Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 12, núm. 1, 1997. Pàg. 73–83.

Geometria projectiva: el problema de la fotografia

Núria Grañó, Albert Llona i Francesc Suau

1 Introducció

Suposeu que teniu una fotografia d'un paisatge urbà en la qual hom pot distingir alguns edificis característics. Imagineu que disposeu també d'un plànol d'aquella localitat i que sabeu situar sobre el plànol l'emplaçament exacte d'uns quants d'aquests edificis (de cinc d'ells, com a mínim). Sabríeu, només amb aquestes dades, situar també sobre el plànol el lloc exacte des d'on s'ha fet la fotografia?

Òbviament això és un problema de geometria. Però, de quina classe de geometria? De geometria mètrica evidentment que no, ja que en una fotografia no es conserven pas ni les distàncies ni els angles. Tampoc pot tractar-se d'un problema de geometria afí, ja que rectes que són paral·leles a la realitat, no ho són gairebé mai a la fotografia. Ara bé, el que sí que, per sort, encara es compleix és que les rectes de la realitat continuen essent rectes a la fotografia. Qui hagi seguit alguna vegada un curs de geometria projectiva, si recorda els trets fonamentals d'aquesta disciplina, ja haurà reconegut immediatament que el problema que hem plantejat és un problema de geometria projectiva.

Voldríem en aquest article introduir els conceptes fonamentals de geometria projectiva plana des del començament (partint de zero), de manera molt directa i explicar després detalladament —utilitzant aquests conceptes— el problema que hem plantejat i que anomenarem des d'ara *problema de la fotografia*. Nosaltres vam conèixer aquest tema en la classe d'una assignatura impartida pel professor Joan Girbau dins del Mestratge per a Ensenyants organitzat per la Universitat Autònoma de Barcelona el curs 1994–1995. Seguirem, doncs, el punt de vista esbossat en aquell curs.

L'article [2], publicat en aquesta mateixa revista, conté un estudi, des d'un punt de vista estadístic, dels errors que es cometen en la determinació del lloc des d'on s'ha fet la fotografia, si s'utilitza per a aquesta determinació el mètode descrit en el present treball. Els dos articles estan, doncs, íntimament relacionats i es complementen mútuament.

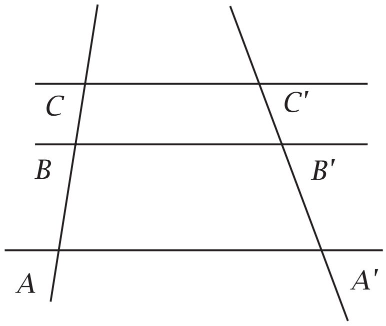

FIGURA 1

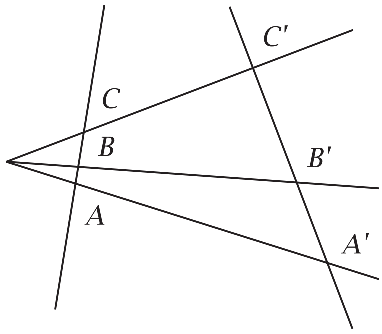

FIGURA 2

2 Raó simple i raó doble

Sigui r una recta qualsevol (del pla o de l'espai) donada paramètricament per l'equació $\vec{x}(\lambda) = \vec{p} + \lambda\vec{v}$. Si A, B i C són punts d'aquesta recta i λ_A, λ_B i λ_C són els paràmetres d'aquests punts, es defineix la raó simple d'A, B i C com el quocient $(\lambda_C - \lambda_A)/(\lambda_C - \lambda_B)$. La raó simple d'$A$, B i C es designa per (A, B, C). Immediatament es veu que la raó simple definida d'aquesta manera no depèn de la particular parametrització de r utilitzada. Només depèn dels punts A, B, C i de l'ordre en què prenem aquests punts.

El teorema de Tales ens assegura que la raó simple és invariant per projecció paral·lela. Concretament, si A, B, C són tres punts sobre una recta r i A', B', C' són tres altres punts sobre una altra recta r', i si les rectes $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ són paral·leles, llavors $(A, B, C) = (A', B', C')$, tal com indica la figura 1. Ara bé, si A, B, C són tres punts sobre una recta r i els projectem des d'un punt exterior P sobre una altra recta r', tal com indica la figura 2, de manera que A', B', C' siguin les interseccions amb r' de les rectes $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ i $\overline{PC}$, en aquest cas $(A, B, C) \neq (A', B', C')$.

