DIFERENCIAL DE CLIFFORD I OPERADOR DE LAPLACE EN UNA VARIETAT RIEMANNIANA. ANÀLISI VECTORIAL CLÀSSICA I EQUACIONS DE MAXWELL

Josep Manel Parra
Departament de Física Fonamental.
Universitat de Barcelona.
Diagonal 647 , 08028-Barcelona.

RESUM

Desenvolupem el càlcul diferencial associat al fibrat de Clifford d'una varietat riemanniana de dimensió arbitrària amb les següents especialitzacions: adopció d'un sistema local de coordenades ortogonals i utilització exclusiva dels components físics. La diferencial de Clifford, contemplada com a necessària adequació del procés de diferenciació covariant associat a la connexió mètrica, resulta que generalitza la "nabla" usual i que és suma de la diferencial exterior i la codiferencial. Es, així, l'arrel quadrada del laplacià, quan aquest operador actua sobre formes de qualsevol ordre.

S'ofereixen expressions explícites en components de tots els operadors tractats i, amb especial detall, en els casos euclidià i minkowskià. Com a il.lustració hem formulat en dimensions 3 i 4 el conjunt d'equacions de Maxwell, que en aquesta formulació formen una unitat amb la condició de gauge de Lorentz.

ABSTRACT

In this article we develop the differential calculus corresponding to the Clifford fiber bundle associated to a riemannian manifold in a natural way. Our scope is limited, or better specialized, to the important case of orthogonal local systems of coordinates and to the sole use of physical components. Within this framework the Clifford differential D is viewed as a necessary adequation of the process of covariant differentiation and also as the direct generalization of the Hamilton-Gibbs-Heaviside operator. But it is also the sum of the outer derivative and the outer codifferential, being thus the proper square root of the Laplace operator when it acts on differential forms of any degree. We give full explicit component expressions for all the operators considered and specially for the Laplace operator in any dimension and signature.

As an illustration using a well known subject we work out in 3-space and in minkowski's space-time the basic operators and equations of Maxwell's electromagnetic theory in empty space which, in our formulation, is tightly united to the Lorentz gauge condition.

volum

$$\epsilon \equiv e_1 e_2 \dots e_n = e_{12\dots n}$$

La diferència és deguda al fet que el criteri d'ordenació de les contraccions tensorials que defineixen la * no es correspon amb l'ordre natural de realització del producte de Clifford.

Donat el vast domini d'aplicació de l'operador diferencial (de Clifford), n'oferim fórmules explícites a V_3 i V_4 vàlides per a qualsevol signatura i sistema de coordenades ortogonals. Particularitzades al cas euclidià i minkowskià en coordenades cartesianes ofereixen l'expressió de la diferencial D en termes dels operadors clàssics de l'anàlisi vectorial. Aquestes expressions, juntament amb la pròpia definició de D, ens fan evident que D adquireix totes les funcions que tradicionalment han estat assignades a la versàtil "nabla" de Gibbs-Heaviside. Així mateix, ens permetran d'establir còmodament la relació amb la formulació tradicional basada en la * de Hodge i escriure, a tall d'exemple, les equacions de Maxwell.

Finalitzem l'apartat oferint expressions per a la derivació d'un producte de Clifford que es mostren de gran utilitat en les aplicacions i que sintetitzen bona part de les fórmules del càlcul vectorial.

Al tercer apartat oferim expressions formals de l'operador D vàlides per a dimensió arbitrària i avaluem, en funció dels coeficients $H_i(x)$ de la mètrica, la laplaciana d'una forma diferencial qualsevol. L'expressió obtinguda, d'una notable simplicitat i generalitat, no ens consta a la bibliografia consultada, tot i resultar força evident l'interès pràctic d'una fórmula d'aquest tipus per a un operador que es mostra essencial en les més diverses teories físiques.

2. DIFERENCIAL DE CLIFFORD

2.1. Diferencial covariant i diferencial de Clifford

La caracterització habitual de la connexió riemanniana consisteix en el conjunt de símbols de Christoffel de segona espècie que donen la variació de la base holònoma mitjançant les expressions

$$\partial_i^{\nabla} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \, \partial_k \qquad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} [g_{il,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}] \tag{2.1}$$

Per les raons ja indicades abans, ens interessem per una caracterització alternativa en la base física

$$e_i^{\nabla} e_j = \underset{k}{\tau}{}^k_{ij} \, e_k \tag{2.2}$$

Aquests símbols τ_{ij} que especifiquen la connexió en la base física poden obtenir-se dels anteriors utilitzant les fòrmules de canvi de base (1.2). En el cas d'un sistema de coordenades ortogonals (1.1) obtenim les expressions

$$\tau^i_{ii} = 0 \quad , \quad \tau^j_{ij} = 0 \quad , \quad \tau^m_{ij} = 0 \qquad i \neq j \neq m \neq i$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau^i_{ij} = \dfrac{h_{i,j}}{h_i \, h_j} = e_j \, (\ln h_i) = e_j \, (H_i) \equiv q_{ij} \\ \qquad\qquad e_i \, e_j = q_{ij} \, e_i \\ \tau^j_{ij} = - g_i \, g_j \, \dfrac{h_{i,j}}{h_i \, h_j} = g_i \, g_j \, e_j (H_i) = - g_i \, g_j \, q_{ij} \\ \qquad\qquad e_i \, e_i = - g_i \, g_j \, q_{ij} \, e_j \end{array}\right\} \; i \neq j \tag{2.3}$$

