Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 12, núm. 2, 1997. Pàg. 7–45.

# Nombres, combinatòria i nusos: del discret al continu*

José María Montesinos Amilibia

## 1 Introducció

Aquells que m'han precedit en la tasca d'inaugurar el curs en aquesta Acadèmia de ben segur que han experimentat la incertesa i la perplexitat del científic submergit ena les seves recerques personals, a qui es demana que les expliqui en llenguatge planer: *Quiero hacer una prosa,* deia Berceo, *en roman paladino, con el cual suele el pueblo fablar a su vecino, ca non so tan letrado por fer otro latino, bien valdrá, como creo, un vaso de bon vino.* Aquell bon jan sabia el llatí perfectament, però el vi de La Rioja li agradava més. Li passava com a les modistetes de Sant Sebastià: *Iru damatxo Donostiyako [...] josten ere ba-dakite, baña ardua edaten obeki.*[1]

No estic pas demanant que la tradicional gerra d'aigua amb què els oradors ens aclarim la veu sigui substituïda per algun vi de qualitat; simplement manifesto que és una bona lliçó, que tot científic ha d'aprendre, haver de comunicar la seva ciència de manera que brolli dels seus llavis en un llenguatge planer i comprensible per a tothom. Ep!, i sense fer escarafalls per les dificultats que això comporta, ans aprenent a soterrar-les sota un xic d'humor, com ens ensenya el gran poeta Berceo!

Això és ben difícil, i fins i tot en els congressos especialitzats (més que res en els de caràcter general, com el Congrés Internacional que es realitza —com els Jocs Olímpics— cada quatre anys) podem veure com cal lluitar amb aquesta dificultat. Sovint, un conferenciant que està omplint pissarres i més pissarres amb demostracions, teoremes, idees, dibuixos, etc., diu: «bé, aquí els he enganyat una mica: l'argument és més difícil». I això, davant dels especialistes! El punt està que qualsevol ciència, i especialment la ciència matemàtica, s'ha de tractar amb delicadesa. De vegades, la més petita variació d'un enunciat el fa ser fals. Els contaré una petita anècdota sobre això que, com veurem, acaba tràgicament.

L'anècdota és una mica llarga i caldrà posar-hi paciència. Només prometo que

* Versió catalana del discurs inaugural de l'any acadèmic 1996–1997 a la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

1 «Les tres damiseŀles de Sant Sebastià, de cosir prou que en saben, però el que millor fan és beure vi (Cançó popular donostiarra).»

no començaré amb allò de «devia ser cap a l'any tirurany...», puix que, quan això succeeix, l'orador veu com el públic s'arrepetella a la cadira, amb l'ànim predisposat a la becaina. La meva anècdota comença el 1904 i acaba els anys vuitanta. Tan sols dura, doncs, setanta-sis anys.

Bé, si volem ser exactes, comença una mica abans, a final del segle passat, però l'enunciat de la conjectura de Poincaré (que és el teló de fons de l'anècdota) es va publicar el 1904. Enric Poincaré va ser un savi universal (hom ha dit que fou l'últim savi universal, però això no ho sabem pas: la història demostra que es pot tornar a l'edat de pedra, sobretot en una època en què es comercia amb bombes atòmiques) i aquest savi universal (que posseïa, a més, totes les particularitats del científic mític) tenia el costum, ben curiós, d'escriure els seus treballs de recerca a corre-cuita i no corregir-ne mai les proves d'impremta. A més, en la seva sorprenent manera de concebre la ciència, quan començava a escriure alguna cosa, anava directament al gra, sense adonar-se de l'enorme dificultat que pogués comportar llegir els seus articles: posaré més endavant un exemple d'un diagrama de Heegaard que, després d'anys de recerques sobre aquestes matèries, segueix produint en mi una gran perplexitat.

## 2 La conjectura de Poincaré

Aclarirem, d'entrada, que la conjectura de Poincaré no és cap conjectura de Poincaré: És cert que Poincaré n'és l'autor, però, de cap manera, no és pas una conjectura. És, senzillament, una pregunta i una profecia ensems. No li escau que l'anomenem *conjectura* i proposo que, en aquesta xerrada, l'anomenem, ara i adés, *pregunta de Poincaré*.

Entre nosaltres circulen una munió d'anècdotes sobre la «conjectura de Poincaré», però, com que es basen en coneixements matemàtics molt tècnics, només ens fan riure a nosaltres. Dit entre parèntesis, aquí el mot *nosaltres* fa referència a una certa mena de geòmetres que ara s'anomenen *topòlegs de baixa dimensió*. Sempre estem envoltats de nusos, políedres, espais hiperbòlics i altres coses semblants que podem visualitzar. La nostra manera de demostrar és veure: si no veiem, no creiem. Això fa que tot esdevingui extremadament variat i cromàtic, i altament geomètric. L'inconvenient rau que, si volem convèncer un col·lega d'alguna cosa, ens cal fer moviments de mans tota l'estona. Els nostres detractors, que afortunadament van disminuint a mesura que la nostra ciència va assolint més popularitat, diuen que no sabem fer una altra cosa que moure les mans.

Som-hi, doncs, amb la «pregunta de Poincaré». M'adono ara que no hi ha cap motiu per suposar que vostès saben en què consisteix. Consisteix que alguna cosa no existeix! No és pas un dels nostres acudits: s'ho han pres seriosament centenars de matemàtics, potser milers, des que Poincaré va profetitzar el 1904 que la qüestió «ens duria massa lluny». Més d'una persona de la sala deu estar pensant: «potser que deixi de divagar i ens digui d'un cop què és la conjectura o pregunta de Poincaré.» Els confesso que divago per estalviar-los un ensurt massa sobtat, perquè ara no tinc altre remei que anar al gra i aquest serà de mal pelar! Si la meva intenció fos atordir-los, en tindria prou d'enunciar una cosa incomprensible però gramaticalment correcta: el qui sap de què va em titllaria, amb raó, de pedant, i el qui no ho sap, potser tindria un treball i desitjaria tocar el pirandó d'aquí, com més aviat millor. Vist això, faré servir l'exemple del gos.

Comencem amb un gos bidimensional: un gos de paper molt fi, però viu. Bé, pensant-ho millor, prenguem dos gossos bidimensionals $P_1$ i $P_2$. El primer gos, $P_1$, viu «planament» a la superfície d'una immensa esfera que també és bidimensional: és a dir, que $P_1$, que s'anomenarà Pinxo, creu que viu en un pla infinit. No ho oblidem: l'esfera on viu en Pinxo és enorme respecte de la mida d'en Pinxo. El segon gos, que es dirà Gasut, viu a la superfície d'un immens tortell. De la superfície d'un tortell, per raons arquitectòniques que no conec prou bé, nosaltres en diem tor. En Gasut, doncs, viu sobre un immens tor, també bidimensional, i a ell li sembla també, com a en Pinxo, que viu en un pla infinit.