Hi ha algun concepte matemàtic invariant per aquest tipus de projecció? Introduirem ara la raó doble de quatre punts alineats i després veurem que justament aquest concepte és invariant per aquest tipus de projecció.

Si A, B, C i D són quatre punts alineats, definim la raó doble d'A, B, C i D com el número

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{(\lambda_C - \lambda_A)(\lambda_D - \lambda_B)}{(\lambda_C - \lambda_B)(\lambda_D - \lambda_A)} ,$$

on λ_A, λ_B, λ_C i λ_D són els paràmetres que corresponen a A, B, C i D en qualsevol parametrització de la recta r.

Si designem per t la raó doble (A, B, C, D), de la definició es desprenen les següents igualtats, que ens diuen com canvia la raó doble quan es canvia l'ordre dels punts:

$$\begin{aligned}
(A, B, C, D) &= (C, D, A, B) = t \\
(B, A, C, D) &= (A, B, D, C) = \frac{1}{t} \\
(A, C, B, D) &= 1 - t.
\end{aligned}$$

1 TEOREMA *Siguin r i r' dues rectes del pla i sigui P un punt exterior a les dues rectes. Siguin A, B, C i D quatre punts sobre r. Siguin a, b, c i d les rectes $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ i $\overline{PD}$*

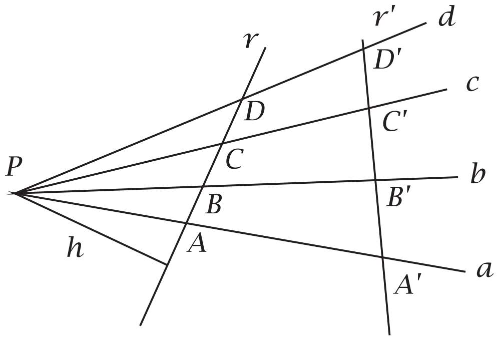

FIGURA 3

respectivament. Siguin A', B', C' i D' els punts de r' obtinguts per intersecció de les rectes a, b, c i d amb r'. Aleshores $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$ (vegeu la figura 3).

Aquest teorema s'enuncia de manera simplificada dient que la raó doble és invariant per perspectivitat.

PROVA: Per definició de raó doble tenim:

$$(A, B, C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

Tracem des de P la recta perpendicular a r i sigui h la distància de P a r. Tindrem:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC \cdot h}{BC \cdot h} = \frac{2 \cdot \text{àrea del triangle } APC}{2 \cdot \text{àrea del triangle } BPC} = \frac{PA \cdot PC \cdot \sin \widehat{ac}}{PB \cdot PC \cdot \sin \widehat{bc}}$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BD \cdot h}{AD \cdot h} = \frac{2 \cdot \text{àrea del triangle } BPD}{2 \cdot \text{àrea del triangle } APD} = \frac{PB \cdot PD \cdot \sin \widehat{bd}}{PA \cdot PD \cdot \sin \widehat{ad}} .$$

Aleshores,

$$(A, B, C, D) = \frac{\sin \widehat{ac} \cdot \sin \widehat{bd}}{\sin \widehat{bc} \cdot \sin \widehat{ad}} .$$

Aquesta expressió posa de manifest que (A, B, C, D) només depèn de les rectes a, b, c i d, i el teorema queda provat. □

Aquest teorema ens permet definir la raó doble de quatre rectes concurrents del pla, a, b, c i d, com la raó doble dels quatre punts obtinguts intersecant a, b, c i d per una recta qualsevol r.

El resultat que demostrarem a continuació ens serà molt útil en la resolució del *problema de la fotografia.*

2 TEOREMA (CAS PARTICULAR DEL TEOREMA DE CHASLES) *Sigui γ una circumferència i A, B, C i D quatre punts de γ. Sigui P un altre punt de γ. Siguin a, b, c i d les rectes $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ i $\overline{PD}$ respectivament. La raó doble d'aquestes rectes, (a, b, c, d), no depèn del punt P escollit sobre la circumferència. Només depèn dels punts A, B, C i D.*

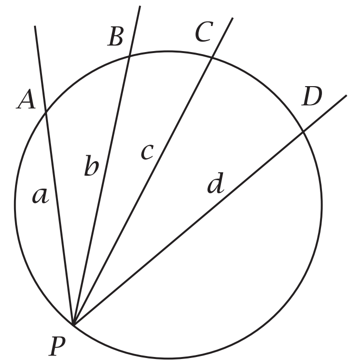

Figura 4

PROVA: En la demostració del teorema 1 hem vist que

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin\widehat{ac} \cdot \sin\widehat{bd}}{\sin\widehat{bc} \cdot \sin\widehat{ad}}\,.$$

