TEORIA DE LA PARAL.LAXI EN L'ASTRONOMIA ANTIGA: UN EXEMPLE HISTÒRIC DE TRACTAMENT NUMÈRIC D'UNA FUNCIÓ DE VÀRIES VARIABLES

Josep Chabàs Bergón
(Grup de Treball d'Història de la Ciència , IEC)

1. INTRODUCCIÓ

Al llarg de la història de l'astronomia, les teories que expliquen el moviment del Sol i de la Lluna han utilitzat coordenades geocèntriques. Tanmateix, per a un observador situat en la superfície terrestre, el radi de la Terra pot no ser una quantitat del tot negligible comparada amb la distància de l'objecte celest observat. És el que succeeix quan l'astre observat és el Sol o la Lluna. En aquest cas, cal efectuar una correcció deguda a la paral.laxi, que dependrà bàsicament de la posició de l'observador sobre la Terra, de la distància a l'astre considerat i de l'altura d'aquest sobre l'horitzó.

És especialment important la correcció per paral.laxi quan es tracta de la Lluna, a causa de la seva proximitat; resulta imprescindible per calcular els eclipsis amb un mínim de precisió i, en particular, per determinar les zones de la superfície terrestre des de les quals es pot observar un eclipsi de Sol.

Aquest és un problema que ja s'havia plantejat l'astronomia antiga i que, tot i que no se sap quan va aparèixer el concepte de paral.laxi, ocupava un lloc important en l'obra de l'astrònom de Nicea, Hiparc (s.-II). El seu llibre <u>Sobre el càlcul de paral.laxis</u> no ha arribat fins a nosaltres, però devia ser conegut per l'astrònom alexandrí Ptolemeu (c. 150 d.c.), ja que l'utilitzà àmpliament per presentar la seva teoria de la paral.laxi.

La determinació efectiva de la paral.laxi no es realitza

principalment en Ptolemeu mitjançant les observacions, tot i que Ptolemeu dugué a terme observacions que li permeteren d'ajustar els paràmetres per al tractament que dona a la paral.laxi: un tractament numèric, basat en regles pràctiques i no pas en un cos teòric elaborat a partir de les coordenades geocèntriques dels astres considerats.

Durant l'Edat Mitjana va prevaler la teoria ptolemaica, que va rebre les aportacions de diversos matemàtics i astrònoms, especialment islàmics. Així, ja al segle XV, Ulugh Begh, net de Tamerlà, ordenà unes taules (Zīj-i Sultān) que destacaren per la seva precisió i que tingueren una gran difusió. Per a l'elaboració de les taules, reuní, a l'Observatori de Samarcanda, un grup de rellevants astrònoms, entre els que s'hi trobava Al-Kashi, autor d'un tractat d'astronomia general i d'unes taules de paral.laxis, a les quals incorporà els mètodes i els conceptes de trigonometria esfèrica desenvolupats per la ciència islàmica, la qual havia elaborat taules molt precises de totes les funcions trigonomètriques fonamentals, desconegudes pels astrònoms helenístics (Kennedy, 1956).

La determinació de la paral.laxi queda distorsionada pel problema de la refracció atmosfèrica. Amb Tycho Brahe començaren les observacions sistemàtiques d'aquest efecte; gràcies al tractament teòric proporcionat per Kepler, hom començà a distingir les correccions que cal aplicar a les posicions observades del Sol i de la Lluna.

Els primers valors acceptables de la paral.laxi solar van ser obtinguts a finals del segle XVIII, gràcies a les observacions realitzades per Jean Richer a Cayena, i Picard i Cassini a París. A mitjan segle XVIII tingué lloc un esdeveniment que ha estat considerat el primer exemple d'empresa científica en cooperació internacional, destinada a mesurar

la paral.laxi lunar. Entre 1751 i 1753 es determinaren les altures meridianes de la Lluna en diversos observatoris d'arreu del món: Ciutat del Cap (Lacaille), París (Cassini), Berlín (Lalande), Bolònia (Zanotti), Greenwich (Bradley) i Estocolm (Wargentin) i s'obtingueren valors molt ajustats. Però fins gairebé un segle després no quedaria establert un mètode precís per a la determinació de la paral.laxi lunar a partir de les observacions: un mètode proposat pel director de l'Observatori de Copenhague , Christian Früs Rotthöl Olufsen (1802-1855), en la seva obra Dissertatio de parallaxi lunae (1840).

2. DEFINICIONS

Per a un observador situat a O (Fig.1), la paral.laxi d'un astre P es defineix com l'angle que, des de P, subtendeix el radi terrestre. Si z' és la distància zenital de P (complementari de l'altura observada) i z la seva distància zenital geocèntrica, la paral.laxi, p de l'astre és:

$$p = z' - z \qquad (1)$$

anomenada també paral.laxi diürna, ja que varia amb l'angle horari de l'astre observat.

Evidentment, p és un angle no negatiu, que s'anul.la quan l'astre considerat es troba sobre el zenit de l'observador i és màxim quan es troba sobre l'horitzó. Aquest valor màxim s'anomena paral.laxi horitzontal.