Tots dos, en Gasut i en Pinxo, estan lligats a sengles estaques bidimensionals (més semblants a un parell de monedes que a cap altra cosa, puix que són planes), mitjançant corretges d'escassa longitud, infinitament extensibles i elàstiques. Però, fixem-nos-hi bé, les corretges són planes (com a cinturons sense tercera dimensió) i *mai* no abandonen la superfície: sempre estan sobre l'esfera d'en Pinxo o sobre el tor d'en Gasut. Així que, per entendre'ns, si en Pinxo està lligat al pol nord de la seva esfera i es passeja fins al pol sud, la seva corretja seguirà un meridià de l'esfera: no sortirà pas fora de l'esfera ni anirà en línia recta de nord a sud per «l'espai exterior o interior»: aquest espai exterior o interior, simplement, no existeix, perquè volem que no existeixi; seria com la quarta dimensió al nostre espai tridimensional: l'experiència demostra que qualsevol gos tridimensional, diguem-ne Lleó, lligat amb una corretja, pot deambular amunt i avall, però *sempre veiem la corretja*.

Si hi hagués una quarta dimensió on estigués submergit el nostre espai tridimensional (com l'esfera d'en Pinxo ho està en un de tridimensional), i permetéssim que la corretja d'en Lleó sortís fora de l'espai, per viatjar per la quarta dimensió, simplement no veuríem la part de la corretja d'en Lleó que és a la quarta dimensió: hauria desaparegut de la nostra vista. Bé, això és, doncs, el que no volem. Volem que en Gasut i en Pinxo tinguin la seva corretja *sobre* del tor i l'esfera, respectivament.

Si en Pinxo es passeja per l'esfera, que podem imaginar com la superfície de la Terra, i torna a l'estaca, la corretja recobrarà la seva longitud inicial: no estarà estirada. Això és cert amb una única excepció: el cas en què en Pinxo vagi per un meridià complet. Aleshores, la corretja d'en Pinxo farà una volta completa a l'esfera passant pel pol sud i tornant a l'estaca situada al pol nord, i la corretja no es contraurà, suposant que la resistència que oposen les potes d'en Pinxo impedeixin que en Pinxo sigui arrossegat cap enrere per la tensió de la corretja. Recordin, però, que som topòlegs! La més petita alteració de la posició de la corretja d'en Pinxo farà que s'alliberi del pol sud i en aquest instant la corretja es contraurà, lliscant, per exemple, per damunt de tot l'oceà Pacífic, per tornar a la seva mida original prop de l'estaca d'en Pinxo.

El que estic dient, òbviament, és una manera de visualitzar idees i conceptes topològics usant gossos, corretges i estaques. Topològicament, de l'estaca se'n diu emphpunt base de l'esfera; d'un camí recorregut per en Pinxo i que acaba al punt base se'n diu *camí* o *llaç*; del lliscament de la corretja per a recobrar la seva longitud inicial se'n diu *homotopia* del llaç; la corretja, amb la seva longitud inicial col·locada a la vora de l'estaca, dibuixa un llaç que s'anomena *llaç trivial* i es representa per 1. És possible de multiplicar el llaç $L_1$ pel llaç $L_2$ de la manera següent: el punt final del llaç $L_1$ es deixa anar de l'estaca i es lliga al punt inicial del llaç $L_2$, que també hem deixat anar de l'estaca. El llaç que en resulta consisteix que en Pinxo recorre $L_1$ i, a continuació, $L_2$; es representa per $L_1 \cdot L_2$. Observin que si considero un llaç qualsevol $L$, sempre hi ha un llaç que consisteix a recórrer $L$ en sentit invers; se'n diu llaç $L^{-1}$; aleshores $L \cdot L^{-1}$ és la corretja que surt de l'estaca, segueix tot el llaç $L$ i després, sense tocar l'estaca, segueix $L$ a l'inrevés: la corretja, òbviament, es contreu fins a convertir-se en el llaç trivial 1. És a dir que $L \cdot L^{-1} = 1$.

Hem arribat al cor de la idea de Poincaré: si en un espai (sigui l'esfera d'en Pinxo, el tor d'en Gasut o l'espai en què vivim) marquem un punt base $E$ (estaca) i prenem tots els camins que comencen i acaben a $E$, i suposem que són iguals dos camins $L_1$ i $L_2$ que difereixen en una homotopia ($L_1$ llisca per sobre d'una certa àrea i es converteix en $L_2$), és possible de definir en aquest espai de camins un producte amb identitat 1 (el camí trivial) tal que tot camí $L$ té invers $L^{-1}$ (és a dir, $L \cdot L^{-1} = 1$) i el producte és associatiu. Aquesta estructura de camins amb producte de camins és el que els matemàtics anomenem *un grup*. Del grup de camins d'un espai se'n diu *grup de Poincaré* o *grup fonamental* de l'espai.

Tornem a l'esfera d'en Pinxo. La seva estaca és $E$. Com que tot camí basat en $E$ és homotòpic al camí trivial, és a dir, es contreu sobre l'esfera fins a reduir-se al llaç inicial, resulta que el grup de Poincaré de l'esfera és el grup que consta d'un únic element: l'element 1, el camí trivial.

Des del punt de vista d'en Pinxo, és francament confortable saber que viu en un espai amb grup de Poincaré trivial, perquè si en Pinxo se'n va a estirar les cames per la seva esfera i torna a l'estaca i es posa a jeure ho farà plàcidament sense que res pertorbi el seu son. No ho tindrà tan fàcil en Gasut. Aquest potser s'haurà passejat fent la volta a l'immens tor on viu i, quan dormi prop de la seva estaca, la corretja no s'haurà contret perquè el camí $L$ que ha seguit la corretja no pot lliscar i tornar a l'estaca *sense sortir fora del tor*. És a dir, que la corretja d'en Gasut, quan s'adormi, tindrà una longitud enorme i estarà tibantíssima. Quan en Gasut iniciï el seu dolç son i les seves potes no puguin compensar la tensió de la seva corretja, veurem con la corretja arrossegarà l'infortunat Gasut. La corretja recobrarà la seva longitud inicial a força de recórrer $L^{-1}$, perquè, com que $L \neq 1$, l'única manera que $L$ es converteixi en 1 és multiplicant-lo per $L^{-1}$. En resum, la vida d'en Gasut serà un purgatori i, si és prou prudent, limitarà les seves passejades a un entorn de l'estaca en què el grup de Poincaré sigui trivial.

Bé, estic ja en condicions de dir-los quina és la conjectura de Poincaré. Abans de res, els comunico que l'esfera i el tor són exemples d'allò que els topòlegs en diem *varietats bidimensionals tancades*: no tenen vora, com tindria, per exemple, l'hemisferi nord de l'esfera terrestre, la vora de la qual és l'equador, i es poden recobrir amb un nombre finit de mapes. És clar que la superfície terrestre es pot descriure amb un atles amb un nombre finit de mapes, i el mateix passa amb el tor. També hi ha varietats tridimensionals tancades. Els fulls de l'atles són cubs, en lloc de pàgines rectangulars, i hi ha un nombre finit de fulls cúbics.

Hi ha una varietat tridimensional, una de les infinites que hi ha, que ens interessa ara a nosaltres: l'esfera tridimensional.