Ara bé, l'angle $\widehat{ac}$, per ser un angle inscrit a la circumferència (vegeu la figura 4), val la meitat de l'arc que abraça. És a dir, $\widehat{ac} = (1/2)\ \widehat{AC}$. Passa el mateix amb els altres angles de la fórmula anterior. Tenim, doncs,

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin\frac{\widehat{AC}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{BD}}{2}}{\sin\frac{\widehat{BC}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{AD}}{2}}\,.$$

Observant aquesta fórmula veiem que en el segon membre només hi figuren els arcs AC, BD, BC i AD sobre la circumferència. Per tant, no depèn del punt P. □

3 El pla i l'espai projectius

Fins ara quan parlàvem del pla ens referíem a $\mathbb{R}^2$ i quan parlàvem de l'espai ens referíem a $\mathbb{R}^3$. A partir d'ara $\mathbb{R}^2$ serà anomenat pla ordinari i $\mathbb{R}^3$ espai ordinari. Dos vectors no nuls de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) direm que són equivalents si un és múltiple escalar de l'altre. Una direcció de $\mathbb{R}^n$ és una classe d'equivalència per la relació anterior. Definim l'espai projectiu de dimensió n (nosaltres utilitzarem només els casos en què $n = 2$ o $n = 3$) com el conjunt reunió de l'espai ordinari de dimensió n amb el conjunt de totes les direccions d'aquest espai. L'espai projectiu de dimensió n serà designat per $\mathbb{P}_n$. Els seus elements seran anomenats punts. Un punt de $\mathbb{P}_n$ que sigui de l'espai ordinari $\mathbb{R}^n$ serà anomenat punt ordinari i un punt de $\mathbb{P}_n$ que sigui una direcció serà anomenat punt de l'infinit.

Situem-nos de moment a $\mathbb{P}_2$. Els punts de l'infinit de $\mathbb{P}_2$ direm que constitueixen la recta de l'infinit. D'altra banda, si r és una recta qualsevol de $\mathbb{R}^2$, el conjunt de $\mathbb{P}_2$ format per tots els punts de la recta anterior i pel punt de l'infinit donat per la direcció determinada per un vector director de r serà anomenat recta de $\mathbb{P}_2$

determinada per la recta r de $\mathbb{R}^2$. Per exemple, la recta r de $\mathbb{R}^2$ d'equació cartesiana $3x + y = 5$ determinarà una recta de $\mathbb{P}_2$ formada per tots els punts de $\mathbb{R}^2$ de la recta anterior i pel punt de l'infinit corresponent a la direcció del vector $(1, -3)$. Les rectes de $\mathbb{P}_2$ són de dos tipus. D'una banda hi ha la recta de l'infinit i, de l'altra, les rectes determinades per rectes de $\mathbb{R}^2$ pel procediment anterior.

A l'espai projectiu $\mathbb{P}_3$ direm que els punts de l'infinit d'aquest espai constitueixen el pla de l'infinit. Les direccions (o punts de l'infinit) corresponents a vectors d'un subespai vectorial de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$ direm que constitueixen una recta de l'infinit de $\mathbb{P}_3$. Donada una recta r de $\mathbb{R}^3$, el conjunt de punts de $\mathbb{P}_3$ format per tots els punts de r i pel punt de l'infinit corresponent a la direcció d'un vector director de r, serà anomenat recta de $\mathbb{P}_3$ determinada per r. Anàlogament, donat un pla p de $\mathbb{R}^3$, el conjunt de punts de $\mathbb{P}_3$ format per tots els punts de p i tots els punts de l'infinit corresponents a vectors continguts a p serà anomenat pla de $\mathbb{P}_2$ determinat per p.

En el pla ordinari dos punts determinen sempre una recta, però, en canvi, no és veritat que dues rectes determinin sempre un punt, ja que dues rectes paral·leles no es tallen i, per tant, no determinen cap punt. En el pla projectiu aquest fenòmen no passa. Dos punts determinen sempre una recta i dues rectes determinen sempre un punt. Si un enunciat qualsevol relatiu a propietats d'incidència de rectes i punts és cert, també és cert l'enunciat que s'obté substituint en el primer la paraula *recta* per *punt* i la paraula *punt* per *recta*. Aquesta propietat es coneix per principi de dualitat.

