LA INTEGRABILITAT DE LES EQUACIONS DE LA MECÀNICA

Jaume Llibre

Universitat Autònoma de Barcelona

Les equacions diferencials de la mecànica poden ésser escrites en forma Hamiltoniana

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, (k = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

on $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ són les coordenades de l'espai de fases $\mathbb{R}^{2n}$ o d'un obert U de $\mathbb{R}^{2n}$, i $H:U \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable. Així una funció H defineix un camp de vectors

$$X_H = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Anomenem *Hamiltonià* a la funció H i *sistema Hamiltonià amb n graus de llibertat* associat a H al sistema (1) de $2n$ equacions diferencials de primer ordre.

Sigui $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Definim el *parèntesi de Poisson* de F i H com la funció

$$\{F,H\} = X_H F = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial y_k} \right).$$

Una funció no constant F s'anomena *integral primera* del sistema Hamiltonià (1) o del camp de vectors X_H si $\{F,H\} = 0$. Es fàcil verificar que si $(x(t), y(t))$ és una corba solució de (1) i F una integral primera, llavors $F(x(t), y(t)) =$ $=$ constant.

En particular, H és una integral primera de (1). Per tant, en un sistema Hamiltonià amb 1 grau de llibertat el moviment té lloc a lo llarg de les corbes $H(x_1,y_1) =$ constant. Així, conéixem completament les corbes solució de qualsevol sistema Hamiltonià de 1 grau de llibertat.

Per exemple, pel Hamiltonià $H(x_1,y_1) = \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{1}{4}}}$, el seu retrat de fases sobre $\mathbb{R}^2$ vé donat a la Figura 1. L'origen és un centre $(H = -2)$. Hi ha tres tipus més de solucions, les solucions A o òrbites periòdiques $(-2 < H < 0)$, les dogues separatrius B o òrbites parabòliques perque sorten i arriben a l'infinit amb velocitat zero $(H=0)$, i les solucions C formades per òrbites hiperbòliques doncs sorten i arriben a l'infinit amb velocitat diferent de zero $(H > 0)$.

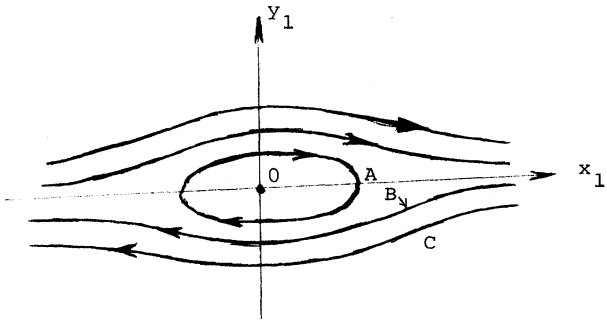

Figure 1

Direm que un conjunt de funcions $F_1, F_2, \ldots, F_r$ estan en *involució* si $\{F_j, F_k\} = 0$ per a tot $j,k \in \{1,2,\ldots,r\}$; i que són *independentes* si els seus gradients $dF_1, dF_2, \ldots, dF_r$ són linealment independents.

Es natural fer-nos la següent questió: ¿Per a quins sistemes Hamiltonians de 2 o més graus de llibertat podem conéixer totes les seves solucions? Liouville va donar la millor resposte que tenim fins ara.

TEOREMA (*Liouville, 1853*). *Si per a un sistema Hamiltonià amb* n *graus de llibertat conéixem* n *integrals primeres independentes en involució, llavors el sistema és integrable per quadratures.*

Liouville va arribar a aquest important resultat després de llargs treballs estudiant les equacions del moviment de un punt material o de un sistema de punts materials que es poden integrar, veura [L1], [L2] i [L3].

El teorema de Liouville engloba practicament tots els problemes de la dinàmica resolts fins avui. Arnold ha millorat el teorema de Liouville afegint-li la geometria dels sistemes integrables.