Per tal de visualitzar-la, pensem primer en el seu anàleg bidimensional: la superfície esfèrica $S^2$. Fem-ne una tomografia: tallem $S^2$ per una infinitat de plans paral·lels. Veurem primer un punt aïllat (el pol nord); després veurem petits cercles concèntrics (els paral·lels terrestres) que creixen en diàmetre fins a arribar a un màxim a l'equador; després el procés s'inverteix: els cercles van disminuint en diàmetre fins a reduir-se a un únic punt (el pol sud). Una tomografia de l'esfera tridimensional o 3-esfera $S^3$ comença també amb un punt aïllat (el pol nord); després segueixen petites superfícies esfèriques concèntriques que creixen en diàmetre fins a arribar a un màxim en una superfície esfèrica anomenada *equatorial*; després s'inverteix el procés: les superfícies esfèriques disminueixen en diàmetre fins a convertir-se en un únic punt (el pol sud). Com veuen, la unió del pol nord amb totes les superfícies esfèriques que el tenen per centre, fins a arribar a l'equador, formen una bola tridimensional $B_1$. Igualment, les esferes bidimensionals que envolten el pol sud formen una altra bola tridimensional $B_2$ que té en comú amb $B_1$ la 2-esfera equatorial. La bola $B_1$ és l'hemisferi nord de $S^3$ i la bola $B_2$ és l'hemisferi sud de $S^3$: els dos hemisferis estan enganxats l'un amb l'altre per les seves fronteres comunes: la superfície esfèrica equatorial $S^3$. Ho poden visualitzar d'una altra manera. Imaginin que són davant d'un mirall. Davant d'aquest hi posen una bola 3-dimensional (per exemple, una taronja): aquesta és la bola $B_2$ amb el centre al pol sud. Si acosten la taronja al mirall, la frontera de la taronja (equador bidimensional) sembla que es vulgui identificar amb la seva imatge. De fet, aquesta identificació podria dur-se a terme si la taronja fos tan gran que la seva frontera arribés a ser el pla infinit del mirall. Així, $S^3$ no és una altra cosa que els dos costats del mirall més un punt ideal a l'infinit. És a dir, és l'espai euclidià tancat amb un punt ideal a l'infinit. Succeeix que el grup de Poincaré de l'esfera tridimensional $S^3$ és trivial, com en el cas de $S^2$.

La conjectura de Poincaré és que, llevat de l'esfera tridimensional $S^3$, cap altra varietat tridimensional $M$ té grup de Poincaré trivial. És a dir, que si el grup de Poincaré de $M$ és trivial, aleshores $M$ és $S^3$. Avui en dia, això està encara per veure i així, tal com estan avui les coses, podria existir un contraexemple a la conjectura. Seria una 3-varietat tancada $M$ tal que el seu grup de Poincaré fóra trivial, sense que $M$ fos $S^3$. També podria ser que un contraexemple d'aquesta mena no existís. Simplement, no ho sabem: la conjectura de Poincaré és un problema obert. És el problema obert més important de la topologia.

Un punt curiós d'aquest assumpte és que hom podria conjecturar el mateix en altres dimensions. Per exemple: si $M$ és una 2-varietat tancada amb grup de Poincaré trivial, és $M = S^2$? La resposta és sí. També: si $M$ és una $n$-varietat tancada, $n > 3$, homotòpicament equivalent a la $n$-esfera $S^n$, és $M$ homeomorfa a $S^n$? La resposta és sí. Ens trobem que l'única dimensió en què ignorem la resposta és la dimensió 3, precisament la dimensió sobre la qual Poincaré va formular la seva pregunta.

Em sembla que ja he deixat les coses ben clares: en dimensió 3 no sabem si una varietat tancada pot tenir grup de Poincaré trivial sense ser $S^3$.

## 3 La generalització de Waldhausen de la conjectura de Poincaré

Pensin en una fleca. Sobre la taula de marbre hi ha una massa de farina: una coca. D'això se'n diu, en topologia, *bola.* Facin vint forats a la coca que la travessin de dalt a baix, fins a la taula de marbre. D'això se'n diu, en topologia, *braçalet de gènere* 20. Hem dit abans que $S^3$ s'obté enganxant dues boles $B_1$ i $B_2$ per la seva frontera: es diu que $S^3$ té gènere zero (perquè els braçalets $B_1$ i $B_2$, com que no tenen forats, es diu que tenen gènere zero). Doncs bé, succeeix que tota 3-varietat tancada s'obté enganxant, per la seva frontera, dos braçalets del mateix gènere. Una mateixa 3-varietat admet moltes construccions diferents. Però, donada una 3-varietat tancada $M$, hi haurà una manera d'obtenir-la enganxant dos braçalets de gènere *mínim*; aquest gènere mínim s'anomena *gènere de* $M$ i es representa per $g(M)$. Així, $g(S^3) = 0$. Recíprocament, si $g(M) = 0$, aleshores $M$ és $S^3$ i, d'aquesta manera, podem reformular la pregunta de Poincaré així: si el grup de Poincaré de $M$ és trivial, aleshores $g(M) = 0$.

Ara comença el drama que he anunciat a l'inici de la xerrada i que acaba tràgicament. Tot comença amb una ingènua observació. Sigui $G$ un grup; un conjunt d'elements de $G$ es diu que genera $G$ si, a còpia de multiplicar aquests elements i els seus inversos de totes les maneres possibles, es poden obtenir tots els altres elements de $G$. Naturalment, tot grup $G$ posseeix un sistema de generadors: el conjunt mateix de tots els elements de $G$. Aquesta és una ximpleria molt pròpia dels matemàtics. Ens defensem dient que, almenys, tot grup admet *algun* sistema de generadors. Naturalment, del que es tracta és de considerar el mínim nombre possible d'elements que generen $G$: se'n diu *rang de* $G$ i el denotarem per $\operatorname{rang}(G)$. La ingènua observació a què m'he referit abans és que si $M$ és una 3-varietat tancada, el rang del grup de Poincaré de $M$, que designarem $\operatorname{rang}(M)$, és menor o igual que $g(M)$: el rang de $M$ és menor o igual que el seu gènere. Demostrar això és una obvietat i, tenim, per tant, una ingènua observació. Tornem-ho a recordar: el rang és menor o igual que el gènere. El rang és un concepte algebraic; el gènere és un concepte geomètric: el rang ens diu alguna cosa de caràcter algebraic sobre la 3-varietat $M$, és a dir, diu alguna cosa més dèbil que el gènere; el gènere és geomètric: una afirmació sobre el gènere és més forta que una afirmació sobre el rang. Doncs bé: quan els matemàtics no sabem què fer, tenim costum de generalitzar; l'experiència ens ha demostrat moltes vegades com n'és, d'efectiu, això, sempre que el resultat més general sigui correcte. El que li passa a la pregunta de Poincaré és que és finíssima: l'amarga història de moltes «demostracions» ensenya que si hom generalitza té moltes probabilitats que la generalització sigui falsa. Així, una molt bona mala jugada que podem fer als nostres col·legues consisteix a generalitzar la conjectura de Poincaré i deixar que els altres s'hi estavellin.