4 Perspectivitats i projectivitats

Siguin π i π' dos plans de l'espai projectiu i sigui P un punt que no pertany a cap d'aquests dos plans. Definim la perspectivitat des de P entre π i π' com l'aplicació que a cada punt X de π fa correspondre el punt X' de π', obtingut per intersecció de la recta $\overline{PX}$ amb π'. Observeu que $\overline{PX}$ sempre talla π' ja que estem a l'espai projectiu (si estiguéssim a $\mathbb{R}^3$ podria passar que la recta $\overline{PX}$ fos paral·lela al pla π'). El punt P des del qual es fa la perspectivitat s'anomena punt de vista de la perspectivitat.

Una composició de diverses perspectivitats (possiblement amb punts de vista diferents) s'anomena projectivitat. Si π és un pla de l'espai projectiu, s'anomena projectivitat del pla π tota projectivitat que apliqui π en π. La geometria projectiva plana estudia les propietats d'un pla projectiu que són invariants per projectivitats. Per exemple, el concepte de rectes paral·leles (dues rectes d'un pla projectiu són paral·leles si es tallen en un punt de l'infinit) no és un concepte de geometria projectiva ja que les perspectivitats, en general, no conserven el paral·lelisme. Amb relació a les perspectivitats i els punts de l'infinit convé tenir present el teorema següent.

3 Teorema *Donat un pla π de $\mathbb{P}_3$, que no sigui el pla de l'infinit, i donada una recta r de π, que no sigui la recta de l'infinit de π, existeix sempre una perspectivitat entre π i un cert pla π' que transforma la recta r de π en la recta de l'infinit de π'.*

Prova: Sigui α un pla diferent de π que passa per r. Sigui π' un pla diferent de α i paral·lel a α. Sigui P un punt de α no contingut a la recta r (vegeu la figura 5). Per construcció, la perspectivitat entre π i π' que té P per punt de vista transforma r en la recta de l'infinit de π'. □

Com a corol·lari d'aquest resultat, qualsevol recta de $\mathbb{P}_2$ es pot transformar per una projectivitat en la recta de l'infinit, i recíprocament. Basta imaginar $\mathbb{P}_2$ submergit

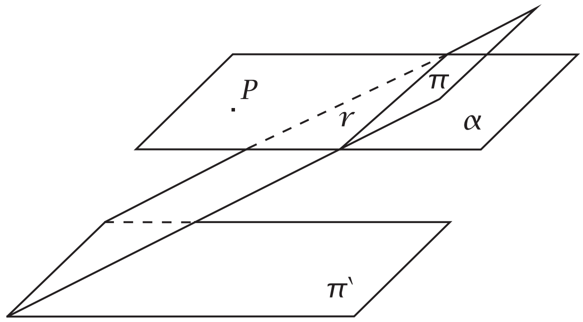

FIGURA 5

a $\mathbb{P}_3$ com un pla π de $\mathbb{P}_3$ i aplicar-li el teorema anterior.

5 Raó doble de quatre punts alineats del pla projectiu

A la secció 2 d'aquest article hem definit la raó doble de quatre punts alineats de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$. Voldríem ara definir la raó doble de quatre punts alineats de $\mathbb{P}_2$ o de $\mathbb{P}_3$. Siguin, doncs, A, B, C i D quatre punts alineats de $\mathbb{P}_2$ (el cas de $\mathbb{P}_3$ seria completament anàleg). Si cap d'ells és de l'infinit (o sigui, si tots quatre són de $\mathbb{R}^2$), la seva raó doble (A, B, C, D) ja s'ha definit a la secció 1.

A continuació definirem la raó doble (A, B, C, D) quan un d'aquests punts és un punt de l'infinit. Suposem, per exemple, que D és un punt de l'infinit i A, B i C són punts del pla ordinari $\mathbb{R}^2$. Com que A, B, C i D estan alineats, D ha de ser el punt de l'infinit de la recta r de $\mathbb{R}^2$ en la qual hi ha A, B i C. Si $\vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{v}$ és una parametrització d'aquesta recta, siguin λ_A, λ_B i λ_C els paràmetres d'A, B i C. Sigui D_λ el punt genèric de paràmetre λ d'aquesta recta. Tindrem

$$\lim_{\lambda\to\infty}(A, B, C, D_\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{(\lambda_C - \lambda_A)(\lambda - \lambda_B)}{(\lambda_C - \lambda_B)(\lambda - \lambda_A)} = \frac{\lambda_C - \lambda_A}{\lambda_C - \lambda_B}\,.$$