La diferencial covariant pot definir-se com aquell operador que expressa la variació global dels camps tensorials, de manera que la seva contracció amb un camp vectorial qualsevol ens dóna la derivada (covariant) en la direcció indicada per aquest. En la base holònoma la seva definició és

$$d^{\nabla} = d\, x^i \otimes \partial^{\nabla}_{x^i} \tag{2.4 a}$$

Tenint presen el canvi de base (1.2), aquest operador passa a escriure's

$$d^{\nabla} = g_i \, e^i \otimes e_i^{\nabla} \tag{2.4 b}$$

Quan en lloc del producte tensorial considerem el producte de Clifford, la transcripció natural de l'esmentat operador serà

$$D = g_i \; e_i \; e_i^{\nabla} \tag{2.5}$$

expressió en la qual l'absència de símbol del producte indica, precisament, el producte de Clifford. Com a exemple d'actuació de l'operador D considerem, en una varietat 4-dimensional:

$$\begin{aligned}
D (A_3 \, e_{03}) = {} & g_0 \, e_{003} \, e_0^{\nabla} (A_3) + g_1 \, e_{103} \, e_1^{\nabla} (A_3) + g_2 \, e_{203} \, e_2^{\nabla} (A_3) + \\
& + g_3 \, e_{303} \, e_3^{\nabla} (A_3) + A_3 \, \{ (- g_1 \, e_0 \, q_{01} \, e_{13} - g_2 \, e_0 \, q_{02} \, e_{23} - \\
& - g_3 \, e_0 \, q_{03} \, e_{33}) + g_0 \, e_{00} \, q_{03} \, e_0 + g_1 \, e_1 \, q_{10} \, e_{13} + \\
& + g_1 \, e_{10} \, q_{13} \, e_1 + g_2 \, e_2 \, q_{20} \, e_{23} + g_2 \, e_{20} \, q_{23} \, e_2 + \\
& + g_3 \, e_3 \, q_{30} \, e_{33} - g_0 \, e_{30} \, q_{30} \, e_0 - g_1 \, e_{30} \, q_{31} \, e_1 - g_2 \, e_{30} \, q_{32} \, e_2 \} = \\
= {} & e_0^{\nabla} (A_3) \, e_3 + g_1 \, e_1^{\nabla} (A_3) \, e_{031} - g_2 \, e_2^{\nabla} (A_3) \, e_{023} - \\
& - e_3^{\nabla} (A_3) \, e_0 + A_3 \, \{ g_1 \, q_{01} \, e_{031} - g_2 \, q_{02} \, e_{023} + q_{10} \, e_3 - \\
& - q_{13} \, e_0 + q_{20} \, e_3 - q_{23} \, e_0 + g_1 \, q_{31} \, e_{031} - g_2 \, q_{32} \, e_{023} \} = \\
= {} & \{ - e_3^{\nabla} (A_3) - A_3 (q_{13} + q_{23}) \} \, e_0 + \\
& + \{ e_0^{\nabla} (A_3) + A_3 (q_{10} + q_{20}) \} \, e_3 + \\
& + \{ - g_2 \, e_2^{\nabla} (A_3) - g_2 \, A_3 (q_{02} + q_{32}) \} \, e_{023} + \\
& + \{ g_1 \, e_1^{\nabla} (A_3) + g_1 \, A_3 (q_{01} + q_{31}) \} \, e_{031}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

A continuació donem el resultat d'aplicar l'operador D a elements genèrics de les àlgebres de Clifford corresponents a espais de dimensions 3 i 4, de signatura arbitrària. Convé fer notar aquí que en l'escriptura de les taules, en tractar tan sols amb components, utilitzem $e_i(A_I)$ per a designar $e_i (A_I) \equiv \frac{1}{h_i} \, {}_{x^i} (A_I)$. Aquesta notació, habitual en tant que la derivada covariant d'una funció escalar coincideix amb la derivació ordinària definida pel camp vectorial e_i , és convenient no usar-la en el procés explícit de derivació en el qual figuren productes de Clifford de vectors e_i, tal com ha quedat il.lustrat a la deducció (2.6).

cas 3 - dimensional

$$D\,(\,\alpha\, 1 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + A_1 e_{23} + A_2 e_{31} + A_3 e_{12} + \pi\, e_{123} =$$

$$D\begin{bmatrix} \alpha \\ \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(a_1) + e_2(a_2) + e_3(a_3) + a_1(q_{21} + q_{31}) + a_2(q_{12} + q_{32}) + a_3(q_{13} + q_{23}) \\ \\ g_1\, e_1\,(\alpha) \;\big|\; - e_2\,(A_3) + e_3\,(A_2) + A_2\, q_{23} - A_3\, q_{32} \\ g_2\, e_2\,(\alpha) \;\big|\; - e_3\,(A_1) + e_1\,(A_3) + A_3\, q_{31} - A_1\, q_{13} \\ g_3\, e_3\,(\alpha) \;\big|\; - e_1\,(A_2) + e_2\,(A_1) + A_1\, q_{12} - A_2\, q_{21} \\ \\ g_2\, e_2\,(a_3) - g_3\, e_3\,(a_2) - g_3\, a_2\, q_{23} + g_2\, a_3\, q_{32} \;\big|\; + e_1\,(\,\pi\,) \\ g_3\, e_3\,(a\ ) - g_1\, e_1\,(a_3) - g_1\, a_3\, q_{31} + g_3\, a_1\, q_{13} \;\big|\; + e_2\,(\,\pi\,) \\ g_1\, e_1\,(a_2) - g_2\, e_2\,(a_1) - g_2\, a_1\, q_{12} + g_1\, a_2\, q_{21} \;\big|\; + e_3\,(\,\pi\,) \\ g_1 e_1(A_1) + g_2 e_2(A_2) + g_3 e_3(A_3) + g_1 A_1(q_{21} + q_{31}) + g_2 A_2(q_{12} + q_{32}) + g_3 A_3(q_{13} + q_{23} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

