el tema publicada l'any 1838 al Journal de Matemàtiques.

La tercera memòria de Liouville sobre la integració de funcions ja té un objetiu més ampli. Publicada l'any següent (1834) al Journal de L'École Politecnique ja no estudia solament quan la integral d'una funció algebraica és també algebraica sinó quan és possible expresar aquesta per mitjà *d'operacions algebraiques, exponencials i logarítmiques a partir de les funcions racionals* (és a dir, quan la integral d'una funció algebraica és elemental). És en aquest treball on demostra que les integrals el.líptiques de la. i 2a. espècie no són elementals. Ara bé: això no és el més important d'aquesta memòria. En el curs de les seves demostracions troba les possibles formes que haurien de tenir les integrals elementals de les funcions algebraiques; el seu propòsit final serà aleshores demostrar que qualsevol integral elemental d'una funció elemental també ha de verificar aquestes formes, propòsit que aconsegueix demostrar en el seu 4^{rt} i definitiu treball i que, en realitat, constitueix el que s'anomena *Teorema de Liouville.*

3.- El Teorema de Liouville.

Aquest treball es titula *"Mémoire sur l'intégration d'une classe de functions transcendentes"* i va ser publicat al Journal für Mathematik, Vol. 13, 1835 (93-118).

Anem doncs a veure l'enunciat d'aquest Teorema:

Sigui $P = f(x, y, z, \ldots,)$ una funció algebraica de $x, y, z, \ldots$, on x és la variable independent, i $y, z, \ldots$, funcions tals que $dy/_{dx}, dz/_{dx}, \ldots$ són funcions algebraiques de $x, y, z, \ldots$. Aleshores:

Teorema.- Si la integral $\int P\,dx$ *és expressable en forma finita en funció de* $x, y, z, \ldots$ *per mitjà de signes algebraics, exponencials i logarítmics, aleshores sempre es podrà posar com* $\int P\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w$, *amb* $A, B, \ldots C$ *constants i* $t, u, v, \ldots, w$ *funcions algebraiques de* $x, y, z, \ldots$.

A més a més, si $P, dy/_{dx}, dz/_{dx}, \ldots$ *són racionals respecte* $x, y, z, \ldots$ *també passarà el mateix amb* $t, u, v, \ldots, w$.

En primer lloc observem que les funcions elementals verifiquen la hipòtesi de l'enunciat i per tant el Teorema realment diu quen la integral d'una funció elemental és elemental. Per altra banda aquest respon perfectament al que s'anomena Principi de Laplace.

La demostració del Teorema és llarga i complicada, encara que utilitza mètodes senzills, i segons alguns autors respon als coneixements que Liouville podia tenir del càlcul de variacions. La segona part, per altra banda, es realitza pel mateix mètode que Abel havia ja utilizat en el seu treball, i de fet Liouville hi remet directament.

4.- Aplicacions.

Com normalment passa amb aquest tipus de resultats tan generals l'aplicació pràctica no és senzilla. Així que per poder aplicar-lo a una sèrie de funcions que per si mateixes tenien interès a Liouville li va caler estudiar de forma sistemàtica la integració elemental d'una família de función que inclou $e^x/_x$, e^{x^2}, $\sin x_{/x}$, etc.

Més en concret: es proposà de donar un mètode cert per trobar el valor de la integral $\int e^x y dx$, y funció algebraica de x, métode que ens ha de dir si aquesta funció és ó no elemental, i en cas afirmatiu trobar-ne l'expressió.

Demostra aleshores, i en primer lloc que *si* $\int e^x y dx$ *és elemental es té:*

$\int e^x y dx = e^x \, (\alpha + \beta y + \ldots + \lambda y^{\mu - 1})$, *sent* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *funcions racionals de* x i $\mu = gr(y)$. D'aquí, i derivant ambdós membres de la igualtat obtè un conjunt d'equacions diferencials de primer ordre a coeficients racionals. Pel mateix mètode que havia utilitzat en las seves dues primeres memòries pot construir les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ en cas d'existir i ja està.

Anem a veure un *exemple:*

sigui $e^x/_x$ ("dont les géometres se sont beacoup occupés").