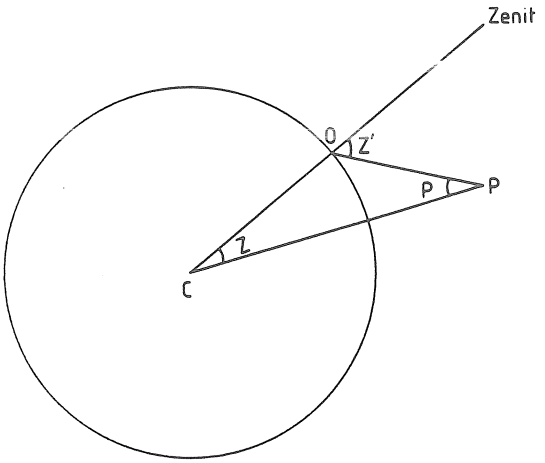


FIGURA 1

Angle de paral.laxi d'un astre P

Per a la determinació de l'expressió general de p, considerem la distància Δ de l'astre al centre de la Terra. En el triangle astre-observador-centre de la Terra, la llei dels sinus s'escriu:

$$\sin p = \frac{CO}{\Delta} \sin z'$$

essent CO la distància de l'observador al centre de la Terra. Si hom no té en compte la no esfericitat de la Terra, CO= r_e = radi terrestre i, per tant,

$$\sin p = \frac{r_e}{\Delta} \sin z' \qquad (2)$$

El valor màxim de $\sin p$, corresponent a la paral.laxi horitzontal, és r_e/Δ. Per a expressar la paral.laxi en coordenades geocèntriques, que són les que proporcionen els models teòrics, hom substitueix la definició (1) en l'expressió anterior, obtenint-se:

$$\sin p = \frac{r_e}{\Delta} \left(\sin z \cos p + \cos z \sin p \right)$$

i, per tant,

$$\tan p = \frac{r_e \cdot \sin z}{\Delta - r_e \cos z} \qquad (3)$$

Quan es produeix un eclipsi de Sol i l'observador, la Lluna i el Sol són pràcticament alineats, el paràmetre fonamental és la paral.laxi lunar ajustada, la qual es defineix com la diferència entre la paral.laxi lunar i la paral.laxi solar.

3. VALORS ACTUALS DE LES PARAL.LAXIS

En el cas del Sol, el valor de la paral.laxi horitzontal mitjana mesurada a l'equador, és 8",8. En el cas de la Lluna, astre unes 400 vegades més pròxim que el Sol, el valor mitjà de la paral.laxi, acceptat des de la teoria lunar de E. Brown, és 57'2",70 (Danjon, 1959).

4. VALORS PTOLEMAICS DE LES PARAL.LAXIS

Ptolemeu observà que l'excentricitat de la òrbita solar no produïa una influència significativa en la paral.laxi solar. De la seva teoria del moviment del Sol es dedueix que la distància Sol-Terra era de 1210 radis terrestres (Toomer, 1984) amb la qual cosa la paral.laxi horitzontal, mesurada sobre l'equador, era de 0;2,51° (aquí seguint la nomenclatura sexagesimal clàssica, les comes separen els nombres enters sexagesimals i el punt i coma representa el punt sexagesimal. Així, $0;2,51 = 0 \times 60^{0} + 2 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2}$), valor unes 19 vegades més gran que el valor acceptat actualment, i conseqüència

d'una distància al Sol 19 vegades més petita que la real. Malgrat això, aquest valor no altera substancialment les observacions, doncs era per sota de la precisió dels instruments d'observació de l'època.

El cas de la Lluna és molt diferent. Ptolemeu deduí una distància mitjana Terra-Lluna força correcta, 59 radis terrestres, pròxima a l'admesa actualment (60,27 r_e), tot i que la seva teoria lunar provoqués una variació d'un factor 2 en el diàmetre aparent de la Lluna al llarg d'una lunació (Pedersen, 1974). De les observacions realitzades per Ptolemeu se'n dedueix un valor de la paral.laxi horitzontal d'1;26°, valor erroni en mig grau i sobre el qual es fonamenta la seva aproximació a la paral.laxi.

5. TEORIA PTOLEMAICA

L'importància de la teoria ptolemaica no es troba tant en la seva precisió ni quantitativa (com s'ha pogut veure abans) ni qualitativa (Neugebauer (1975), per exemple, assenyala que "el capítol de les paral.laxis és sens dubte un dels passatges més insatisfactoris de l'Almagest"), sinó en el tractament donat a una funció de tres variables i en el fet d'haver perdurat, quasi sense variacions fins al segle XVIII.

Per al desenvolupament de la teoria de la paral.laxi, Ptolemeu utilitza distàncies zenitals geocèntriques i no topocèntriques, com en l'expressió (3), i fa un tractament numèric que proporciona resultats anàlegs als que hom dedueix de l'expressió (3), després de fer l'aproximació de $\tan p$ per $\sin p$. L'aproximació és vàlida car els valors de p són sempre inferior a 1°30' i queda justificada pel fet que la tangent trigonomètrica era desconeguda en temps de Ptole-

meu. Així, l'expressió utilitzada és

$$\sin p = \frac{r_e \sin z}{\Delta - r_e \cos z} \qquad (4)$$

Aquí, p depèn de z i de Δ, distància que, en el cas del Sol, és constant, però no en el cas de la Lluna.

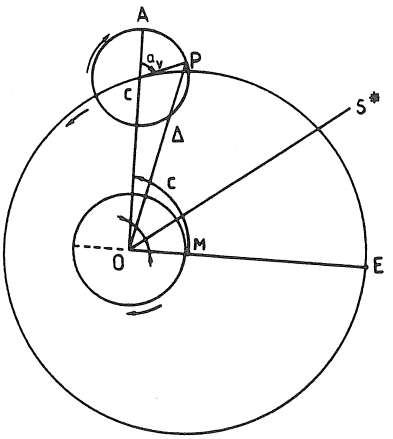


FIGURA 2

Segons la teoria ptolemaica, la Lluna (P) es desplaça d'Est a Oest sobre un cercle de centre C, anomenat epicicle, a velocitat constant. Per la seva banda, el centre del epicicle recorre, d'Oest a Est, un altre cercle, anomenat deferent, el centre M del qual no es troba a la Terra (O), sinò sobre un petit cercle, aquest centrat a O, i gira d'Est a Oest a velocitat sinòdica constant.
E és l'apogeu del deferent i S^* és el Sol eclíptic mitjà del qual s'allunyen C i E a la mateixa velocitat, formant un angle 2η dit doble elongació mitjana de la Lluna.
A és l'apogeu instantani (dit també vertader) de l'epicicle i permet definir l'argument vertader de la Lluna, l'angle a_v.