cas 4 - dimensional

$$D\,(\,\alpha\, 1 + v_0 e_0 + v_i e_i + A_i e_{0i} + C_i e_{jk} + S_0 e_{123} + S_i e_{0jk} + \pi\, e_{0123}\,) =$$

$$1\{\, e_0(v_0) + e_1(v_1) + e_2(v_2) + e_3(v_3) + v_0(q_{10} + q_{20} + q_{30}) + v_1(q_{01} + q_{21} + q_{31})$$
$$+ v_2(q_{02} + q_{12} + q_{32}) + v_3(q_{03} + q_{13} + q_{23})\,\} +$$

$$e_0\{ -e_1(A_1) - e_2(A_2) - e_3(A_3) - A_1(q_{21} + q_{31}) - A_2(q_{12} + q_{32}) - A_3(q_{13} + q_{23}) \;\big|\; + g_0 e_0(\alpha)\}$$
$$e_1\{\, e_0(A_1) - e_2(C_3) + e_3(C_2) + A_1(q_{20} + q_{30}) + C_2(q_{03} + q_{23}) - C_3(q_{02} + q_{32}) \;\big|\; + g_1 e_1(\alpha)\}$$
$$e_2\{\, e_0(A_2) - e_3(C_1) + e_1(C_3) + A_2(q_{10} + q_{30}) + C_3(q_{01} + q_{31}) - C_1(q_{03} + q_{13}) \;\big|\; + g_2 e_2(\alpha)\}$$
$$e_3\{\, e_0(A_3) - e_1(A_2) + e_2(A_1) + A_3(q_{10} + q_{20}) + C_1(q_{02} + q_{12}) - C_2(q_{01} + q_{21}) \;\big|\; + g_3 e_3(\alpha)\}$$

$$
\begin{aligned}
&e_{01}\{\ e_2(S_3) - e_3(S_2) + S_3 q_{32} - S_2 q_{23} + \big|\ g_0 e_0(v_1) - g_1 e_1(v_0) + g_0 v_1 q_{10} - g_1 v_0 q_{01} \}\\
&e_{02}\{\ e_3(S_1) - e_1(S_3) + S_1 q_{13} - S_3 q_{31} + \big|\ g_0 e_0(v_2) - g_2 e_2(v_0) + g_0 v_2 q_{20} - g_2 v_0 q_{02} \}\\
&e_{03}\{\ e_1(S_2) - e_2(S_1) + S_2 q_{21} - S_1 q_{12} + \big|\ g_0 e_0(v_3) - g_3 e_3(v_0) + g_0 v_3 q_{30} - g_3 v_0 q_{03} \}\\
&e_{23}\{\ e_0(S_1) - e_1(S_0) + S_1 q_{10} + S_0 q_{01} + \big|\ g_2 e_2(v_3) - g_3 e_3(v_2) + g_2 v_3 q_{32} - g_3 v_2 q_{23} \}\\
&e_{31}\{\ e_0(S_2) - e_2(S_0) + S_2 q_{20} + S_0 q_{02} + \big|\ g_3 e_3(v_1) - g_1 e_1(v_3) + g_3 v_1 q_{13} - g_1 v_3 q_{31} \}\\
&e_{12}\{\ e_0(S_3) - e_3(S_0) + S_3 q_{30} + S_0 q_{03} + \big|\ g_1 e_1(v_2) - g_2 e_2(v_1) + g_1 v_2 q_{21} - g_2 v_1 q_{12} \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{123}\ \{\ \ e_0(\pi)\ \big|&+ g_1 e_1(C_1) + g_2 e_2(A_2) + g_3 e_3(A_3) + \\
\big|&+ g_1 C_1(\ q_{21} + q_{31}) + g_2 A_2(\ q_{12} + q_{32}) + g_3 A_3(\ q_{13} + q_{23})\ \}\\[1ex]
e_{023}\ \{\ -e_1(\pi)\ \big|&+ g_0 e_0(C_1) - g_2 e_2(A_3) + g_3 e_3(A_2) + \\
\big|&+ g_0 C_1(\ q_{20} + q_{30}) + g_3 A_2(\ q_{03} + q_{23}) - g_2 A_3(\ q_{02} + q_{32})\ \}\\[1ex]
e_{031}\ \{\ -e_2(\pi)\ \big|&+ g_0 e_0(C_2) - g_3 e_3(A_1) + g_1 e_1(A_3) + \\
\big|&+ g_0 C_2(\ q_{30} + q_{10}) + g_1 A_3(\ q_{01} + q_{31}) - g_3 A_1(\ q_{03} + q_{13})\ \}\\[1ex]
e_{012}\ \{\ -e_3(\pi)\ \big|&+ g_0 e_0(C_3) - g_1 e_1(A_2) + g_2 e_2(A_1) + \\
\big|&+ g_0 C_3(\ q_{10} + q_{20}) + g_2 A_1(\ q_{02} + q_{12}) - g_1 A_2(\ q_{01} + q_{21})\ \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{0123}\ \{\ & g_0 e_0(S_0) - g_1 e_1(S_1) - g_2 e_2(S_2) - g_3 e_3(S_3) + g_0 S_0(\ q_{10} + q_{20} + q_{30}) - \\
& - g_1 S_1(\ q_{01} + q_{21} + q_{31}) - g_2 S_2(\ q_{02} + q_{12} + q_{32}) - g_3 S_3(\ q_{03} + q_{13} + q_{23})\}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