TEOREMA (*Arnold, 1963*). *Siguin* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n *integrals primeres independentes en involució del sistema Hamiltonià* (1) *i* $I_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$ *la varietat diferenciable definida per* $F_1 = c_1$, $F_2 = c_2, \ldots, F_n = c_n$ *on* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *és un valor regular de l'aplicació* $F_1 \times F_2 \times \ldots F_n : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Llavors*

(1) $I_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$ *és invariant pel flux (és à dir, si una corba solució té un punt sobre la varietat* $I_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$ *llavors esta completament continguda en ella).*

(2) *Cada component connexa de* $I_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$ *és difeomorfa a* $\mathbb{R}^k \times (S^1)^{n-k}$

amb $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$.

(3) *El flux sobre cada component connexa de* $I_{c_1,c_2,\dots,c_n}$ *és diferenciablement conjugat del flux trasl.lació sobre* $\mathbb{R}^k \times (S^1)^{n-k}$ *(és a dir, del flux* $\varphi_t(x_1,\dots,x_k,\theta_{k+1},\dots,\theta_n) = (x_1+tv_1,\dots,x_k+tv_k,\theta_{k+1}+tv_{k+1}(\text{mod } 1),\dots,\theta_n+tv_n(\text{mod } 1))$, on $v=(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}$, i $\theta_{k+1},\dots,\theta_n \in S^1$.

Una demostració detallada d'aquest teorema es pot trobar a [AM]. Altres bones referencies relacionades amb els sistemes Hamiltonians integrables o no, es donen al final.

Els apartats (1) i (3) del teorema anterior són deguts a Liouville i expressen amb més detall el seu teorema, veure [L3]. La aportació essencial de Arnold és l'apartat (2).

Per entendre que ens diu el teorema de Liouville-Arnold, considerem el Hamiltonià $H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definit per $H(x,y) = \frac{1}{2}\|y\| - \|x\|^{-1}$, on $\|\ \|$ denota la norma euclidea de $\mathbb{R}^2$. El sistema Hamiltonià associat és

$$\dot{x} = y \ , \quad \dot{y} = -\frac{x}{\|x\|^3} \ . \tag{2}$$

Aquestes equacions diferencials defineixen el problema de Kepler, o problema del moviment de dos cossos sota la força de gravitació amb un dels dos cossos situats a l'origen de coordenades $(x=y=0)$.

El sistema Hamiltonià amb 2 graus de llibertat (2) és integrable, doncs existeix un altre integral primera independenta i en involució amb H, el moment angular $C(x,y) = x \wedge y$.

Considerem els conjunts invariants

$$I_{hc} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 : H(x,y) = h \text{ i } C(x,y) = c\}.$$

Si (h,c) és un valor regular de la funció $H \times C$, llavors I_{hc} és una varietat diferenciable 2-dimensional. En aquest cas, utilitzant el teorema de Liouville-Arnold tenim que I_{hc} és difeomorfa a $S^1 \times S^1$ o $S^1 \times \mathbb{R}$ i que el flux sobre I_{hc} es diferenciablement conjugat al flux trasl.lació sobre $S^1 \times S^1$ ó $S^1 \times \mathbb{R}$.

La Taula 1 ens descriu com les corbes solució omplen els conjunts I_{hc}, i les Figures 2 i 3 com les varietats I_{hc} folien l'espai de fases del problema de Kepler, per més detalls veure [CL].

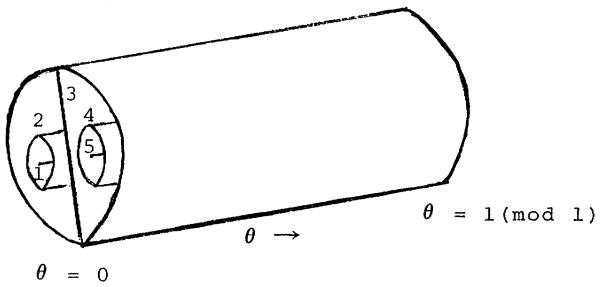

Figure 2. El conjunt $I_h = \bigcup_c I_{hc}$, amb $h < 0$, és un tor solid obert.