Això és precisament el que va fer l'alemany F. Waldhausen. Aquest matemàtic, que es deu acostar als seixanta, és un dels més brillants de la tradició de geòmetres-topòlegs alemanys que conté Dehn, Reidemeister, Kneser i Haken. Doncs bé: Waldhausen va publicar, cap a l'any 1978,[2] la conjectura següent:

$$\operatorname{rang}(M) = g(M).$$

Observin ara que el *rang* és igual al gènere. Això és molt fort: es tracta d'obtenir un resultat geomètric (sobre el gènere) a partir d'un d'algebraic (sobre el rang), per a tota $M$; d'una cosa feble passar-ne a una de forta: molt perillós!

El que és interessant de la conjectura de Waldhausen és que generalitza la conjectura de Poincaré, perquè si el grup de Poincaré de $M$ és trivial, el seu rang és zero i això, segons la conjectura de Waldhausen, ha d'implicar que el gènere de $M$ és zero, el que comporta que $M = S^3$: la conjectura de Poincaré.

En aquest astut parany preparat per Waldhausen hi va ensopegar un cert matemàtic molt bo de la Universitat d'Urbana. En aquesta Universitat hi ha dos matemàtics més coneguts per les seves provatures amb la conjectura de Poincaré. Un és l'alemany Haken, citat abans (que va resoldre el problema dels quatre colors). L'altre és Craggs, que ha investigat durant anys el problema del rang. El matemàtic a qui em refereixo l'anomenarem X, seguint una antiga tradició algebraica. Perquè es facin una idea de com estan les coses, Haken sol dir que ha escrit fins a quaranta «demostracions» de la conjectura de Poincaré. Una vegada, li vaig preguntar la seva opinió sobre la conjectura i em va dir que creu que és falsa i que és per això que ha deixat

2 «Alguns problemes de 3-varietats». *Proc. of Symposia in Pure Math.* 32, p. 313–322.

de treballar-hi.[3] Però tornem a X. X va treballar exclusivament en la conjectura de Waldhausen fins al 1984; X pretenia demostrar que la conjectura de Waldhausen era certa. Suposo que devia escriure, en tot aquest temps, centenars de resultats matemàtics, però no ho sabem pas del cert, perquè no va publicar res.

Bé, per escurçar una mica l'anècdota, diguem que el fet és que un matemàtic francès, M. Boileau, i un altre d'alemany, H. Zieschang, treballant junts, van trobar el 1984 un contraexemple a la conjectura de Waldhausen.

L'exemple va aparèixer publicat en la prestigiosa revista *Inventiones*[4] i, passat un més, X moria de càncer. En una carta de Craggs, escrita dies després de la mort, em deia que l'impacte moral sofert per X va ser tan fort que ell (Craggs) i Haken estaven segurs que el càncer es desenvolupà com a conseqüència del disgust.

El que potser resulta més macabre és que el contraexemple és fàcil: una varietat fibrada de Seifert que té gènere 3 i rang 2. L'exemple és molt bo, perquè s'aprecia bé el motiu de la impossibilitat de realitzar geomètricament una certa manipulació algebraica. És curiosa la manca de ressò que aquest exemple ha tingut entre els geòmetres. Jo opino que un geòmetra que estigui convençut de la falsedat de la conjectura de Poincaré hauria de dedicar els seus millors esforços a examinar aquest exemple. Malament si, entretant, algú prova la conjectura de Poincaré!

## 4 La conjectura de Poincaré i la dimensió 4

Tornem, però, al parany de Waldhausen. Com hem vist, ja ha fet un mort. En la mateixa línia, jo he parat un altre parany.[5] Es tracta d'una generalització de la pregunta de Poincaré que en principi és més fina que la de Waldhausen. Els anticipo que encara no sóc reu d'homicidi. La meva conjectura, que generalitza la de Poincaré, roman oberta. Més que com a conjectura, l'he formulat com a pregunta, ja que sospito que la resposta és també negativa, i sap molt greu llegir que una conjectura pròpia és falsa (ho dic per pròpia experiència).

El que faig és generalitzar aquest cop el concepte de gènere d'una varietat tridimensional tancada $M$. Trec a $M$ una bola tridimensional i obtinc una varietat $M_*$ amb frontera l'esfera que és la vora de la bola treta. Aleshores $M_*$ es pot veure com un braçalet de gènere igual al gènere de $M$, al qual s'enganxen $g$ discs al llarg de les seves fronteres i després s'eixamplen aquests discs perquè el resultat sigui tridimensional. Si formem el producte cartesià de $M_*$ per l'interval tancat $[-1,1]$, obtenim una varietat de dimensió 4 $\tilde{M}$, la vora de la qual és el resultat d'enganxar $M_*$ amb si mateix al llarg de la seva frontera: és a dir, la vora de $\tilde{M}$ és $2M$ (que se'n diu el *doble de* $M$). El fet que $M_*$ sigui representable com un braçalet de gènere $g$ més $g$ discs eixamplats implica que $\tilde{M}$ pot representar-se com un braçalet tetradimensional de gènere $g$ amb $g$ discs eixamplats fins a la dimensió quatre. Del mínim $\tilde{g}$ possible per a aquesta darrera representació de $\tilde{M}$ en dic el *supergènere de* $M$, $sg(M)$. Acabo de demostrar que, per a tota $M$, $sg(M) \leq g(M)$. La meva pregunta és, doncs, aquesta: *és el rang de* $M$ *igual al supergènere de* $M$? Naturalment, podria passar que el gènere de $M$ fos sempre igual al seu supergènere, però això no se sap pas. Si fos així, la meva pregunta coincidiria amb la conjectura de Waldhausen, que

3 Qui no les pot haver diu que són verdes.

4 *Inventiones Math.* 76, p. 455–468.

5 «Nota sobre un resultat de Boileau-Zieschang». *Lect. Notes, London Math. Soc.* 112 (1986), p. 241–252; «La discrepància entre el rang i el gènere de Heegaard d'una 3-varietat». *Note di Matematica.* Suplement al v. 9 (1989), p. 101–117, d'una conferència pronunciada a Lecce el 23 de juny de 1989.

és falsa. En particular, el gènere del contraexemple de Boileau-Zieschang, al qual m'he referit abans, és 3; jo sospito que el supergènere és 3 també, amb la qual cosa la meva pregunta tindria resposta negativa, però això segueix essent un problema obert.

La meva pregunta, si té resposta afirmativa, implica també la pregunta de Poincaré. En efecte, si el rang de $M$ és zero, aleshores el supergènere de $M$ seria zero; $\tilde{M}$ seria un braçalet tetradimensional de gènere zero: una bola de dimensió 4. Aleshores, la vora de $\tilde{M}$ seria la vora d'una bola de dimensió 4, és a dir, l'esfera de dimensió 3. Però, com que la vora de $\tilde{M}$ és el doble de $M$, deduiríem que el doble de $M$ és $S^3$. És a dir, a $S^3$ hi hauria una 2-esfera $S^2$ que, a un costat i l'altre, vorejaria $M_*$. Però, un cert teorema de J. W. Alexander diu que una tal $S^2$ ha de vorejar dues boles de dimensió 3. En conseqüència, $M_*$ és una bola de dimensió 3. I, com que $M$ s'obté de $M_*$ enganxant-li la bola que li vam treure al començament, deduïm que el gènere de $M$ és zero i $M$ és $S^3$: la pregunta de Poincaré.