L'actuació de l'operador D , en la mesura que implica la realització del producte de Clifford per l'element e_i del resultat de la derivació e_i , modifica en ± 1 el grau de la forma $A_I\ e_I$. La separació en aquestes dues contribucions ha estat indicada a les expressions (2.7 , 2.8) mitjançant una línia de separació vertical. La part en què el grau de l'element ha estat augmentat en una unitat correspon a la diferencial exterior d' X . L'aparició dels factors g_i en aquest operador, que està definit amb independència de tota estructura mètrica, és deguda a la utilització de la base física contravariant com a base de l'àlgebra de Clifford.

Pel que fa a la part en què el grau ha estat disminuit en una unitat i que indicarem en la forma δ X , es demostra que verifica la relació:

$$\delta X = - g_1 \ldots g_n \quad \epsilon \quad d \quad \epsilon \tag{2.9}$$

on ϵ indica, com sempre, l'element de volum $e_1 e_2 \ldots e_n$.

2.2 Diferencial de Clifford i dualitat de Hodge

L'expressió (2.9), que permet de demostrar fàcilment la nilpotència de δ a partir de la nilpotència de d , és essencialment anàloga a la que defineix usualment la codiferencial en termes de l'operador $*$ de Hodge (de Rahm [1960], Choquet,deWitt,Dillard [1977])

$$\delta_{(usual)} = (-1)^k \, *^{-1} \, d \, * \tag{2.10}$$

quan és aplicat a una forma de grau k .

No entrarem aquí en detalls sobre la definició de l'operador $*$ de Hodge sinó que ens limitarem a comentar que la relació existent entre la δ definida per (2.9) i la definida per (2.10) ,equivalent aquesta darrera a la definida a Nelson [1967] en forma independentment de la $*$ de Hodge, és

$$\delta = - \delta_{(usual)}$$

La justificació de la nostra elecció de signe, a part que resulta més satisfactori poder escriure l'operador diferencial de Clifford en la forma $D = d + \delta$ que en la forma $D = d - \delta$, podem trobar-la en el següent paràgraf del propi Nelson, mostra d'una fina sensibilitat matemàtica:

" The Laplace operator.- If f is a scalar so is $\nabla^i \nabla_i f$. The operator $\nabla^i \nabla_i$ on scalars is called the <u>Laplace-Beltrami operator</u>, and the same terminology may be used for the operator $\nabla^i \nabla_i$ on arbitrary tensors. Notice that for f a scalar $\nabla^i \nabla_i f = - \delta d f = - (\delta d + d \delta) f$.

It is natural to study the operator $- (d \delta + \delta d)$ on exterior forms, and this was first done by Weitzenböck. Unfortunately the wrong sign convention has been adopted in all recent accounts of harmonic integrals and one refers to $d \delta + \delta d$ as the Laplacean!

The Laplace operator in its various manifestations is the most beautiful and central object in all of mathematics. Probability theory, mathematical physics, Fourier analysis, partial defferential equations, the theory of Lie groups, and differential geometry all revolve around this sun, and its light even penetrates such obscure regions as number theory and algebraic geometry. Only with pain do I adopt the sign convention which is standard in the theory of harmonic forms.

Definition. Let g be a pseudo-Riemannian metric on a totally reflexive Lie module. The Laplace-de Rahm operator Δ on A^* is defined by $\Delta = \delta\, d + d\, \delta$ An exterior form α is harmonic in case $\Delta\alpha = 0$. "

Notem finalment el caràcter molt més satisfactori de (2.9) respecte a (2.10), derivat de la seva formulació independent del grau k de la forma diferencial a la qual s'aplica.

Així doncs, la nostra definició de codiferencial diferirà de la usualment admesa i el laplacià de " Laplace-Beltrami-de Rahm " s'escriurà en la forma :

$$\Delta = (d + \delta)^2 = D^2 \qquad (2.11)$$

Resulta ara del tot evident que la diferencial de Clifford és l'arrel quadrada del laplacià i, per tant, resol d'una manera general el problema que resolgué Dirac amb les seves matrius gamma. El tractament no matricial de l'equació de Dirac ha estat àmpliament desenvolupat per Hestenes [1966,1973, 1975] i Casanova [1976].