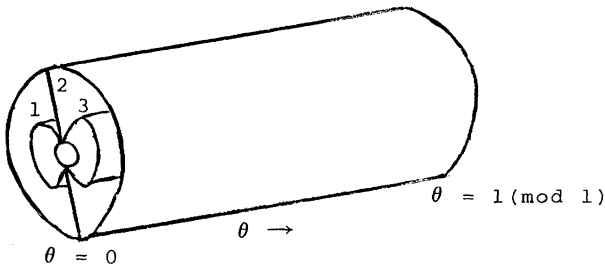

Figure 3. El conjunt $I_h = \bigcup_c I_{hc}$ amb $h \geqslant 0$ és un tor solid obert que li falte un altre tor solid tancat en el seu interior.

Referencies

[AB] R. Abraham i J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1978.

[A1] V.I. Arnold, Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian, Russian Math. Surveys 18 (1963) 9-36.

[A2] V.I. Arnold, Small divisor problems in classical and celestial mechanics, Russian Math. Surveys 18 (1963) 85-192.

[A3] V.I. Arnold, Méthodes Mathématiques de la Mécanique classique, Mir, Moscou, 1976.

[AA] V.I. Arnold i A. Avez, Problèmes Ergodiques de la Mécanique classique, Gauthiers-Villars, Paris, 1967.

[CL] J. Casasayas i J. Llibre, Qualitative analysis of the anisotropic Kepler problem, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 312, 1984.

[L1] J. Liouville, Sur quelques cas particulier où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, première mémoire, J. de Math. Pures et Appl. 11 (1846) 345-378; second mémoire, J. de Math. Pures et Appl. 12 (1847) 410-444.

[L2] J. Liouville, L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels, J. de Math. Pures et Appl. 14 (1849) 257-299.

[L3] J. Liouville, Sur l'integration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853, J. de Math. Pures et Appl. 20 (1855) 137-138.

[M] J. Moser, Stable and random motions in dynamical systems, Ann. Math. Studies 77, 1973.

[SM] C.L. Siegel i J. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971.

Hamiltonià	Moment angular	Topologia de I_{hc}	I_{nc} esta format per
$h < 0$	$c = -(-2h)^{-1/2}$	S^1 (1)	una òrbita circular retrograde
	$c \in (-(-2h)^{-1/2}, 0)$	$S^1 \times S^1$ (2)	un conjunt de S^1 orbites periòdiques retrogrades (el.lipses)
	$c = 0$	$S^1 \times \mathbb{R}$ (3)	un conjunt de S^1 òrbites d'ejecció - col.lisió
	$c \in (0, (-2h)^{-1/2})$	$S^1 \times S^1$ (4)	un conjunt de S^1 òrbites periòdiques directes (el.lipses)
	$c = (-2h)^{-1/2}$	S^1 (5)	una òrbita circular directa
$h = 0$	$c \in (-\infty, 0)$	$S^1 \times \mathbb{R}$ (1)	un conjunt de S^1 òrbites parabòliques retrogrades de captura-escap
	$c = 0$	2 copies de $S^1 \times \mathbb{R}$ (2)	un conjunt de S^1 òrbites parabòliques d'ejecció-escap un conjunt de S^1 òrbites parabòliques de capture-col.lisió
	$c \in (0, \infty)$	$S^1 \times \mathbb{R}$ (3)	un conjunt de S^1 òrbites parabòliques directes de captura-escap
$h < 0$	$c \in (-\infty, 0)$	$S^1 \times \mathbb{R}$ (1)	un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques retrogrades de captura-escap
	$c = 0$	2 copies de $S^1 \times \mathbb{R}$ (2)	un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques d'ejecció-escap un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques de captura-col.lisió
	$c \in (0, \infty)$	$S^1 \times \mathbb{R}$ (3)	un conjunt de S^1 òrbites hiperbòliques directes de captura-escap.

Taula 1. Els números es corresponen amb de les Figures 2 i 3.