En la teoria ptolemaica del moviment de la LLuna (fig.2), la distància Δ depèn de la posició que ocupa la Lluna sobre el seu epicicle, és a dir, de l'argument vertader, a_v, així com de la posició del centre del epicicle sobre el cercle deferent, és a dir, de la doble elongació $c = 2\eta$. Així, amb una terminologia moderna, aliena a Ptolemeu, $p(z, a_v, c)$ és una funció de tres variables.

La teoria de la paral.laxi de Ptolemeu és continguda als capítols 11 a 19 del llibre V de l'<u>Almagest</u> (Toomer, 1984).

Per al tractament de la funció $p(z, a_v, c)$, Ptolemeu estudià en primer lloc el comportament de la variable més forta, z, mantenint constant les altres dues, a_v i c, a les quals assignà valors extrems ($a_v = 0°$ i $180°$; $c = 0°$ i $180°$), la qual cosa donà lloc a quatres situacions:

<u>1) $c = 0°$, $a_v = 0°$.</u>

La primera condició equival a considerar el centre del epicicle en l'apogeu del deferent (és la situació corresponent a la sizigia). La segona condició equival a situar la LLuna, P, en l'apogeu A de l'epicicle (fig.3.1).

Prenem MC= R =radi del deferent, OM= e =excentricitat o radi de la circumferència excèntrica i CA= r =radi de l'epicicle. En aquesta configuració, la distància geocèntrica Δ_1 de la Lluna és $\Delta_1 = e + R + r$. En els models lunars de Ptolemeu, $R = 48;52\ r_e$, $e = 10;8\ r_e$ i $r = 5;10\ r_e$, valors expressats en unitats sexagesimals de radis terrestres. Així, $\Delta_1 = 64;10\ r_e$ és el valor de l'allunyament màxim de la Lluna.

<u>2) $c = 0°$, $a_v = 180°$.</u>

La primera condició és anàloga a la anterior, és a dir, la Lluna es troba a la sizigia. La segona condició equival a situar la LLuna en el perigeu B de l'epicicle (Fig.3.2). En aquesta configuració, la distància geocèntrica Δ_2 de la

Lluna és $\Delta_2 = e + R - r = 53;50\, r_e$ i correspon a la distància mínima en la sizigia.

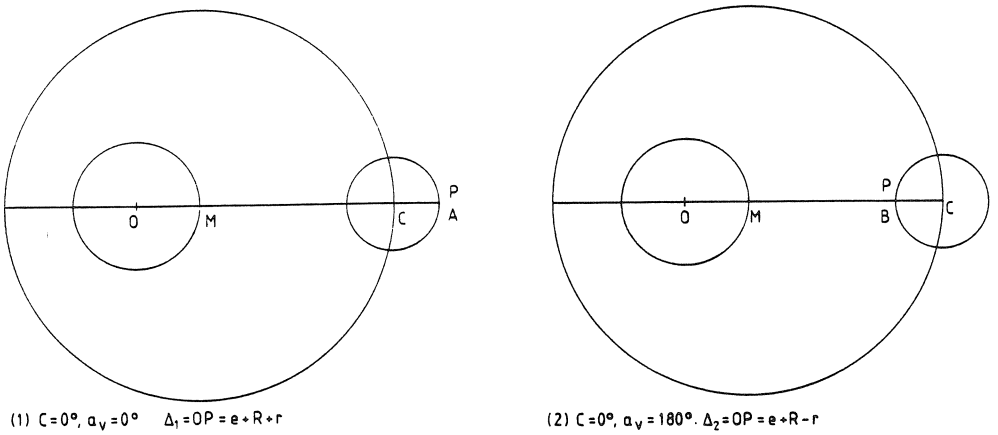


FIGURA 3

Sigizies

3) $C = 180^\circ$, $a_v = 0^\circ$.

La primera condició equival a situar el centre C de l'epicicle en el perigeu del deferent (és la situació corresponent a una quadratura). La segona condició equival a situar la Lluna en l'apogeu A de l'epicicle (fig.4.1). En aquesta configuració, la distància geocèntrica Δ_3 de la Lluna és $\Delta_3 = R - e + r = 43;54\, r_e$ i correspon a la distància màxima en la quadratura.

4) $C = 180^\circ$, $a_v = 180^\circ$

La primera condició situa la Lluna en la quadratura i la segona la situa en el perigeu B de l'epicicle (fig. 4.2).

En aquesta configuració, la distància geocèntrica Δ_4 de la Lluna és $\Delta_4 = R - e - r = 33;34\, r_e$, l'allunyament mínim de la Lluna.

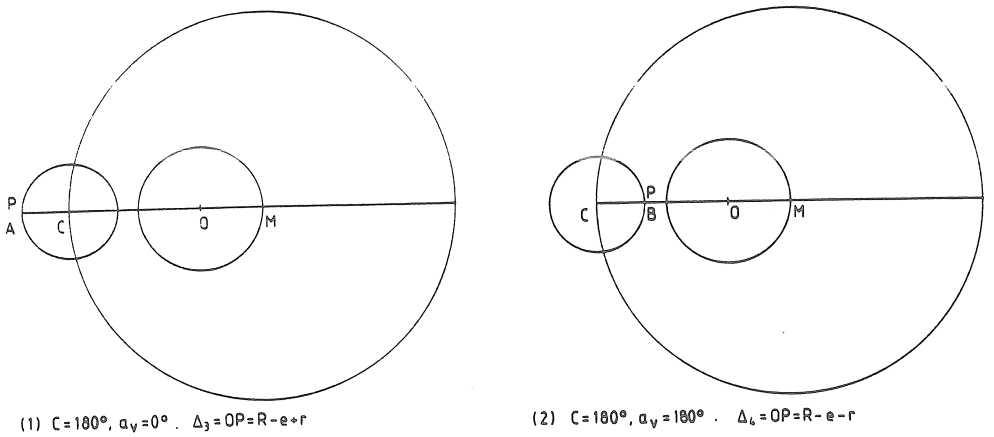


FIGURA 4

Quadratures

Els quatre valors de Δ són els extrems que pot prendre la distància de la Lluna en les sizigies (Δ_1 i Δ_2) i les quadratures (Δ_3 i Δ_4) i corresponen als valors màxims i mínims de les dues variables a_v i c. Ptolemeu defineix llavors quatre funcions de paral.laxi d'una única variable, la distància zenital z , corresponents a cadascun d'aquests quatre valors extrems de la distància:

$$p_1 = p(z, \Delta_1) \quad p_2 = p(z, \Delta_2) \quad p_3 = p(z, \Delta_3) \quad p_4 = p(z, \Delta_4)$$

L'expressió (4) permet d'establir una taula per a cada funció de z . Els valors de $p_i(z)$ apareixen en el capítol 18 del llibre V de l'Almagest, en l'anomenada "taula de paral.laxi", coneguda amb el nom de "taula de les nou columnes" i reproduïda a la pàgina següent (Toomer, 1984).

TAULA DE PARA.LLAXI

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0 0 7	0 1 54	0 0 23	0 3 0	0 0 50	0 14	0 11	0 15
4	0 0 13	0 3 48	0 0 45	0 6 0	0 1 40	0 28	0 22	0 30
6	0 0 19	0 5 41	0 1 7	0 9 0	0 2 30	0 42	0 33	0 45
8	0 0 25	0 7 34	0 1 29	0 11 40	0 3 20	1 22	1 7	1 33
10	0 0 31	0 9 27	0 1 51	0 14 20	0 4 10	2 2	1 41	2 21
12	0 0 37	0 11 19	0 2 12	0 17 0	0 5 0	2 42	2 15	3 9
14	0 0 42	0 13 10	0 2 33	0 19 40	0 5 50	3 35	3 13	4 22
16	0 0 48	0 15 0	0 2 54	0 22 20	0 6 40	4 28	4 11	5 35
18	0 0 53	0 16 49	0 3 15	0 25 0	0 7 30	5 21	5 9	6 48
20	0 0 58	0 18 36	0 3 36	0 27 40	0 8 20	6 39	6 25	8 25
22	0 1 4	0 20 22	0 3 57	0 30 20	0 9 10	7 57	7 41	10 2
24	0 1 9	0 22 6	0 4 18	0 33 0	0 10 0	9 15	8 57	11 39
26	0 1 14	0 23 49	0 4 39	0 35 20	0 10 50	10 50	10 29	13 32
28	0 1 20	0 25 30	0 4 59	0 37 40	0 11 40	12 25	12 1	15 25
30	0 1 25	0 27 9	0 5 18	0 40 0	0 12 30	14 0	13 33	17 18
32	0 1 30	0 28 46	0 5 37	0 42 20	0 13 20	15 52	15 22	19 23
34	0 1 35	0 30 21	0 5 55	0 44 40	0 14 10	17 44	17 11	21 28
36	0 1 40	0 31 54	0 6 13	0 47 0	0 15 0	19 36	19 0	23 33
38	0 1 44	0 33 24	0 6 30	0 49 0	0 15 40	21 36	20 59	25 40
40	0 1 49	0 34 51	0 6 47	0 51 0	0 16 20	23 36	22 58	27 47
42	0 1 54	0 36 14	0 7 4	0 53 0	0 17 0	25 36	24 57	29 54
44	0 1 58	0 37 37	0 7 20	0 55 0	0 17 40	27 40	27 1	32 0
46	0 2 3	0 38 57	0 7 35	0 57 0	0 18 20	29 44	29 5	34 6
48	0 2 8	0 40 14	0 7 49	0 59 0	0 19 0	31 48	31 9	36 12
50	0 2 12	0 41 28	0 8 3	1 0 40	0 19 40	33 52	33 14	38 9
52	0 2 16	0 42 39	0 8 16	1 2 20	0 20 20	35 56	35 19	40 6
54	0 2 20	0 43 45	0 8 29	1 4 0	0 21 0	38 0	37 24	42 3
56	0 2 23	0 44 48	0 8 42	1 5 20	0 21 20	40 0	39 24	43 49
58	0 2 26	0 45 48	0 8 53	1 6 40	0 21 40	42 0	41 24	45 35
60	0 2 29	0 46 46	0 9 3	1 8 0	0 22 0	44 0	43 24	47 21
62	0 2 32	0 47 40	0 9 13	1 9 20	0 22 20	45 50	45 13	48 49
64	0 2 34	0 48 30	0 9 22	1 10 40	0 22 40	47 40	47 2	50 17
66	0 2 36	0 49 15	0 9 31	1 12 0	0 23 0	49 30	48 51	51 45
68	0 2 38	0 49 57	0 9 39	1 13 0	0 23 10	50 56	50 24	52 57
70	0 2 40	0 50 36	0 9 46	1 14 0	0 23 20	52 22	51 57	54 9
72	0 2 42	0 51 11	0 9 53	1 15 0	0 23 30	53 48	53 30	55 21
74	0 2 44	0 51 44	0 9 59	1 15 40	0 23 40	54 57	54 41	56 12
76	0 2 46	0 52 12	0 10 4	1 16 20	0 23 50	56 6	55 52	57 3
78	0 2 47	0 52 34	0 10 8	1 17 0	0 24 0	57 15	57 3	57 54
80	0 2 48	0 52 53	0 10 11	1 17 20	0 24 10	57 57	57 47	58 26
82	0 2 49	0 53 9	0 10 14	1 17 40	0 24 20	58 39	58 31	58 58
84	0 2 50	0 53 21	0 10 16	1 18 0	0 24 30	59 21	59 15	59 30
86	0 2 50	0 53 29	0 10 16	1 18 20	0 24 40	59 34	59 30	59 40
88	0 2 51	0 53 33	0 10 17	1 18 40	0 24 50	59 47	59 45	59 50
90	0 2 51	0 53 34	0 10 17	1 19 0	0 25 0	60 0	60 0	60 0

La primera columna conté els valors de les variables z, a_v i c , de 2° en 2°, des de 2° dins a 90°.