2.3. La diferencial de Clifford, el càlcul vectorial clàssic i les equacions de Maxwell

La relació de l'operador D amb l'anàlisi vectorial clàssic s'estableix a partir de les expressions (2.7) i (2.8) especialitzades al cas de coordenades cartesianes als espais euclidià tridimensional i minkowskià quadridimensional. En aquest cas hom obté

$$e_i\,(f) = \partial_{x^i}\,(f) \qquad e_0\,(f) = \partial_{x^0}\,(f) \equiv \dot{f} \qquad \text{amb} \quad x^0 = c\,t$$

$C_{3,0}$

$$D \begin{bmatrix} \alpha \\ a \\ A \\ \pi \end{bmatrix} = (d + \delta) \begin{bmatrix} \alpha \\ a \\ A \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ a \\ A \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \text{div } a \\ \text{grad } \alpha & -\text{ rot } A \\ \text{rot } a & +\text{ grad } \pi \\ \text{div } A & \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$C_{3,1}$ i $C_{1,3}$ amb $g = g_1 = g_2 = g_3 = -\,g_0$

$$D\,X = (\,d + \delta\,)\,X = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\partial_0 \\ g\nabla \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ v_0 \\ v \\ A \\ C \\ S_0 \\ S \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \dot{v}_0 + \text{div } v \\ -\,g\,\dot{\alpha} & -\text{ div } A \\ g\ \text{grad } \alpha & \dot{A} - \text{rot } C \\ -\,g\,\dot{v} - g\ \text{grad } v_0 & \text{rot } S \\ g\ \text{rot } v & \dot{S} + \text{grad } S_0 \\ g\ \text{div } C & \dot{\pi} \\ -\,g\,\dot{C} - g\ \text{rot } A & -\text{ grad } \pi \\ -\,g\,\dot{S}_0 - g\ \text{div } S & \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

L'expressió (2.12) ens mostra de manera evident que és possible, en el marc ofert per l'àlgebra de Clifford sobre l'espai euclidià ordinari, identificar l'operador " nabla" $\nabla = \hat{i}\,\partial_x + \hat{j}\,\partial_y + \hat{k}\,\partial_z$ - introduït per Hamilton, desenvolupat per Tait i consagrat en les formulacions físiques per Gibbs i Heaviside - amb l'operador D, unió de la diferencial exterior d i de la codiferencial δ , la primera formulació de la qual data de 1923. La comparació de (2.12) amb (2.7) ens dóna les expressions explícites dels operadors div, **grad** , **rot** en coordenades ortogonals generalitzades. La fórmula (2.13) ens serveix per a il.lustrar l'adaptació del càlcul vectorial clàssic, essencialment tridimensional, a l'espai de Minkowski. Que aquestes "sorprenents" relacions estaven, d'una manera molt significativa, compreses a les equacions de Maxwell, com veurem a continuació, ens porta a coincidir en part amb Dyson [1972] quan diu:

"But the mathematicians of the nineteenth century failed miserably to grasp the equally great oportunity offered to them in 1865 by Maxwell. If they had taken Maxwell's equations to heart as Euler took Newton's, they would have discovered, among other things, Einstein theory of special relativity , the theory of topological groups and their linear representations, and probably large pieces of the theory of hyperbolic differential equations and functional analysis. A great part of twentieth century physics and mathematics could have been created in the nineteenth century, simply by exploring to the end the mathematical concepts to which Maxwell's equations naturally lead."

En efecte, podem expressar les equacions de Maxwell en el buit, formulades en el sistema de Heaviside-Lorentz,

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}} & (\ \mathbf{j} = \rho \mathbf{u} \quad x^0 = ct \ ) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 & \end{array} \tag{2.14}$$

juntament amb les expressions que donen els camps en funció dels potencials

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = - \dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \phi \tag{2.15}$$

i la condició de " gauge" de Lorentz

$$\dot{\phi} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{2.16}$$

mitjançant una única equació a l'espai de Minkowski :

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \\ \mathbf{A} \\ g\,\mathbf{E} \\ g\,\mathbf{B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} + \operatorname{div} \mathbf{A} \\ - g \operatorname{div} \mathbf{E} \\ g\,\dot{\mathbf{E}} - g \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ - g\,\dot{\mathbf{A}} - g \operatorname{grad} \phi \\ g \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} \\ - \dot{\mathbf{B}} - \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - g\rho \\ - g\,\mathbf{j} \\ g\,\mathbf{E} \\ g\,\mathbf{B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Aplicant de nou l'operador D als dos membres de (2.17) obtenim

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ D^2\phi \\ D^2\mathbf{A} \\ D^2\, g\mathbf{E} \\ D^2\, g\mathbf{B} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -g\,\dot{\rho}\ - g\ \mathrm{div}\ \mathbf{j} \\ -g\ \mathrm{div}\ \mathbf{E} \\ g\,\dot{\mathbf{E}} - g\ \mathbf{rot}\ \mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{j}} + \mathbf{grad}\,\rho \\ -\ \mathbf{rot}\ \mathbf{j} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{B} \\ -\ \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{rot}\ \mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -g\,(\dot{\rho} + \mathrm{div}\ \mathbf{j}) \\ -g\,\rho \\ -g\ \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{j}} + \mathbf{grad}\,\rho \\ -\ \mathbf{rot}\ \mathbf{j} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{B} \\ -\ \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{rot}\ \mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

amb $D^2 = -g\,\partial_0^{\,2} + g\,\nabla^2$ (2.18)

On, a més de les equacions habituals

$$D^2\,\phi = -g\rho \qquad\qquad D^2\,\mathbf{A} = -g\ \mathbf{j} \tag{2.19 a}$$

que expressen els potencials en funció de les distribucions de corrent, hi figuren compreses l'equació de continuïtat

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}\ \mathbf{j} = 0 \tag{2.19 b}$$

i les equacions

$$D^2\,\mathbf{E} = g\,(\,\dot{\mathbf{j}} + \mathbf{grad}\,\rho\,) \qquad\qquad D^2\,\mathbf{B} = -g\ \mathbf{rot}\ \mathbf{j} \tag{2.19 c}$$

que manifesten directament el caràcter ondulatori del camp electromagnètic.