## 5 Algunes consideracions sobre l'infinit i el finit

Passem ara al rovell de l'ou de la meva conferència. Vull, avui i aquí, il·lustrar la relació entre l'infinit matemàtic i el finit. Per fer-ho, prendré tres exemples senzills, un de teoria de nombres, un altre de topologia combinatòria i el tercer de teoria de nusos, on es veu com aquest infinit matemàtic està sovint recolzat en alguna part de la ciència matemàtica de caràcter finit, com la teoria de nombres, la combinatòria, la teoria de nusos, etc.; sense oblidar que els enunciats matemàtics solen tenir sempre un cert caràcter universal i que, parlant pròpiament, les teories anteriors són també teories de l'infinit, però d'un infinit discret, en contraposició a l'infinit continu, que és el que és difícil de conceptualitzar.

La tensió entre finit i infinit és una constant en la història de les matemàtiques, i és la font d'on han brollat, brollen i brollaran les grans idees que fan de les matemàtiques la reina de les ciències. Com a mostra, pensin un moment en la història del càlcul infinitesimal, avançat per Arquimedes, descobert per Leibnitz i Newton i fonamentat primer per Cauchy i, més recentment, per Robinson.

En un llibre d'aparició recent, escrit en anglès per Donald Spencer i titulat *Dates clau en la història dels nombres*, hi ha algunes efemèrides curioses que no avalen pas la qualitat del llibre, però que ens poden servir a nosaltres per anar fent cap al nostre assumpte. Anem a l'any 1710 i llegim que un cert esclau de Virgínia, anomenat Tomàs Fuller, podia multiplicar nombres de quatre i cinc dígits mentalment i calcular, també mentalment, el nombre de segons d'un període de temps donat. La veritat és que no sé pas per què Spencer inclou aquesta dada històrica estranya i insòlita com a «data clau en la història dels nombres», llevat que es refereixi als números de circ.[6] Deixant de banda, però, els gustos de Spencer, ens sorprèn que un esclau, que podem suposar ignorant, tingui un poder mental tan fort. Podríem preguntar-nos si la característica més genuïna d'un matemàtic consisteix en la possessió d'una potència de càlcul d'aquesta mena. Dintre del mateix ordre de coses, vegem una altra efemèride, aquesta de l'any 1751. Sembla que aquest any un cert Jedediah Buxton va calcular mentalment el nombre de polzades cúbiques d'un bloc de pedra de 23 145 789 iardes de llargada, 5 642 732 d'amplada i 54 965 d'alçada. Reconeixeran vostès que ara la cosa és encara més curiosa: el bloc era de pedra!, tan

6 Joc de paraules intraduïble, que el lector pot fàcilment endevinar (N. del t.).

inexistent, és clar, com si fos de pega dolça, però ens quedem amb el dubte de si en Jedediah hauria pogut fer el càlcul si el bloc hagués estat de fusta i d'unes mides més modestes que les d'una pedra de 50 quilòmetres d'alçada. La veritat és que, llegint aquesta efemèride, no sé què m'estranya més, les peculiars mides del bloc o la seva naturalesa. Sembla que en enfrontem aquí més a un problema de psiquiatria o psicologia que a una «data clau de la teoria de nombres». Potser aquella ciència que s'anomena *moderna* ens podrà explicar l'origen d'aquestes fetes tan sorprenents.

En un altre ordre de coses, una mica més serioses, hi ha el càlcul realitzat per Lleonard Euler el 1732. Aquest era, també, un gran calculista, però, sobretot, era un gran matemàtic i, de tota manera, es va entossudir a veure si el cinquè nombre de Fermat $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ era primer o no. Aquest cop no sabem, ni se'ns diu, quant de temps hi va dedicar, però hom pot sospitar que va ser molt. Doncs bé, Euler va comprovar que aquest nombre tan gran és compost; concretament, és el producte de 641 i 6 700 417.

Per què un esforç tan considerable i aparentment tan inútil? Certament, va ser per imperatiu de la recerca matemàtica, que moltes vegades és tan experimental com puguin ser-ho la física o la química. En la recerca matemàtica, com en l'astronomia, ens cal l'observació. Al cap i a la fi, els grans ordinadors moderns són per a nosaltres, els matemàtics, com a potents telescopis. De què no haurien estat capaços Euler o Gauss, per exemple, amb l'assistència d'aquestes màquines? La resposta és més enllà de tota ponderació.

Un altre exemple similar que revela, a més de capacitat de càlcul, una gran paciència, és el que ens ofereix Antoni Fenkel: el 1776 tenia calculats tots els factors primers de tots els nombres fins al 2 000 000. Quina motivació empenyia aquests homes? Només puc imaginar la curiositat o l'observació; la mateixa que ha empès moltes persones a calcular milers de decimals de $\pi$, com en el cas dels germans David i Gregori Chudnovsky, russos, que el 1989 tenien calculades 1 011 196 691 xifres decimals.

El coneixement de $\pi$ amb aproximació de diversos decimals és un problema històric d'enorme importància perquè, mitjançant aquest coneixement, poden construir-se taules trigonomètriques molt interessants per a la navegació i l'astronomia (generació de calendaris). Però el càlcul de tants milions de decimals no s'explica pas per la seva utilitat pràctica. Des d'aquest punt de vista, n'hi ha prou amb cinc decimals per a gairebé tots els problemes que trobem en les aplicacions.

Com diu H. Tietze en el seu llibre *Problemes famosos de les matemàtiques*: «Amb quatre decimals n'hi ha prou per a determinar la circumferència d'un cercle amb error inferior a un mil·límetre, si el radi és de 30 metres o menys. Si el radi és tan gran com el de la Terra, n'hi ha prou amb deu decimals. Si el cercle té un radi tan gran com la distància de la Terra al Sol, n'hi ha prou amb cinquanta decimals per a determinar la circumferència amb error menor d'un mil·límetre. Si volem imaginar la increïble exactitud que s'obté amb cent decimals de $\pi$, considerem el problema següent: Prenem una esfera amb el centre a la nostra Terra, que s'estengui fins a Sírius. Com que la velocitat de la llum és de 300 000 quilòmetres per segon, trigaríem vuit anys i nou mesos a atènyer la superfície de l'esfera. Omplim aquesta esfera de microbis, de tal manera que cada mil·límetre cúbic contingui un bilió de microbis. Ara, si tots aquests microbis els disposéssim en línia recta, de manera que la distància d'un al següent fos igual a la distància entre la Terra i Sírius, i prenguéssim la circumferència de radi igual a la distància del primer al darrer, aleshores l'error que cometríem en calcular la longitud d'aquesta circumferència utilitzant cent decimals de $\pi$ seria menor que un dècim de la milionèsima part d'un mil·límetre.»

És a dir, els motius pràctics expliquen els càlculs d'Arquimedes (240 aC), que coneixia dos decimals de $\pi$ o també, per posar un exemple exòtic, els de Takakazu Seki, nascut el 1642 a Tokyo (que aleshores es deia Edo), que va obtenir el valor 3,14159265358 a força d'inscriure a la circumferència un polígon de $2^{17} = 131\,072$ costats. Si hagués tingut més paciència, el seu mètode li hauria proporcionat fins a setze decimals exactes; però això ho sabem avui: Seki no sabia quants decimals eren exactes. El deixeble de Seki, Katahiro Takebe (1664–1739), va obtenir l'aproximació 5419351/1725033=3,141592653589..., mitjançant la utilització de fraccions contínues.