$e^x/_x = e^x y$, $y = {}^1/_x$, $gr(y) = 0$. Si $\int e^x/_x\, dx$ és elemental es tindrà: $\int e^x/_x\, dx = e^x\alpha$, α funció racional de x. Derivant resultarà que $e^x/_x = e^x\backslash(\alpha+\alpha')$ i per tant $1/_x = \alpha+\alpha'$. Ara hauriem d'aplicar el mètode d'en Liouville, però en aquest cas el problema és més senzill. En efecte: $\alpha = P/_Q$, $(P,Q) = 1$, $Q = X^r Q_1$, $(X_1 Q_1) = 1$. Aleshores $1/_x = P/_Q + \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} = \frac{Q(P+P')-PQ'}{Q^2}$ i, per tant, $Q^2 = X(Q(P+P') - PQ')$. Es tindrà doncs que $r \geqslant 1$ de manera que $X^{2r}\, Q_1^2 = (XQ_1\ P+P') - PQ_1')$, $(X_1, Q_1') = 1$. En conseqüència $X\backslash PQ_1'$, absurd.

Concloem doncs que $\int e^x/_x\, dx$ *no és elemental.*

Fent un canvi de variable adequat es pot aplicar el mateix procediment a la funció $\int e^{x^2}\, dx$, i en general a integrals del tipus $\int e^P\, p\, dx$, P i p funcions algebraiques de x.

L'últim resultat d'en Liouville sobre tot això és que per integrar elementalment una expresiió del tipus $Pe^p+\ldots+Qe^q$, $P,p,\ldots,Q,q$ funcions algebraiques de x cal saber-ho fer a cada un dels sumands de la funció.

De això es dedueix, per exemple, que $\int \sin x/_x\, dx$ ó $\int \cos x/_x\, dx$ *no són funcions elementals.*

5.- Evolució al llarg del temps.

Fins aquí hem exposat resumidament els treballs de Liouville sobre aquesta qüestió. En els 150 anys que han transcorregut el T. de Liouvillo no ha estat millorat sensiblement en el seu contingut, encara que sí transformada la seva forma d'exposició i demostració. Amb tot, durant molts anys el tractament ha estat el d'en Liouville; per exemple, en el llibre de *Hardy* "Integration of functions of a single variable" (1906 la. ed, 1916 2a ed), que és una exposició de la teoria del càlcul de primitives de forma sistemàtica i que recull la majoria dels mètodes conegus a l'època, hi apareixen enunciats els resultats d'en Liouville però remetent directament a les seves publicacions originals. Fins i tot en el llibre de *Ritt* de l'any 1948 "Integration in finite terms" es tracten aquestes qüestions en forma analítica.

És a mitjans dels anys seixanta, quan les possibilitats de l'ordinador permeten concebre el càlcul de primitives de forma completament mecànica (i no heurística com fins aleshores), que els resultats d'en Liouville són revisats de nou a fons per trobar el perquè real del seu Teorema. I el que es va trobar fou que *el resultat no depèn tant de les propietats de les funcions com de les propietats de la derivació*, propietats que es poden formular en *termes purament algebraics*. Això ja ho havia avançat *Ostrowski* l'any 1945 en donar un mètode per integrar en termes elementals una certa família de funcions.

6. Plantejament algebraic.

Anem a veure quin és aquest enfocamente actual. Els primers en adoptar-lo definitivament foren *Rosenlicht* (1968) i *Risch* (1969).

S'anomena *cos diferencial* qualsevol cos K (que suposarem commutatiu i de característica 0) dotat d'una derivació, és a dir, amb una aplicació $D:K \longrightarrow K$ t.q. $D(x+y) = D(x)+ D(y)$ i $D(x.y) = xDy + yDx$. Al conjunt $C = \{x \in K \backslash D(x) = 0\}$ se l'anomena subcos de les constants de la derivació D. Si $E \subset F$ és una extensió de cossos diferencials es diu que *l'extensió és diferencial* si $D_{F|E} = D_E$. En general, i si E és un cos diferencial i x, y son elements de E direm que $x = \log y$ si $Dx = Dy/y$, i $x = \operatorname{Exp} y$ si $Dx/x = Dy$.

Vegem uns exemples: si E és un cos diferencial i E(t) *és una extensió simple transcencent*, es pot donar una derivació de E(t) definint a D(t) com vulguem dins E(t) i després estenent per linealitat. En canvi, si E[t] *és una extensió algebraica de* E només es pot definir d'una manera la derivació a E[t]. Així que tenint en compte que $\mathbb{C}(x)$ és sempre un cos diferencial té sentit pensar en el cos $\mathbb{C}(x)(\sqrt{x}, e^{\sqrt{x}}, \log x)$ com a cos diferencial, independenment que com a cos de funcions tingui realització en alguna regió del pla complex (cos liouvillià).