Prenem, doncs, com a definició de (A, B, C, D), en aquest cas, el quocient

$$\frac{(\lambda_C - \lambda_A)}{(\lambda_C - \lambda_B)}.$$

Quan dos o més dels punts A, B, C, D són de l'infinit, com que per hipòtesi estan alineats, tots quatre estaran sobre la recta de l'infinit. Considerem llavors les quatre rectes r_A, r_B, r_C i r_D del pla ordinari que passen per l'origen (podríem prendre qualsevol altre punt) i tenen les direccions d'A, B, C i D respectivament. Definim llavors la raó doble (A, B, C, D) com la raó doble de les quatre rectes r_A, r_B, r_C i r_D de $\mathbb{R}^2$ (a la secció 1 ja hem definit aquest últim concepte).

Amb aquestes definicions i tot el que hem dit a la secció 1 es pot veure que la raó doble de quatre punts alineats situats en un pla π de $\mathbb{P}_3$ és invariant per qualsevol projectivitat entre π i un altre pla π'. En particular, si pensem $\mathbb{P}_2$ submergit a $\mathbb{P}_3$ com un pla π d'aquest espai, la raó doble de quatre punts alineats de $\mathbb{P}_2$ és invariant per projectivitats de $\mathbb{P}_2$. Això permet definir la raó doble de quatre rectes a, b, c i

d de $\mathbb{P}_2$ concurrents en un punt P, com la raó doble dels quatre punts A, B, C i D, que s'obtenen tallant les quatre rectes anteriors per qualsevol recta r que no passi per P. Aquesta raó doble no depèn de la recta r escollida. En efecte, si n'escollim una altra, r', i designem per A', B', C' i D' les interseccions amb r' d'a, b, c i d, es passa dels punts A', B', C' i D' als punts A, B, C i D per la perspectivitat de punt de vista P. Per tant, la raó doble és la mateixa.

6 Còniques projectives

Considerem la circumferència unitat del pla de $\mathbb{R}^3$ d'equació $z = 1$, és a dir, la corba

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \,. \end{cases}$$

Unim cada punt P d'aquesta corba amb l'origen O. D'aquesta manera obtenim un con (d'equació $x^2 + y^2 = z^2$) format per totes les rectes $\overline{PO}$, quan P varia en la circumferència anterior. Aquestes rectes s'anomenen generatrius del con. Designem per C aquest con de $\mathbb{R}^3$. La corba intersecció d'aquest con amb un pla π de $\mathbb{R}^3$ que no passi per l'origen és, per definició, una cònica del pla π. Si pensem el pla ordinari $\mathbb{R}^2$ submergit a $\mathbb{R}^3$ com un pla π d'aquest espai que no passa per l'origen, en anar canviant la manera d'estar submergit (és a dir, en anar canviant el pla π de $\mathbb{R}^3$ que no passi per l'origen), s'obtenen totes les còniques de $\mathbb{R}^2$.

El mateix podem fer a l'espai projectiu $\mathbb{P}_3$. Sigui $\widetilde{C}$ el subconjunt de $\mathbb{P}_3$ format per tots els punts de $C \subset \mathbb{R}^3$ i pels punts de l'infinit de totes les generatrius de C. Si ara π és un pla de $\mathbb{P}_3$ que no passa per l'origen O de $\mathbb{R}^3$, el conjunt intersecció de π amb $\widetilde{C}$ s'anomena cònica projectiva del pla π. Si pensem, doncs, $\mathbb{P}_2$ submergit a $\mathbb{P}_3$ com un pla π d'aquest espai que no passa per O, en anar canviant la manera d'estar submergit s'aniran obtenint totes les còniques projectives de $\mathbb{P}_2$. Ara bé, si γ és la intersecció d'un pla π de $\mathbb{P}_3$ amb el con $\widetilde{C}$, i si γ' és la intersecció d'un altre pla π' amb $\widetilde{C}$, està clar que la perspectivitat des de l'origen O aplica cada punt de γ en un punt de γ'. Per tant, entre dues còniques projectives de $\mathbb{P}_2$ sempre hi ha una projectivitat que transforma l'una en l'altra. Això s'acostuma a enunciar dient que totes les còniques són equivalents des del punt de vista projectiu.