## 6 Del finit a l'infinit a teoria de nombres

Els càlculs dels germans Chudnovsky no s'expliquen pas per raons pràctiques. Nogensmenys, el seu treball no és banal. Es tracta aquí del nombre $\pi$: un dels nombres més importants de les matemàtiques, i el que es busca, entre altres coses, és si hi ha alguna regularitat en l'aparició de decimals. Essent $\pi$ un nombre irracional, el seu desenvolupament decimal no és periòdic i no sembla possible que es pugui conèixer la xifra que ocuparà un lloc prèviament escollit del desenvolupament, sense conèixer les xifres anteriors. Respecte a això, Lluís Santaló, en el seu interessant llibre *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*, ens diu:

> si suposem que les lletres de l'alfabet majúscules i minúscules més els signes de puntuació constitueixen un total de 100 caràcters d'impremta diferents i adoptem un sistema de numeració de base 100 de manera que les seves 100 xifres representin els caràcters d'impremta esmentats, podem dir, seguint Borel, que un nombre irracional com $\pi$ o el logaritme de 3 estarà escrit en aquest sistema de numeració segons una sèrie il·limitada de pàgines en les que els caràcters se succeiran segons una llei aritmètica que desconeixem, però que està rigorosament determinada per la definició mateixa del nombre considerat. Si aquest nombre és absolutament normal, totes les agrupacions de caràcters són igualment probables i, per tant, prolongant tant com calgui l'escriptura d'aquest nombre, estarem segurs que trobarem, amb la freqüència que desitgem, totes les agrupacions possibles. Si escrivim el nombre $\pi$, que suposem que és absolutament normal, en aquest sistema de numeració, trobarem aleshores, tard o d'hora, la pàgina que ara estic escrivint i també el text complet de les obres de Víctor Hugo i també el text dels diaris que apareixeran de ara en un segle, si és que en aquesta època hi ha diaris. Tot això està contingut en el nombre $\pi$, juntament amb altres moltes coses.

Un nombre és normal quan la freqüència de totes les xifres 0, 1, 2 fins a 9 en el desenvolupament del nombre és la mateixa per a totes i, per tant, val un dècim. Si succeeix el mateix per a qualsevol altre sistema de numeració de base no decimal, sigui el que sigui, es diu que el nombre és absolutament normal. És clar que no sabem si $\pi$ és absolutament normal, tot i que els càlculs fets fins ara així ho confirmen. Aquesta frase de Borel, que produeix el vertigen de l'infinit, no és sinó