Tot i que les equacions de Maxwell troben llur expressió més coherent a l'espai quadridimensional introduït per Minkowski, notem que des de la perspectiva d'un temps "escalar", propi de la mecànica newtoniana, les equacions de Maxwell (2.15) poden formular-se a l'espai euclidià 3-dimensional amb la introducció de l'operador escalar $\partial_0 = \partial_{ct}$. En efecte, a partir de (2.12) obtenim :

$$
(\partial_0 + D)\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} E \\ \dot{E} - \operatorname{rot} B \\ \dot{B} + \operatorname{rot} E \\ \operatorname{div} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ -j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = (-\partial_0 + D)\begin{pmatrix} -\phi \\ A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} + \operatorname{div} A \\ -\dot{A} - \operatorname{grad} \phi \\ \operatorname{rot} A \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}
$$

A partir de les equacions (2.20) , (2.21) i de la relació entre operadors escalars

$$
(\partial_0 + D)(-\partial_0 + D) = -\partial_0^2 + D^2 = D^2 \quad (\text{Minkowski } 3,1)
$$

pot observar-se " l'equivalència" entre el formalisme 3-dimensional basat en la parella d'operadors ($\partial_0 + D$, $-\partial_0 + D$) i el formalisme 4-dimensional. La possibilitat d'incorporar les lleis de transformació de les quantitats electromagnètiques corresponents a una transformació de Lorentz en aquest formalisme 3-dimensional ja ha estat prèviament analitzada a l'article precedent (vegeu també Parra [1984] per a una discussió que inclou les rotacions de dualitat). Per tant, no es poden qualificar d'essencialment contradictòries una formulació 3-dimensional del tipus (2.20) i la invariància Lorentz de les equacions de Maxwell.

2.4. Diferencial de Clifford d'un producte

Finalment, resulten d'interès evident les fórmules de derivació d'un producte. En el cas cartesià, per a l'àlgebra de Clifford $C_{3,0}$, resulten de comprovació immediata, a partir de les expressions habituals del càlcul vectorial, les fórmules:

$$D\,(\,X\,Y\,) = (\,D\,X\,)\,Y + X^{*}\,(\,D\,Y\,) + 2 \begin{bmatrix} a\cdot\nabla \\ 0 \\ 0 \\ A\cdot\nabla \end{bmatrix} Y \qquad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} a\cdot\nabla \\ 0 \\ 0 \\ A\cdot\nabla \end{bmatrix} (\,Y\,Z\,) = \left(\begin{bmatrix} a\cdot\nabla \\ 0 \\ 0 \\ A\cdot\nabla \end{bmatrix} Y \right) Z + Y \begin{bmatrix} a\cdot\nabla \\ 0 \\ 0 \\ A\cdot\nabla \end{bmatrix} Z \qquad (2.25)$$

A partir d'elles, per inducció, es demostra una " fórmula de Leibnitz" per al producte d'un nombre arbitrari d'elements:

$$\begin{aligned}
D\,(\,X_1\,X_2 \ldots X_n) = {} \\
& D\,(X_1)\,X_2 \ldots X_n + X_1^{*}\,D\,(X_2)\,X_3 \ldots X_n + X_1^{*} \ldots X_{n-1}^{*}\,D\,(X_n) + \\
& + 2\,\{(a_1\cdot\nabla + A_1\cdot\nabla\,\epsilon)\,X_2\}\,X_3 \ldots X_n + \ldots + 2\,X_2 \ldots X_{n-1}(a_1\cdot\nabla + A_1\cdot\nabla\,\epsilon)\,X_n + \\
& + 2\,X_1^{*}\{(a_2\cdot\nabla + A_2\cdot\nabla\,\epsilon)\,X_3\}\,X_4 \ldots X_n + \ldots + 2\,X_1^{*} \ldots X_{n-1}(a_2\cdot\nabla + A_2\cdot\nabla\,\epsilon)\,X_n + \\
& \ldots \\
& + 2\,X_1^{*} \ldots X_{n-2}^{*}(\,a_{n-1}\cdot\nabla + A_{n-1}\cdot\nabla\,\epsilon\,)\,X_n \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Dissortadament, peró, aquesta fòrmula no és generalitzable al cas quadridimensional, ja que si bé poden obtenir-se diverses expressions del tipus (2.23) en cap cas el darrer terme verifica una relació tan simple com la (2.24).

3. LA DIFERENCIACIÓ DE CLIFFORD EN DIMENSIÓ ARBITRARIA. L'OPERADOR DE LAPLACE

Les expressions per als operadors D , d , δ contingudes a les expressions (2.7) i (2.8) resulten molt adequades per al càlcul directe d'expressions concretes . No és així per a l'operador de Laplace D^2. Atesa la gran importància d'aquest operador no pot considerar-se d'interès purament matemàtic la caracterització dels operadors D , δ , d que segueix a continuació, vàlida per a qualsevol dimensió i signatura, i sempre en components físics corresponents a un sistema de coordenades ortogonal.