7 Algunes propietats projectives de les còniques

En el *problema de la fotografia* utilitzarem el resultat següent, que és una propietat projectiva notable de les còniques.

4 TEOREMA (TEOREMA DE CHASLES) *Sigui γ una cònica del pla projectiu $\mathbb{P}_2$. Siguin A, B, C, i D quatre punts fixos de γ. Sigui X un altre punt de γ, que considerarem variable. La raó doble de les quatre rectes $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ i $\overline{DX}$ no depèn del punt X, és a dir, es manté constant quan X varia sobre la cònica. Dit d'una altra manera, quan X varia sobre la cònica es compleix que $(\overline{AX}, \overline{BX}, \overline{CX}, \overline{DX}) = K$, on K és una constant. Recíprocament, donats quatre punts diferents A, B, C i D de $\mathbb{P}_2$, i un número real K, el lloc geomètric dels punts X del pla projectiu que compleixen $(\overline{AX}, \overline{BX}, \overline{CX}, \overline{DX}) = K$ és una cònica a la qual pertanyen els punts A, B, C i D.*

PROVA: La primera part (directa) del teorema és conseqüència immediata dels fets següents:

1. El resultat és cert quan la cònica és una circumferència de $\mathbb{R}^2$ (teorema 2).
2. La raó doble de quatre rectes és invariant per projectivitats.
3. Totes les còniques són equivalents des del punt de vista projectiu. En particular, existeix una projectivitat que transforma la circumferència unitat de $\mathbb{R}^2$ en la cònica γ.

Demostrem, doncs, la segona part (recíproca) del teorema. Considerem les quatre rectes $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ i $\overline{DX}$, que són rectes concurrents (totes passen per X). Suposem, sense pèrdua de generalitat, que el punt X és de $\mathbb{R}^2$. Ara calcularem explícitament la raó doble d'aquestes quatre rectes de la manera següent. Suposem que cap de les quatre rectes és vertical (paral·lela a l'eix de les y). Si no, raonaríem de la mateixa manera fent un canvi d'eixos. Intersequem les quatre rectes per una recta vertical qualsevol (de la forma $x = k$, on k és una constant) que no passi pel punt X. Siguin A', B', C', D' les interseccions de les rectes $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ i $\overline{DX}$ amb la recta $x = k$. Sabem que la raó doble de les quatre rectes és igual a la raó doble dels punts A', B', C' i D'. Aquests quatre punts són de la forma següent: $A' = (k, y_a)$, $B' = (k, y_b)$, $C' = (k, y_c)$, $D' = (k, y_d)$. Designem per (x, y) les coordenades de X. Tindrem:

$$(A', B', C', D') = \frac{(y_c - y_a)(y_d - y_b)}{(y_c - y_b)(y_d - y_a)} =$$

$$\frac{[(y_c - y) - (y_a - y)][(y_d - y) - (y_b - y)]}{[(y_c - y) - (y_b - y)][(y_d - y) - (y_a - y)]} .$$

Dividint cada un dels factors entre claudàtors [ ] de l'expressió anterior per $k - x$ s'obté

$$(\overline{AX}, \overline{BX}, \overline{CX}, \overline{DX}) = (A', B', C', D') = \frac{(m_c - m_a)(m_d - m_b)}{(m_c - m_b)(m_d - m_a)} ,$$

on m_a, m_b, m_c i m_d indiquen, respectivament, els pendents de les quatre rectes $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ i $\overline{DX}$. Oblidem-nos dels punts A', B', C' i D', que ja no tornarem a utilitzar, i designem a partir d'ara per (x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c) i (x_d, y_d) les coordenades dels punts inicials A, B, C i D. Substituint en la fórmula anterior els pendents per les seves expressions en funció d'aquests punts, per exemple, m_a per $(y_a - y)/(x_a - x)$, obtindrem:

$$(\overline{AX}, \overline{BX}, \overline{CX}, \overline{DX}) = \frac{[x_a y_c - x_c y_a + (y_a - y_c)x + (x_c - x_a)y]}{[x_b y_c - x_c y_b + (y_b - y_c)x + (x_c - x_b)y]} \cdot \frac{[x_b y_d - x_d y_b + (y_b - y_d)x + (x_d - x_b)y]}{[x_a y_d - x_d y_a + (y_a - y_d)x + (x_d - x_a)y]} .$$