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.141 | 59265 | 35897 | 93238 | 46264 | 33832 | 79502 | 88419 | 71693 | 99375 | 10582 | 09749 | 44592 | 30781 |
| 64062 | 86208 | 99862 | 80348 | 25342 | 11706 | 79821 | 48086 | 51328 | 23066 | 47093 | 84460 | 95505 | 82231 |
| 72535 | 94081 | 28481 | 11745 | 02841 | 02701 | 93852 | 11055 | 59644 | 62294 | 89549 | 30381 | 96442 | 88109 |
| 75665 | 93344 | 61284 | 75648 | 23378 | 67831 | 65271 | 20190 | 91456 | 48566 | 92346 | 03486 | 10454 | 32664 |
| 82133 | 93607 | 26024 | 91412 | 73724 | 58700 | 66063 | 15588 | 17488 | 15209 | 20962 | 82925 | 40917 | 15364 |
| 36789 | 25903 | 60011 | 33053 | 05488 | 20466 | 52138 | 41469 | 51941 | 51160 | 94330 | 57270 | 36575 | 95919 |
| 53092 | 18611 | 73819 | 32611 | 79310 | 51185 | 48074 | 46237 | 99627 | 49567 | 35188 | 57527 | 24891 | 22793 |
| 81830 | 11949 | 12983 | 36733 | 62440 | 65664 | 30860 | 21394 | 94639 | 52247 | 37190 | 70217 | 98609 | 43702 |
| 77053 | 92171 | 76293 | 17675 | 23846 | 74818 | 46766 | 94051 | 32000 | 56812 | 71452 | 63560 | 82778 | 57713 |
| 42757 | 78960 | 91736 | 37178 | 72146 | 84409 | 01224 | 95343 | 01465 | 49585 | 37105 | 07922 | 79689 | 25892 |
| 35420 | 19956 | 11212 | 90219 | 60864 | 03441 | 81598 | 13629 | 77477 | 13099 | 60518 | 70721 | 13499 | 99998 |
| 37297 | 80499 | 51059 | 73173 | 28160 | 96318 | 59502 | 44594 | 55346 | 90830 | 26425 | 22308 | 25334 | 46850 |
| 35261 | 93118 | 81710 | 10003 | 13783 | 87528 | 86587 | 53320 | 83814 | 20617 | 17766 | 91473 | 03598 | 25349 |
| 04287 | 55468 | 73115 | 95628 | 63882 | 35378 | 75937 | 51957 | 78185 | 77805 | 32171 | 22680 | 66130 | 01927 |
| 87661 | 11959 | 09216 | 42019 | 89380 | 95257 | 20106 | 54858 | 63278 | 86593 | 61533 | 81827 | 96823 | 03019 |
| 52035 | 30185 | 29689 | 95773 | 62259 | 94138 | 91249 | 72177 | 52834 | 79131 | 51557 | 48572 | 42454 | 15069 |
| 59508 | 29533 | 11686 | 17278 | 55889 | 07509 | 83817 | 54637 | 46493 | 93192 | 55060 | 40092 | 77016 | 71139 |
| 00984 | 88240 | 12858 | 36160 | 35637 | 07660 | 10471 | 01819 | 42955 | 59619 | 89467 | 67837 | 44944 | 82553 |
| 79774 | 72684 | 71040 | 47534 | 64620 | 80466 | 84259 | 06949 | 12933 | 13677 | 02898 | 91521 | 04752 | 16205 |
| 69660 | 24058 | 03815 | 01935 | 11253 | 38243 | 00355 | 87640 | 24749 | 64732 | 63914 | 19927 | 26042 | 69922 |
| 79678 | 23547 | 81636 | 00934 | 17216 | 41219 | 92458 | 63150 | 30286 | 18297 | 45557 | 06749 | 83850 | 54945 |
| 88586 | 92699 | 56909 | 27210 | 79750 | 93029 | 55321 | 16534 | 49872 | 02755 | 96023 | 64806 | 65499 | 11988 |
| 18347 | 97753 | 56636 | 98074 | 26542 | 52786 | 25518 | 18417 | 57467 | 28909 | 77772 | 79380 | 00816 | 47060 |
| 01614 | 52491 | 92173 | 21721 | 47723 | 50141 | 44197 | 35685 | 48161 | 36115 | 73525 | 52133 | 47574 | 18494 |
| 68438 | 52332 | 39073 | 94143 | 33454 | 77624 | 16862 | 51898 | 35694 | 85562 | 09921 | 92221 | 84272 | 55025 |
| 42568 | 87671 | 79049 | 46016 | 53466 | 80498 | 86272 | 32791 | 78608 | 57843 | 83827 | 96797 | 66814 | 54100 |
| 95388 | 37863 | 60950 | 68006 | 42251 | 25205 | 11739 | 29848 | 96084 | 12848 | 86269 | 45604 | 24196 | 52850 |
| 22210 | 66118 | 63067 | 44278 | 62203 | 91949 | 45047 | 12371 | 37869 | 60956 | 36437 | 19172 | 87467 | 76465 |
| 75739 | 62413 | 89086 | 58326 | 45995 | 81339 | 04780 | 27590 | 09946 | 57640 | 78951 | 26946 | 83983 | 52595 |
| 70982 | 58226 | 20522 | 48940 | 77267 | 19478 | 26848 | 26014 | 76990 | 90264 | 01363 | 94437 | 45530 | 50682 |
| 03496 | 25245 | 17493 | 99651 | 43142 | 98091 | 90659 | 25093 | 72216 | 96461 | 51570 | 98583 | 87410 | 59788 |
| 59597 | 72975 | 49893 | 01617 | 53928 | 46813 | 82686 | 83868 | 94277 | 41559 | 91855 | 92524 | 59539 | 59431 |
| 04997 | 25246 | 80845 | 98727 | 36446 | 95848 | 65383 | 67362 | 22626 | 09912 | 46080 | 51243 | 88439 | 04512 |
| 44136 | 54976 | 27807 | 97715 | 69143 | 59977 | 00129 | 61608 | 94416 | 94868 | 55584 | 84063 | 53422 | 07222 |
| 58284 | 88648 | 15845 | 60285 | 06016 | 84273 | 94522 | 67467 | 67889 | 52521 | 38522 | 54995 | 46667 | 27823 |
| 98645 | 65961 | 16354 | 88623 | 05774 | 56498 | 03559 | 36345 | 68174 | 32411 | 25150 | 76069 | 47945 | 10965 |
| 96094 | 02522 | 88797 | 10893 | 14566 | 91368 | 67228 | 74894 | 05601 | 01503 | 30861 | 79286 | 80920 | 87476 |
| 09178 | 24938 | 58900 | 97149 | 09675 | 98526 | 13655 | 49781 | 89312 | 97848 | 21682 | 99894 | 87226 | 58804 |
| 85756 | 40142 | 70477 | 55513 | 23796 | 41451 | 52374 | 62343 | 64542 | 85844 | 47952 | 65867 | 82105 | 11413 |
| 54735 | 73952 | 31134 | 27166 | 10213 | 59695 | 36231 | 44295 | 24849 | 37187 | 11014 | 57654 | 03590 | 27993 |
| 44037 | 42007 | 31057 | 85390 | 62198 | 38744 | 78084 | 78489 | 68332 | 14457 | 13868 | 75194 | 35064 | 30218 |
| 45319 | 10484 | 81005 | 37061 | 46806 | 74919 | 27819 | 11979 | 39952 | 06141 | 96634 | 28754 | 44064 | 37451 |
| 23718 | 19217 | 99983 | 91015 | 91956 | 18146 | 75142 | 69123 | 97489 | 40907 | 18649 | 42319 | 61567 | 94520 |
| 80951 | 46550 | 22523 | 16038 | 81930 | 14209 | 37621 | 37855 | 95663 | 89377 | 87083 | 03906 | 97920 | 77346 |
| 72218 | 25625 | 99661 | 50142 | 15030 | 68038 | 44773 | 45492 | 02605 | 41466 | 59252 | 01497 | 44285 | 07325 |
| 18666 | 00213 | 24340 | 88190 | 71048 | 63317 | 34649 | 65145 | 39057 | 96268 | 56100 | 55081 | 06658 | 79699 |
| 81635 | 74736 | 38405 | 25714 | 59102 | 89706 | 41401 | 10971 | 20628 | 04390 | 39759 | 51567 | 71577 | 00420 |
| 33786 | 99360 | 07230 | 55876 | 31763 | 59421 | 87312 | 51471 | 20532 | 92819 | 18261 | 86125 | 86732 | 15791 |
| 98414 | 84882 | 91644 | 70609 | 57527 | 06957 | 22091 | 75671 | 16722 | 91098 | 16909 | 15280 | 17350 | 67127 |
| 48583 | 22287 | 18352 | 09353 | 96572 | 51210 | 83579 | 15136 | 98820 | 91444 | 21006 | 75103 | 34671 | 10314 |
| 12671 | 11369 | 90865 | 85163 | 98315 | 01970 | 16515 | 11685 | 17143 | 76576 | 18351 | 55650 | 88490 | 99898 |
| 59982 | 38734 | 55283 | 31635 | 50764 | 79185 | 35893 | 22618 | 54896 | 32132 | 93308 | 98570 | 64204 | 67525 |
| 90709 | 15481 | 41654 | 98594 | 61637 | 18027 | 09819 | 94309 | 92448 | 89575 | 71282 | 89059 | 23233 | 26097 |
| 29971 | 20844 | 33573 | 26548 | 93823 | 91193 | 25974 | 63667 | 30583 | 60414 | 28138 | 83032 | 03824 | 90375 |
| 89852 | 43744 | 17029 | 13276 | 56180 | 93773 | 44403 | 07074 | 69211 | 20191 | 30203 | 30380 | 19762 | 11011 |
| 00449 | 29321 | 51608 | 42444 | 85963 | 76698 | 38952 | 28684 | 78312 | 35526 | 58213 | 14495 | 76857 | 26243 |
| 34418 | 93039 | 68642 | 62434 | 10773 | 22697 | 80280 | 73189 | 15441 | 10104 | 46823 | 25271 | 62010 | 52652 |
| 27211 | 16603 | 96665 | 57309 | 25471 | 10557 | 85376 | 34668 | 20653 | 10989 | 65269 | 18620 | 56476 | 93125 |
| 70586 | 35662 | 01855 | 81007 | 29360 | 65987 | 64861 | 17910 | 45334 | 88503 | 46113 | 65768 | 67532 | 49441 |
| 66803 | 96265 | 79787 | 71855 | 60845 | 52965 | 41266 | 54085 | 30614 | 34443 | 18586 | 76975 | 14566 | 14068 |
| 00700 | 23787 | 76591 | 34401 | 71274 | 94704 | 20562 | 23053 | 89945 | 61314 | 07112 | 70004 | 07854 | 73326 |
| 99390 | 81454 | 66464 | 58807 | 97270 | 82668 | 30634 | 32858 | 78569 | 83052 | 35808 | 93306 | 57574 | 06795 |
| 45716 | 37752 | 54202 | 11495 | 57615 | 81400 | 25012 | 62285 | 94130 | 21647 | 15509 | 79259 | 23099 | 07965 |
| 47376 | 12551 | 76567 | 51357 | 51782 | 96664 | 54779 | 17450 | 11299 | 61489 | 03046 | 39947 | 13296 | 21073 |
| 40437 | 51895 | 73596 | 14589 | 01938 | 97131 | 11790 | 42978 | 28564 | 75032 | 03198 | 69151 | 40287 | 08085 |
| 99048 | 01094 | 12147 | 22131 | 79476 | 47772 | 62241 | 42548 | 54540 | 33215 | 71853 | 06142 | 28813 | 75850 |
| 43063 | 32175 | 18297 | 98662 | 23717 | 21591 | 60771 | 66925 | 47487 | 38986 | 65494 | 94501 | 14654 | 06284 |
| 33663 | 93790 | 03976 | 92656 | 72146 | 38530 | 67360 | 96571 | 20918 | 07638 | 32716 | 64162 | 74888 | 80078 |
| 69256 | 02902 | 28472 | 10403 | 17211 | 86082 | 04190 | 00422 | 96617 | 11963 | 77921 | 33757 | 51149 | 59501 |
| 56604 | 96318 | 62947 | 26547 | 36425 | 23081 | 77036 | 75159 | 06735 | 02350 | 72835 | 40567 | 04038 | 67435 |
| 13622 | 22477 | 15891 | 50495 | 30984 | 44893 | 33096 | 34087 | 80769 | 32599 | 39780 | 54193 | 41447 | 37744 |
| 18426 | 31298 | 60809 | 98886 | 87413 | 26047 | 21569 | 51623 | 96586 | 45730 | 21631 | 59819 | 31951 | 67353 |