La segona columna conté els valors de la paral.laxi solar determinada per Ptolemeu a partir d'una expressió equivalent a (4) i per a una distància constant del Sol: Δ =1210 radis terrestres. La paral.laxi horitzontal adoptada és 0;2,51°. Quan es calculen els 45 valors de la columna amb l'expressió (4), 22 coincideixen amb els de Ptolemeu després d'arrodonir

al segon d'arc. La desviació mitjana és 0",43.

La tercera columna conté els valors de $p_1(z)$, que es designaran per $c_3(z)$.

La quarta columna <u>no</u> conté els valors de $p_2(z)$, sinó els de $p_2(z) - p_1(z)$, que designarem per $c_4(z)$.

La cinquena columna conté els valors de $p_3(z)$, que designarem per $c_5(z)$.

La sisena columna <u>no</u> conté els valors de $p_4(z)$, sinò els de $p_4(z) - p_3(z)$, que designarem per $c_6(z)$.

A la fig. 5 es troben els gràfics de les funcions $p_i(z)$.
Les tres altres columnes deriven de la resta de la teoria de la paral.laxi, que hom examina a continuació.

Per tal de tenir en compte l'influència de les altres dues variables, a_v i c, en la funció de la paral.laxi, Ptolemeu considera primer la variació d'aquesta funció produïda per a_v, mantenint c constant i asignant-li valors extrems ($c = 0^\circ$ i 180) la qual cosa dóna lloc a les dues situacions següents:

$\boxed{1)\ c = 0^\circ}$ (el centre del epicicle es troba en l'apogeu del deferent i la configuració és la d'una sizigia, fig. 6.1.).

L'argument vertader pot variar des de 0° (Lluna en l'apogeu) fins a 180° (Lluna en el perigeu) i les corresponents distàncies varien aleshores des de Δ_1 a Δ_2 amb una variació màxima $\Delta_1 - \Delta_2 = 2r = 10;20\ r_e$. Per a cada valor de z, les paral.laxis poden variar des de $p(z, \Delta_1)$ fins a $p(z, \Delta_2) = c_3(z) + c_4(z)$

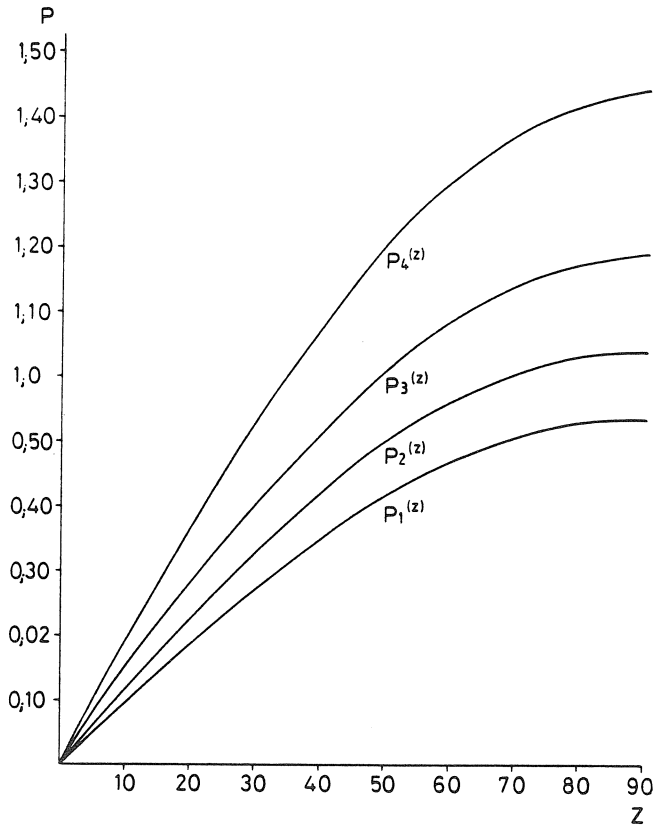


FIGURA 5

Paral.laxis per a les distàncies extremes en les sigizies i les quadratures.

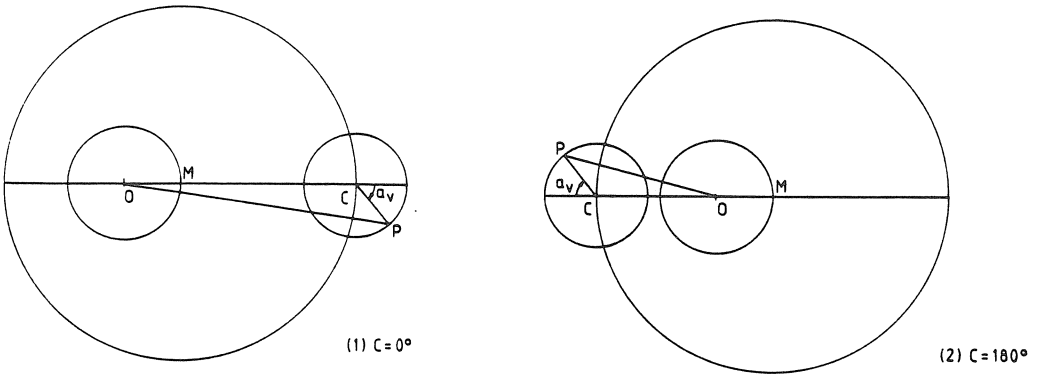


FIGURA 6
Influència de l'argument vertader.