Si igualem el quocient anterior a una constant K, obtenim una equació de segon grau en les coordenades (x, y) del punt variable X. Per tant, obtenim una cònica. □

8 El problema de la fotografia

Suposem que tenim una fotografia d'un paisatge urbà en la qual es poden distingir alguns edificis característics (vegeu algun exemple d'aquest tipus de fotografies en l'article [2]). Suposem que a la fotografia identifiquem com a mínim cinc edificis que

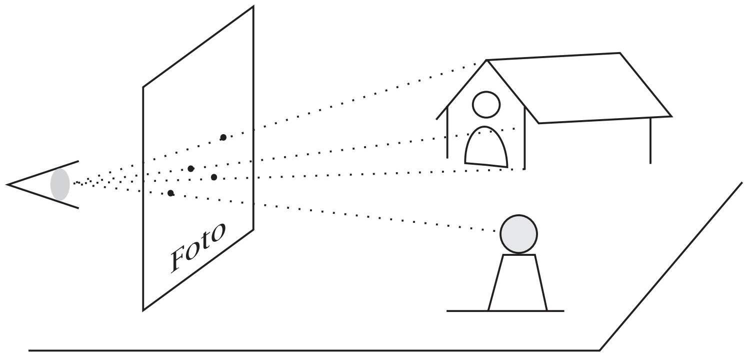

FIGURA 6

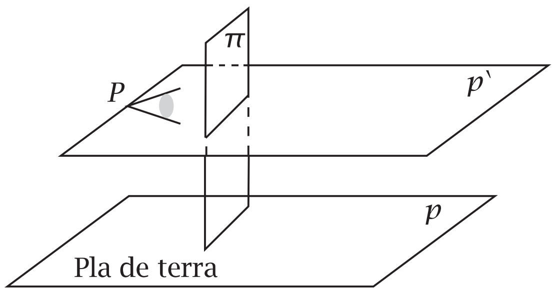

FIGURA 7

sabem situar sobre un plànol de la ciutat. Volem situar, també, sobre el plànol, el lloc des d'on s'ha fet la fotografia.

Per tal de no complicar innecessàriament el problema, comencem suposant que el pla de la fotografia és vertical. Més endavant ja ens ocuparem del cas en què aquesta hipòtesi no es compleix. El procediment de fer una fotografia es pot esquematitzar de la manera següent. Considerem un paper vertical situat davant del nostre ull. Considerem la recta que uneix el nostre ull amb un punt del paisatge que retratem. La intersecció d'aquesta recta amb el paper vertical donarà la imatge del punt a la fotografia (vegeu la figura 6).

Sigui p el pla de terra de l'observador, és a dir, un pla horitzontal que passa pel punt on l'observador té situats els peus. El plànol de la zona és una reproducció a escala del pla p (un plànol sempre es dibuixa en un pla horitzontal encara que a la ciutat hi hagi pujades i baixades). Sigui π el pla vertical del paper situat davant del nostre ull. Sigui p' el pla horitzontal que passa pel nostre ull (paral·lel al pla p), el qual tallarà el pla π de la fotografia en una recta r. Nosaltres treballarem sobre el pla p' paral·lel al pla p de terra, i és en aquest pla que volem situar el punt de vista P que serà la incògnita del problema (vegeu la figura 7).

Si a la fotografia hem identificat cinc edificis que sabem situar sobre un plànol de la ciutat, siguin A, B, C, D i E les interseccions amb el pla p' de les verticals que passen pel centre d'aquests edificis. Considerem les rectes (en el pla p') que uneixen aquests punts amb el nostre ull P. Les dues raons dobles $(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD})$ i $(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PE})$, que són raons dobles de rectes contingudes en el pla p', poden calcular-se per les interseccions d'aquestes rectes amb la recta r del pla de la fotografia. Si sobre la fotografia tracem rectes verticals que passin pels edificis identificats i designem per A', B', C', D' i E' les interseccions amb r de les rectes verticals anteriors, tindrem que $(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}) = (A', B', C', D')$. I aquesta última raó doble pot ser calculada fent mesuraments sobre la fotografia. Designem per R aquesta raó doble, calculada a partir de la fotografia. Anàlogament $(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PE}) = (A', B', C', E')$. Designem per S aquesta raó doble, calculada també sobre la fotografia. Considerem les dues còniques formades pels punts X del pla p' sobre el qual treballem, que satisfan les condicions següents:

$$\begin{aligned}(\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XD}) &= R\\ (\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XE}) &= S\end{aligned}$$