Si tenim una extensió diferencial $E \subset F$, $x \in F$ *direm que és elemental sobre* E si x és algebraic sobre E, ó bé $x = \operatorname{Exp} y$, $y \in E$, ó bé $x = \log y$, $y \in E$. Es dirà aleshores que $E \subset E(\theta_1, \ldots \theta_n) = F$ és una extensió elemental si θ_i és elemental sobre $E(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$ $\forall i$. Sigui, dons, E un cos diferencial, $x \in E$ direm que és *integrable elementalmente sobre* E si existeix una extensió diferencial elemental F de E i existeix $y \in F$ t.q. $Dy = x$. Direm que és *integrable elementalment sense noves constants* si, a més a més, $C_E = C_F$. El Teorema de Liouville es pot enunciar aleshores així:

Teorema.- Sigui E *un cos diferencial.* $x \in E$ *és integrable elementalment sense noves constants si i només si* $\exists\ c_1, \ldots, c_r \in C_E$,

$u_1, \dots, u_r \in E - \{0\}$ *i* $v \in E$ *tals que* $x = \sum_{i=1}^{r} c_i \frac{Du_i}{u_i} + Dv$,

és a dir, $\mid x = \sum_{i=1}^{r} c_i \log u_i + v$.

(Aquest resultat es pot afinar en el sentit que si es necessiten noves constants aquestes es poden escollir sempre algebraiques de manera que, sobre $\mathbb{C}$, ambdós problemes són equivalents (Risch)).

7. Una demostració.

Intentarem donar un esbós de la demostració del Teorema: aquesta tan sols utilitza el fet que si $K(X) \ni f = P_{/Q}$ alesho res existeix una sola expressió de la forma

$P_{/Q} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} P_{ij}/Q_i^j$, amb $gr(P_{ij}) < gr(Q_i)$ i Q_i polinomi mònic irreduible (descomposició en fracciones parcials).

La demostració és per *inducció sobre* $n, F = E(\theta_1, \dots \theta_n)$. Per $n=0$ no hi ha res per provar. Fem hipòtesi d'inducció.

Aleshores $x = \sum_{i=1}^{r} c_i \, D^{u_i}/_{u_i} + Dv$, $c_i \in C$ i $u_i, v \in E(\theta_1)$.

Fem $\theta = \theta_1$ i distingim diferents casos:

- θ *algebraic*. Podem suposar que $E \subset E(\theta)$ es normal, de manera que si $G = G\ (E(\theta)\backslash E)$ és el grup de Galois es té:

$$x = \sigma(x) = D\ \sigma(u) + \sum_{i=1}^{r} c_i\ D\sigma(u_i)/\sigma(u_i)\ \forall \sigma \in G,$$

ja que els E-automorfismes de $E(\theta)$ commuten amb la derivació de $E(\theta)$. Si $g = \#\, G$ es tindrà que $gx = D \sum_{\sigma \in G} \sigma(v) +$

$+ \sum_{i=1}^{r} c_i\ D \prod_{\sigma \in G} \sigma(u_i) / \prod_{\sigma \in G} \sigma(u_i)$, que ja és una expressió de E.

- θ *transcendent*. Aleshores, i utilizant les propietats del logaritme, podem escriure

$$x = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{D Q_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^{r} b_i \frac{Dh_i}{h_i} + D(P + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} P_{ij}/Q_i^j),$$

amb a_i, b_i constants, $h_i \in E$ i $P + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} P_{ij}/Q_i^j$ la descomposició en fraccions parcials de v. Ara només cal fer servir la unicitat d'aquesta descomposició així com les propietats de l'exponencial i del logaritme per veure que l'expressió anterior és de la forma enunciada.

Una demostració que no depèn de les descomposicions en fraccions parcials i realment molt bonica va ser donada por Rosenlicht l'any 1975; aquesta és basada en resultats molt forts sobre el mòdul de les diferencials.

8.- L'àlgebra diferencial.

Si volguéssim situar en un marc més ampli tot aquest tema hauríem de citar paraules de *Kaplansky: La teoria d'integració de funcions elementals és una mena de pre-teoria de Galois diferencial, de la mateixa manera que les construccions amb regle i compàs ho són de la teoria de Galois algebraica en el sentit que tan sols s'hi utilitzen les parts més elementals d'aquesta teoria.*