Per als valors intermedis d' a_v Ptolemeu construeix una funció que depengui d'una única variable, l'argument vertader, i que actuï com a factor de correcció a l'increment $c_4(z)$ de la paral.laxi entre les distàncies Δ_1 i Δ_2 i que, per tant, variï entre 0 i 1. Aquesta funció es presenta en la columna 7 de la "taula de paral.laxi" i la designarem per $c_7(a_v)$.

La funció $c_7(a_v)$ resulta d'una interpolació lineal entre Δ_1 i Δ_2: $c_7(a_v) = [\Delta_1 - OP(a_v)] / 2r$

on $OP(a_v)$ és la distància de la Lluna quan aquesta es troba sobre l'epicicle amb un argument vertader a_v. Aquí,

$$OP^2 = [r \cos a_v + (R+e)]^2 + (r \sin a_v)^2$$

Així, la paral.laxi en una sizigia pot expressar-se mitjançant la funció:

$$p_5(z, a_v) = c_3(z) + c_4(z) \cdot c_7(a_v) \qquad (5)$$

$\boxed{2)\ c = 180^\circ}$ (el centre de l'epicicle es troba en el perigeu del deferent i la configuració és la d'una quadratura, fig. 6.2).

L'argument vertader pot variar des de 0° (Lluna en l'apogeu) fins a 180° (Lluna en el perigeu) i les corresponents distàncies varien aleshores des de Δ_3 a Δ_4, amb una variació màxima $\Delta_4 - \Delta_3 = 2r = 10;20\ r_e$. Per a cada valor de z, les paral.laxis poden variar des de $p(z, \Delta_3)$ fins a $p(z, \Delta_4) = c_5(z) + c_6(z)$.

En aquest cas, la funció d'interpolació es designa per

$c_8(a_v)$ i apareix tabulada a la columna 8 de la "taula de paral.laxi" i respon a l'expressió:

$$c_8(a_v) = \frac{\Delta_3 - OP(a_v)}{2r}$$

on $OP^2 = [r \cos a_v + (R-e)]^2 + (r \sin a_v)^2$.

La funció $c_8(a_v)$ pren el valor 0 quan $a_v = 0^\circ$ ($OP = \Delta_3$) i 1 quan $a_v = 180^\circ$ ($OP = \Delta_4$). Així, la paral.laxi en una quadratura pot expressar-se mitjançant la funció:

$$p_q(z, a_v) = c_5(z) + c_6(z) \cdot c_8(a_v) \qquad (6)$$

La variable de les funcions c_7 i c_8 pot prendre valors compresos entre 0° i 180°, però en la columna 1 de la taula només hi figuren valors compresos entre 0° i 90°; per tant, per a obtenir els valors de c_7 i c_8 corresponents a a_v cal entrar en la columna 1 amb el valor de $a_v/2$. D'altra banda, en les columnes 7 i 8 apareixen els coeficients per a cada valor d' a_v expressats en unitats sexagesimals, de forma que la unitat (la màxima correcció) correspon a 60;0.

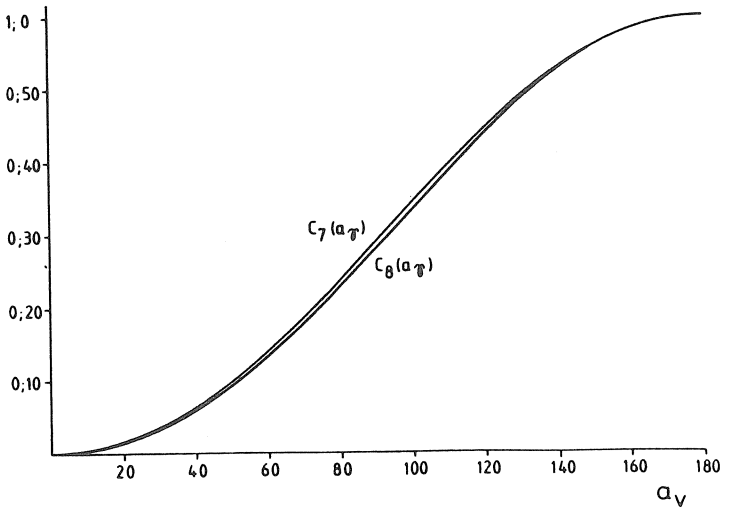


FIGURA 7

Les funcions de correcció per a l'argument vertader

Com pot veure's en la fig.7, les funcions d'interpolació $c_7(a_v)$ i $c_8(a_v)$ difereixen molt poc entre si.

Les expressions (5) i (6) permeten de calcular les paral.laxis en les sizigies ($c=0°$) i en les quadratures ($c=180°$). Manca incorporar encara la influència de la tercera variable, la doble elongació, c. Ptolemeu construeix aleshores una nova funció que actuï com a factor de correcció a l'increment de paral.laxi entre una sizigia i una quadratura. Aquest increment,

$$p_q(z,a_v) - p_s(z,a_v) = c_5 + c_6 \cdot c_8 - c_3 - c_4 \cdot c_7 \qquad (7)$$

és sempre positiu, ja que la distància de l'apogeu de l'epicicle a la Terra, en la quadratura, és menor que la distància del perigeu, en la sizigia. La funció buscada es designa per $c_q(z)$ i apareix tabulada en la columna 9 de la "taula de paral.laxi" i resulta d'interpolar linealment entre les distàncies corresponents a les quadratures i les sizigies $\Delta_3 - \Delta_1 = \Delta_2 - \Delta_4 = 20;16\, r_e = 2e$.