A causa del caràcter lineal de l'operador D, ens limitarem a considerar l'aplicació de D a un element de l'àlgebra de Clifford de la forma $X_I\, e_I$, és a dir, amb un sol component no nul. Adoptarem a més les següents notacions que resultaran de gran utilitat:

$I = i_1 \dots i_p$ és el multiindex fixat amb una ordenació dels índexs components també fixada, bé per ordenació estricta o bé per criteris geomètrics. En el que segueix el considerarem sovint com un conjunt ordenat . I' serà el complementari amb n-p elements també ordenats.

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i \qquad H_I = \sum_{k=1}^{p} H_{i_k} \qquad H_{I'} = H - H_I \tag{3.1}$$

essent H_i els coeficients que figuren amb aquest nom a l'expressió de la mètrica en coordenades ortogonals (1.1).

Procedint a un càlcul explícit, arribem a les expressions:

$$d\,(\,X_I\, e_I\,) = \sum_{k \notin I} g_k\, e_k\, e_I\, \{\, e_k^{\nabla}(\,X_I\,) + X_I\, e_k^{\nabla}(\,H_I\,)\,\} \tag{3.2}$$

$$\delta\,(\,X_I\, e_I\,) = \sum_{j \in I} g_j\, e_j\, e_I\, \{\, e_j^{\nabla}(\,X_I\,) + X_I\, e_j^{\nabla}(\,H_{I'}\,)\,\} \tag{3.3}$$

Aquestes expressions, que resumeixen i generalitzen a qualsevol dimensió els resultats continguts a les taules (2.7) i (2.8), permeten una avaluació explícita de l'operador de Laplace, aplicat a una forma (o element de l'àlgebra de Clifford) de grau arbitrari.

En efecte,

$$\begin{aligned} d\,\delta\,(\,X_I\, e_I) = \sum_{j \in I}\ \sum_{k \notin \{I-j\}} g_k\, e_k\, g_j\, e_j\, e_I\, \{\, & e_k^{\nabla}[\, e_j^{\nabla}(\,X_I) + X_I\, e_j^{\nabla}(\,H_{I'})\,] + \\ & + [\, e_j^{\nabla}(\,X_I) + X_I\, e_j^{\nabla}(\,H_{I'})\,]\, e_k^{\nabla}(\,H_I - H_j\,)\,\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \delta\, d\,(\,X_I\, e_I) = \sum_{k \notin I}\ \sum_{j \in \{I,k\}} g_j\, e_j\, g_k\, e_k\, e_I\, \{\, & e_j^{\nabla}[\, e_k^{\nabla}(\,X_I) + X_I\, e_k^{\nabla}(\,H_I\,)\,] + \\ & + [\, e_k^{\nabla}(\,X_I) + X_I\, e_k^{\nabla}(\,H_I\,)\,]\, e_j^{\nabla}(\,H - H_I - H_k\,)\,\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

De (3.4) i (3.5) resulta, després de tenir present la relació

$$[e_k , e_j]^{\nabla} X_I = e_j^{\nabla} (H_k) e_k^{\nabla} (X_I) - e_k^{\nabla} (H_j) e_j^{\nabla} (X_I) \qquad (3.6)$$

l'expressió general:

$$\Delta(X_I e_I) = D^2 (X_I e_I) = (d \delta + \delta d) (X_I e_I) =$$

$$= \sum_{j \in I} g_j e_I \{ e_j^{\nabla} e_j^{\nabla} (X_I) + e_j^{\nabla}(X_I) e_j^{\nabla}(H-H_j) + X_I [e_j^{\nabla} e_j^{\nabla}(H-H_I) + e_j^{\nabla}(H-H_I) e_j^{\nabla}(H_I-H_j)]$$

$$+ \sum_{k \notin I} g_k e_I \{ e_k^{\nabla} e_k^{\nabla} (X_I) + e_k^{\nabla}(X_I) e_k^{\nabla}(H-H_k) + X_I [e_k^{\nabla} e_k^{\nabla}(H_I) + e_k^{\nabla}(H_I) e_k^{\nabla}(H-H_I-H_k)]$$

$$+ \sum_{j \in I} \sum_{k \notin I} g_j g_k e_k e_j e_I \{ 2 [e_k^{\nabla}(X_I) e_j^{\nabla}(H_k) - e_j^{\nabla}(X_I) e_k^{\nabla}(H_j)] +$$

$$+ X_I (e_k^{\nabla} e_j^{\nabla}(H-H_I) - e_j^{\nabla} e_k^{\nabla}(H_I) - e_j^{\nabla}(H-H_I) e_k^{\nabla}(H_j) + e_k^{\nabla}(H_I) e_j^{\nabla}(H_k)] \}$$

$$(3.7)$$

Per a un escalar α tenim $I = \emptyset$ i, per tant, obtenim l'expressió habitual:

$$\Delta(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} g_k \{ e_k^{\nabla} e_k^{\nabla} (\alpha) + e_k^{\nabla} (\alpha) e_k^{\nabla} (H - H_k) \}$$