La Teoria de Galois diferencial va ser creada a finals de segle XIX per *Picard i Vessiot*: aquests dos autors varen estudiar el conjunt de transformacions de les solucions d'una equació diferencial lineal homogènia, i van descobrir que formaven un *grup de Lie*. A més a més aquest grup era resoluble si i només si l'equació diferencial es podia resoldre per quadratures, sense especificar gaire bé què és el que això volia dir. Amb tot, i degut essencialment a què la teoria de grups de Lie no era suficientment desenvolupada així com a la falta de precisió dels seus conceptes aquesta teoria va estar oblidada pràcticament durant 50 anys fins que *Kolchin*, l'any 1948, la va situar en el lloc adequat. Aquest era *L'Àlgebra diferencial*, creada per *Ritt* anys abans. Podríen resumir d'aquesta manera la idea de Kolchin:

per a cada equació diferencial lineal homogènia *existeix una extensió diferencial* $K \subset K(a_1,\dots,a_n)$ sent K el cas on estan els coeficients de l'equació i $a_1,\dots,a_n$ un conjunt de solucions linealment independents de l'equació. *El grup de Galois diferencial* (és a dir, els K-automorfismes que commuten amb la derivació) no és únicament un grup de Lie sinó *un grup algebraic de matrius*. Hi ha aleshores una correspondència tipus Galois entre les subextensions diferencials i els subgrups algebraics, de manera que si anomenem *extensió Liouvilliana* a l'obtinguda per adjunció a un cos diferencial d'integrals ó exponencials d'integrals ó elements algebraics es té que una equació diferencial lineal homogènia *és resoluble per quadratures* (és a dir, les seves solucions són dins d'una extensió Liouvilliana) *si i només si el grup de Galois diferencial té la component de la Identitat resoluble.*

Aquesta teoria ha estat una de les motivacions més fortes pel desenvolupament de la teoria de grups algebraics lineal que, practicament, va néixer amb els treballs d'en Kolchin. L'esmentat llibre de Kaplansky és una bona introducció al tema.

Bibliografia

- Premier mémoire sur la determination des intégrales dont la valeur est algébrique. Journal de l'École Polytechnique, Vol. 14, Cahier 22, (1833) 124-148.

- Seconde mémoire .... Ibid., 149-193.

- Mémoire sur les transcendentes elliptiques considereé comme fonctions de leur amplitude. Journal de l'École Polytechnique, Vol. 14, Cahier 23, (1834) 37-83.

- Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes. Journal für Mathematik, Vol 13, (1835) 93-118.

- Nouvelles recherches sur la determination des intégralles dont la valeur est algébrique. Journal de Mathematiques, Vol. 3, (1838) 20-24.

N.H. Abel.

- Précis d'une théorie de fonctions elliptiques. Journal für Mathematik, Vol. 64, (1829) 236-277.

G. Hardy.

- The integration of funtions of a single variable. Cambridge University Press (1916).

M.A. Ostrowski.

- Sur l'intégrabilité èlémentaire de quelques classes d'expresions. Comment. Math. Helv. 18, (1946) 283-308.

J.F. Ritt

- Integration in finite terms. Columbia University Press, (1948).

M. Rosenlicht.

- Liouville's theorem on functions with elementary integrals. Pacific journal of mathematics, 24, nº. 1, (1968) 153-161.

- Integration in finite terms. American Mathematical Monthly, 79 (1972) 963-972.

- On Liouville's theory of elementary functions. Pacific Journal of Mathematics, 65, nº 2, (1976) 485-492.

R.H. Risch.

- The problem of integration in finite terms. Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969) 167-189.

I. Kaplansky.

- An introduction to differential algebra. Hermann (2nd Edition) (1976).

EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE. LA CONTRIBUCIÓ DE LIOUVILLE

Xavier Mora

Universitat Autònoma de Barcelona

De les diverses aportacions fonamentals de Liouville a la matemàtica, la primera en el temps va ser la que concerneix el que ara s'anomena "problema de Sturm-Liouville". Aquest és un dels problemes crucials en la història de l'anàlisi matemàtica, i com veurem està connectat amb diversos temes cabdals, com són: les equacions en derivades parcials, les sèries funcionals, els teoremes d'existència i unicitat de solucions per a equacions diferencials ordinàries, el mètode de les aproximacions successives, els mètodes "directes" en l'estudi de les equacions diferencials, i la teoria de les equacions integrals.

El problema de Sturm-Liouville va ser tractat per aquests dos autors, Charles Sturm i Joseph Liouville, durant el període 1829-1838. Just abans d'això, Gauss i Cauchy acabaven d'imposar una nova concepció més rigorosa i més "analítica" de l'anàlisi matemàtica, iniciant una etapa de rigorització i aprofundiment que va durar ben bé fins als tres quarts del segle XIX. En aquest context és doncs on s'enquadra el treball que anem a descriure. De fet, Liouville, i també Sturm, pertanyia a la primera generació de matemàtics que havia après el càlcul infinitessimal en els assenyalats llibres de text escrits per Cauchy [1821, 1823b, 1829a].