(són còniques en virtut del teorema de Chasles). En general, dues còniques es tallen en quatre punts. El punt de vista P incògnita del problema compleix, evidentment, (per construcció) les dues equacions de les còniques. També els punts A, B i C són de les dues còniques pel mateix teorema de Chasles. Per tant, P és el punt d'intersecció de les dues còniques que no és ni A ni B ni C. La demostració del teorema 4 (de Chasles) ens dóna un procediment explícit per calcular en coordenades les equacions d'aquestes dues còniques a partir de les coordenades dels punts A, B, C, D i E (coordenades en el pla p' paral·lel al pla p de terra). Per tant, l'única cosa que hem de fer quan coneguem aquestes equacions és calcular, utilitzant qualsevol programa de manipulació matemàtica (el *Mathematica*, per exemple), els punts d'intersecció de les dues còniques.

Per tant, el procediment de resolució del problema es pot esquematitzar així:

1. A la fotografia elegim cinc edificis que sapiguem situar sobre un plànol de la ciutat. Designem per A, B, C, D i E els punts sobre el plànol corresponents al centre d'aquests edificis .
2. A la fotografia tracem rectes verticals a, b, c, d i e que passin pel centre dels cinc edificis elegits. Calculem sobre la fotografia les dues raons dobles següents: $R = (a, b, c, d)$ i $S = (a, b, c, e)$.
3. Utilitzant un sistema de coordenades sobre el plànol de la ciutat, calculem la intersecció de les dues còniques formades pels punts X tals que

$$\begin{aligned}(\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XD}) &= R\\ (\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XE}) &= S\,.\end{aligned}$$

4. El punt d'intersecció d'aquestes dues còniques que no sigui ni A ni B ni C és el punt de vista P solució del problema.

El cas en què el pla π de la fotografia no és vertical és una mica més complicat. L'únic cas que excloem del nostre estudi és el cas en què el pla de la fotografia és horitzontal (fotografia aèria feta cap avall). En qualsevol altre cas, sigui com abans p el pla de terra de l'observador, en el qual hi ha els punts A, B, C, D i E corresponents a la localització dels cinc edificis. Considerem els cinc plans verticals que passen per l'ull de l'observador i per A, B, C D i E respectivament. Aquests plans es tallen en una recta vertical que passa per l'ull de l'obsevador. Siguin ara a, b, c, d i e les rectes intersecció del pla π de la fotografia amb els cinc plans verticals anteriors. Si el pla de la fotografia és vertical, les rectes a, b, c, d i e són paral·leles (cas anterior), però si no, aquestes rectes són concurrents. Es tallen en el punt Q d'intersecció del pla π de la fotografia amb la recta vertical que passa per l'ull de l'observador. És fàcil de veure que per resoldre el problema en el cas general val el procediment descrit anteriorment, però substituint la instrucció 2 d'allà per la següent:

2'. Calculem sobre la fotografia les dues raons dobles següents: $R = (a, b, c, d)$ i $S = (a, b, c, e)$.

(Ara aquestes rectes són concurrents i abans eren paral·leles.) Vegem-ho. En el cas anterior treballàvem en el pla paral·lel al pla de terra que passava pel nostre ull. Aquí treballarem directament en el pla p de terra. Designem ara per P el punt del pla p de terra on l'observador té els peus. La raó doble de les rectes $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ i $\overline{PD}$ (rectes del pla p de terra) coincideix amb la raó doble de les rectes a, b, c i d del pla π de la fotografia, ja que es passa d'unes rectes a les altres per la projecció del pla p sobre el pla π que segueix les verticals. Aquesta observació és suficent per veure la validesa del procediment en aquest cas.

Referències

[1] Eves, H. *A survey of Geometry*. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1972.

[2] González, R.; Homs, J.; Solsona, J. «Estimació de l'error comès en determinar el lloc des d'on s'ha pres una fotografia». *Butll. Soc. Cat. Mat.* 12-1 (1997), p. 51–71.

[3] Semple, J. G.; Kneebone, G. T. *Algebraic Projective Geometry*. Oxford: Clarenton Press, 1963.

[4] Stewart, I. «Armoniosas relaciones (y razones no menos armónicas) entre el mapa y el terrritorio». *Investigación y Ciencia*. (maig de 1990), p. 93–98.

Centre associat UNED
Canceller Dou, 1
25200 Cervera