$$(3.8)$$

La introducció de (3.8) a (3.7) permet d'escriure-la en la forma final

$$\Delta(X_I e_I) = e_I \{ \Delta X_I + X_I \sum_{j \in I} [e_j^{\nabla} e_j^{\nabla}(H-H_I) + e_j^{\nabla}(H-H_I) e_j^{\nabla}(H_I-H_j)] +$$

$$+ X_I \sum_{k \notin I} [e_k^{\nabla} e_k^{\nabla}(H_I) + e_k^{\nabla}(H_I) e_k^{\nabla}(H-H_I-H_k)] \} +$$

$$+ \sum_{j \in I} \sum_{k \notin I} g_j g_k e_k e_j e_I \{ 2 [e_k^{\nabla}(X_I) e_j^{\nabla}(H_k) - e_j^{\nabla}(X_I) e_k^{\nabla}(H_j)] +$$

$$+ X_I (e_k^{\nabla} e_j^{\nabla}(H-H_I) - e_j^{\nabla} e_k^{\nabla}(H_I) - e_j^{\nabla}(H-H_I) e_k^{\nabla}(H_j) + e_k^{\nabla}(H_I) e_j^{\nabla}(H_k)] \}$$

$$(3.9)$$

En el cas de vectors, el multiíndex I consta d'un sol terme $I = j$ i s'obté l'expressió simplificada:

$$\Delta(v_j e_j) = e_j \{ \Delta v_j + v_j e_j^{\nabla} e_j^{\nabla}(H-H_j)$$

$$+ v_j \sum_{k \neq j} [e_k^{\nabla} e_k^{\nabla}(H_j) + e_k^{\nabla}(H_j) e_k^{\nabla}(H - H_j - H_k)] \} +$$

$$\sum_{k \neq j} g_k e_k \{ 2 [e_k^{\nabla}(v_j) e_j^{\nabla}(H_k) - e_j^{\nabla}(v_j) e_k^{\nabla}(H_j)] +$$

$$+ v_j [e_k^{\nabla} e_j^{\nabla}(H-H_j) - e_j^{\nabla} e_k^{\nabla}(H_j) - e_k^{\nabla}(H_j) e_j^{\nabla}(H - H_j - H_k)] \} \qquad (3.10)$$

Les fórmules (3.8) (3.9) i (3.10) són expressions molt adequades al càlcul terme per terme de la laplaciana en un sistema de coordenades ortogonals, de molt els més freqüents en Física.

Pel que fa als operadors D , d , δ, és possible " capgirar" les expressions (3.2) i (3.3) de tal manera que, en lloc d'expressar les contribucions d'un únic terme $X_I\ e_I$, ens permetin de seleccionar les contribucions de diferents termes a un únic terme del resultat . Introduint els nous conjunts ordenats d' índexs

$$\hat{Ik} = \{ i_1 \ i_2 \ldots \ i_{k-1} \ i_{k+1} \ldots \ i_p \}$$

$$jI = \{ j \ i_1 \ i_2 \ldots \ i_p \}$$

podem escriure fórmules equivalents a (3.2) i (3.3) amb la forma:

$$(d\ X)_I = e_I \{ \sum_{k=1}^{p} g_{i_k} (-1)^{k-1} [e^{\nabla}_{i_k} (X_{\hat{Ik}}) + X_{\hat{Ik}}\ e^{\nabla}_{i_k} (H_{\hat{Ik}})] \} \tag{3.11}$$

$$(\delta\ X)_I = e_I \{ \sum_{j \notin I} e^{\nabla}_j (X_{jI}) + X_{jI}\ e^{\nabla}_j (H - H_{jI}) \} \tag{3.12}$$

En l'aplicació pràctica d'aquestes expressions caldrà tenir present que, mentre I és un multiíndex que especifica un dels components estrictes seleccionats per a representar els elements de l'àlgebra de Clifford , $X_{\hat{Ik}}$ i X_{jI} poden no coincidir amb cap d'aquests components i caldrà relacionar-los amb els corresponents components estrictes, dels quals poden diferir en el signe.

AGRAIMENTS

Aquest treball s'ha realitzat amb el suport de CAICyT, sota contracte nº 0649-84

REFERÈNCIES

Casanova, G. L'algèbre vectorielle. P.U.F. París, 1976.
El álgebra vectorial Ed. Morata. Madrid, 1977.

Choquet, Y., deWitt, C. i Dillard, M. Analysis, Manifolds and Physics. North Holland. Amsterdam, 1977 , 1982.

de Rahm, G. Variétés différentiables. Hermann. París, 1960.

Dyson, F.J. "Missed Oportunities", Bull.A.M.S., **78** , 635 (1972).

Hestenes, D. Space-Time Algebra. Gordon & Breach. Nova York, 1966.
"Local Observables in the Dirac Theory", J.M.P., **14** , 893 (1973).
"Observables, operators and complex numbers in Dirac Theory " J.M.P., **16** , 556 (1975).

Nelson, E. Tensor Analysis. Princeton U.P. New Jersey, 1967.

Parra, J.M. "Lorentz and duality transformations:a unified view from real Clifford Algebra for the Euclidean 3-space". Preprint UBFT-1-84
Contribució a l'estudi de les àlgebres de Clifford. Aplicacions a la Física. Tesi Doctoral. Univ. Barcelona. Febrer, 1985.