La funció $c_q(c)$ pot expressar-se per

$$c_q(c) = \frac{R+e-OC(c)}{2e} \quad ,$$

on $OC(c)$ és la distància al centre de l'epicicle, quan la doble elongació d'aquell és c. Com pot veure's a la fig.8 :

$$OC = [R^2 - (e \sin c)^2]^{1/2} + e \cos c$$

La funció $C_q(c)$ pren el valor 0 quan $c = 0^\circ$ ($OC = R+e$) i el valor 1 quan $c = 180^\circ$ ($OC = R-e$).

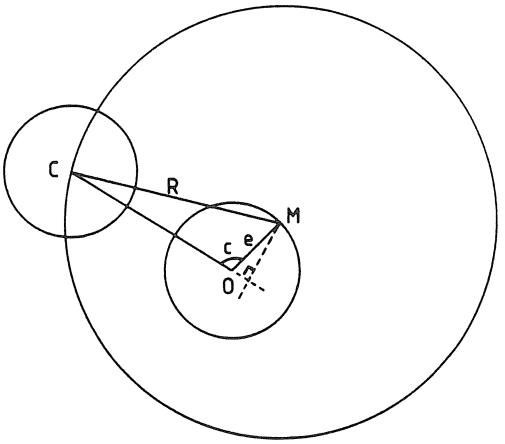


FIGURA 8
Influència de la doble elongació

Igual que en els casos de C_7 i C_8, per a obtenir, a partir de la "taula de paral.laxi", els valors de C_q corresponents a la variable c, cal entrar a la columna 9 amb el valor de $c/2$. També aquí, els coeficients corresponents a cada valor de c són expressats en unitats sexagesimals, de manera que la unitat correspon a 60;0. La fig.9 representa la funció $C_q(c)$

Tenint en compte aquesta nova correcció, l'expressió (7) es transforma en la funció general de paral.laxi i s'escriu:

$$p(z, a_v, c) = p_s(z, a_v) + [p_q(z, a_v) - p_s(z, a_v)] \cdot C_q(c)$$

o bé, utilitzant la nomenclatura de columnes de la "taula de paral.laxi" de l'Almagest, V, 18:

$$p = (C_5 + C_6 \cdot C_8) \cdot C_q + (C_3 + C_4 \cdot C_7)(1 - C_q)$$

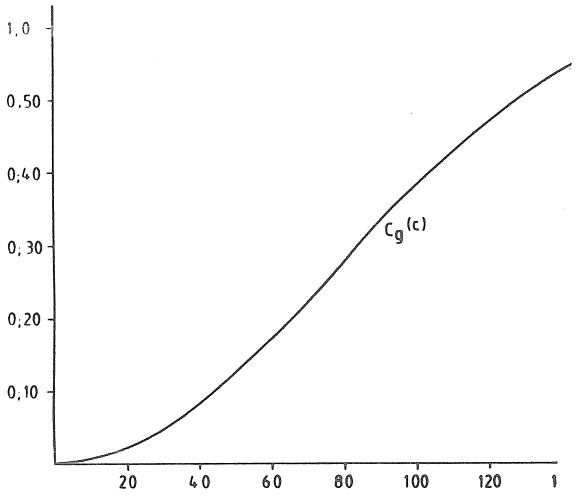
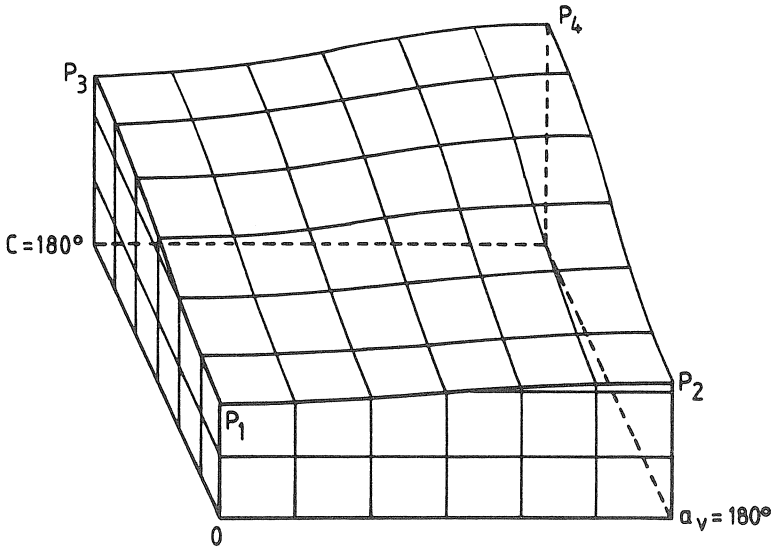


FIGURA 9

La funció de correcció per a la doble elongació.

Aquesta ha estat l'expressió utilitzada per al càlcul dels 49 punts de cada una de les superfícies de les figures 10, 11 i 12 on s'aprecia el comportament de la funció general de paral.laxi per a valors de les distàncies zenitals de 30°, 60° i 90° (paral.laxi horitzontal).



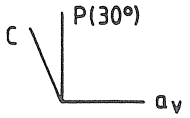
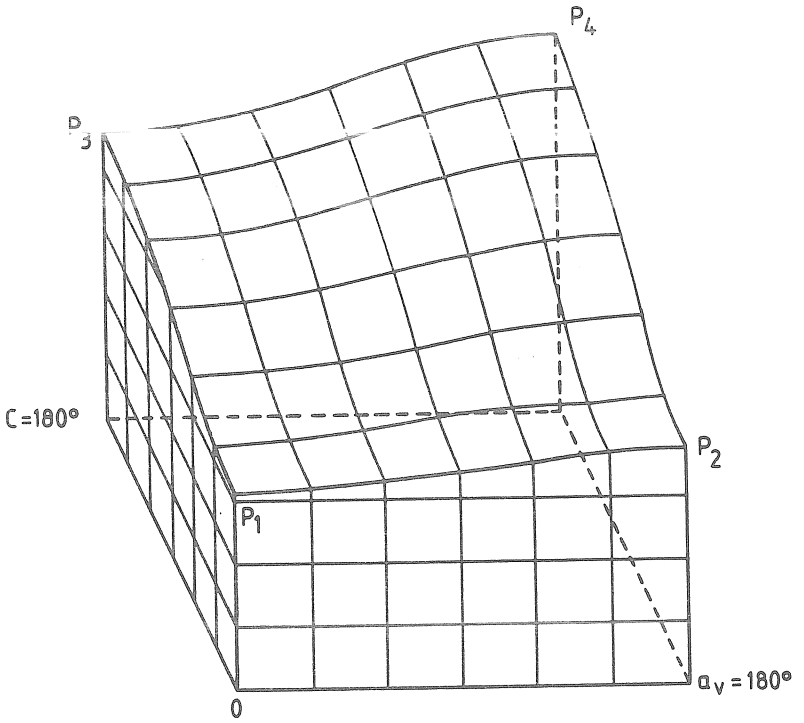


FIGURA 10

Paral.laxi per a la distància zenital z=30°
φ_1 = 0;27,9°
φ_2 = 0;32,27°
φ_3 = 0;40,0°
φ_4 = 0;52,30°



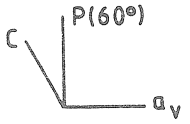
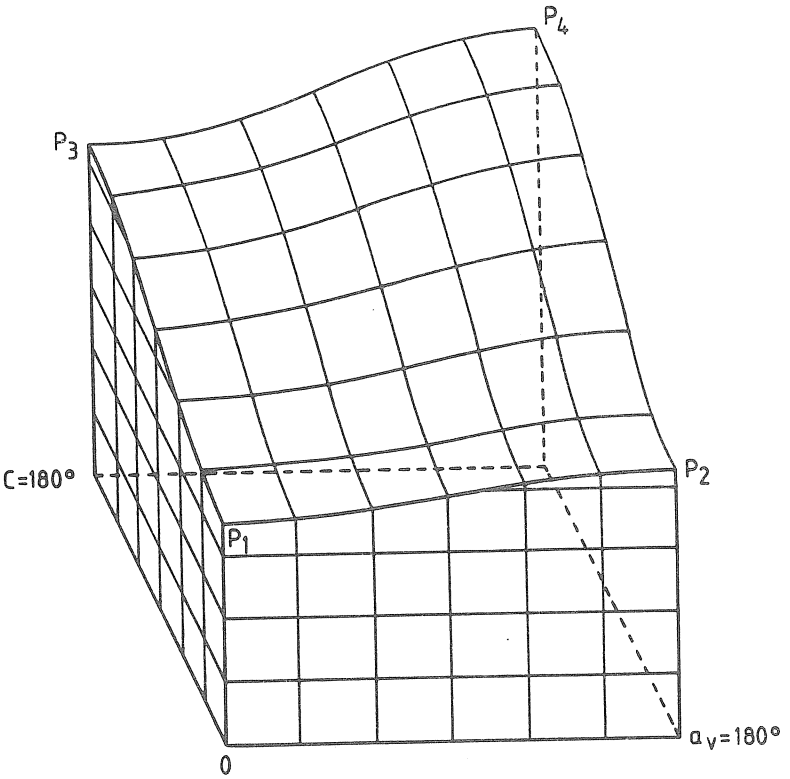


FIGURA 11

Paral.laxi per a la distància zenital z=60°
p_1= 0;46,46°
p_2= 0;55,49°
p_3= 1;8°
p_4= 1;30°



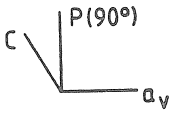


FIGURA 12

Paral.laxi per a la distància zenital z=90°

p_1 =0;53,34°

p_2 =1;3,51°

p_3=1;39°

p_4 =1;44°

6. CONSIDERACIONS FINALS

La teoria ptolemaica de la paral.laxi, tal com ha estat exposada aquí, constitueix un primer exemple de tractament numèric, basat en regles pràctiques, d'una funció de tres variables, en una època en què el mateix concepte de funció era desconegut. L'objectiu que es planteja és d'establir un lligam entre les teories i els models de moviments dels astres (sempre des d'un punt de vista geocèntric) amb les observacions (topocèntriques). Tanmateix, per a la seva aplicació concreta, subsisteix un problema: la teoria clàssica de la paral.laxi es fonamenta en distàncies zenitals (sobre cercles verticals). Es, per tant, una teoria en altura, mentre que els moviments dels astres prenen l'eclíptica com a cercle de referència. Resulta doncs necessari descompondre la paral.laxi en altura obtinguda en dos components eclíptics (en longitud i latitud) i, per tant, cal plantejar-se el problema de la determinació de l'angle que forma l'eclíptica amb un cercle vertical, per a qualsevol lloc de la superfície terrestre i per a qualsevol instant del dia i època de l'any. Aquest és un problema complex, al qual Ptolemeu, tot i utilitzar una astronomia esfèrica molt rudimentària, també aporta una solució.

Aquesta segona part del problema rebé les aportacions de diversos astrònoms i matemàtics al llarg de l'Edat Mitjana, però el tractament de la funció de paral.laxi, que Ptolemeu fou el primer en exposar de qui tenim notícia, romangué pràcticament invariable durant setze segles.

7. BIBLIOGRAFIA

Danjon, A., Astronomie génerale, 2a edició. Paris (1959).

Kennedy, E.S., "Parallax Theory in Islamic Astronomy", Isis 47, p. 33-53 (1956).

Neugebauer, O., A History of Ancient Mathematical Astronomy, Berlin-Heidelberg-Nova York (1975).

Pedersen, O., A Survey of the Almagest, Odense (1974).

Toomer, G.J., Ptolemy's Almagest, Berlin-Heidelberg. Nova York (1984).