TAULA 1: 5 038 dígits decimals de $\pi$.

una advertència per a l'adequada comprensió de la llei dels grans nombres de Jacob Bernouilli, i una recordança de com pot resultar subtil la teoria de probabilitats.[7]

El que hem dit il·lustra molt bé la diferència que hi ha entre les matemàtiques i el càlcul. Per Leibnitz, la repetició de càlculs, basats en un mateix algorisme, era una tasca pròpia d'esclaus i és per això que va treballar en la invenció d'una màquina que els dugués a terme automàticament. Avui, el seu somni és una realitat i podem realitzar amb gran facilitat les operacions esbalaïdores dels calculistes que hem esmentat.

Les matemàtiques no són pas un mer exercici de càlcul. Encara que això sigui obvi, la majoria de la gent del carrer creu el contrari. Un amic meu, doctor en filosofia, quan li vaig dir a què em dedicava, m'engaltà: «però si les matemàtiques són una ciència closa!» És penós de constatar com hi ha persones, amb una elevada educació universitària o tècnica, que ni tan sols coneixen la naturalesa de les matemàtiques. Respecte d'això i parlant de la quadratura del cercle, Otto Toeplitz, en el seu meravellós llibre *El càlcul: un enfocament genètic*, ens diu:

> Hi ha gent que no comprèn el punt principal del problema. Per exemple, del sofista Antifont que vivia a Atenes cap a la mateixa època que Hipòcrates, ens diu Aristòtil que va inscriure un quadrat en un cercle i aleshores va construir triangles isòsceles sobre els seus costats, formant un octògon regular inscrit en el cercle i, de manera similar, un polígon regular de setze costats i així successivament. Com que tot polígon rectilini es pot transformar en un quadrat, Antifont creia que existeix, o ha d'existir, un polígon d'un nombre de costats prou gran idèntic al cercle i que el quadrat en què es pugui transformar seria la solució de la quadratura del cercle. Aquest argument, que era prou vàlid per a un cercle concret, ni que fos dibuixat amb un compàs molt fi, va ser refusat per Aristòtil com a invàlid per al cercle ideal de la geometria. També Hipòcrates tenia el concepte clar de la geometria com una ciència exacta que tractava de configuracions ideals, com es demostra en una certa cita d'Anaxàgoras.
>
> És precisament quan es tracta de la discussió d'un tema concret especial i no en un debat filosòfic, on veiem la diferència existent entre el pensament dels sofistes d'aquella època i l'autèntic pensament científic que va néixer en aquells temps. També avui, després de dos mil any d'història de la ciència, hi ha encara molta gent que és incapaç de comprendre la naturalesa ideal dels objectes de la ciència matemàtica i els contemplen com a cosa de menor importància, com voler buscar tres peus al gat. Aquí els sofistes apareixen no com a persones ridícules, sinó com a representants d'una actitud mental que existeix fins avui i que continua lluitant contra la ciència pura. Les divergències que existeixen avui entre els matemàtics purs i els aplicats no són sinó la continuació d'aquesta antiquíssima lluita.

Tenint present aquesta ignorància, resulta grandiós que ja aleshores els grecs tinguessin el concepte de rigor matemàtic i la idea de demostració lògicament rigorosa que seguim tenint nosaltres. Cal tenir en compte que a l'Orient (la Xina, Corea,

7 Respecte a això, vegeu l'article de W. Weaver en el *Scientific American* de l'octubre del 1950 i el llibre de G. J. Székely: *Paradoxes a teoria de la probabilitat i a estadística matemàtica*, Reide. Publ. Co., 1986.

el Japó, l'Índia), encara que compartien amb els grecs el coneixement de moltes proposicions matemàtiques, no tenien una idea clara de «demostració».

És força il·lustratiu, en la biografia de Ramanujan, el seu primer contacte amb la matemàtica occidental representada per Hardy. Hardy va descobrir que la manera de pensar pel la qual Ramanujan obtenia les seves fórmules no era de cap manera plasmable en el que nosaltres reconeixem com a «demostració»; era una indefinida barreja d'intuïció, genialitat i càlcul. Hardy va comprendre que una educació matemàtica a l'estil occidental podria espatllar el talent de Ramanujan i el va prendre directament a càrrec seu com a pupil.

Aquí tenim, doncs, un altre exemple de la sorprenent complexitat de la ment humana. Bo fora que aquells que volen reproduir les capacitats de la nostra ment mitjançant una màquina estudiessin aquests casos de calculistes i matemàtics i s'adonessin que és un reduccionisme ingenu suposar que el nostre cervell no és res més que una màquina lògica, més o menys perfecta.

Tornem, però, al nombre $\pi$. Hem dit que és un nombre irracional i que, per tant, no sembla que puguem predir quin serà el decimal que ocuparà un lloc donat sense calcular tots els precedents. Significa això que no coneixem el nombre $\pi$? Aquesta pregunta sembla que tingui aspectes filosòfics. Tanmateix, $\pi$ és, per definició, el perímetre d'un cercle de diàmetre 1, i no sembla que sigui difícil d'intuir el que és un cercle. Des d'aquest punt de vista tenim una percepció claríssima del que és $\pi$. El problema sorgeix quan tractem de trobar el seu desenvolupament decimal. Però, què és un desenvolupament decimal? Simplement, és una sèrie convergent d'un tipus especial, i se sol identificar la sèrie amb el nombre vers el qual convergeix. En aquest sentit, la sèrie

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots$$

que dóna el desenvolupament de $\pi$ ens és totalment desconeguda a partir d'un cert lloc i així $\pi$ (el nombre que representa) ens és, des d'aquest punt de vista, gairebé desconegut del tot. Podem aproximar-nos-hi tant com vulguem, però la sèrie segueix essent un misteri. Suposo que vostès es deuen estar preguntant com és que, si el desenvolupament decimal de $\pi$ ens és totalment desconegut a partir d'un lloc, es poden seguir calculant decimals de $\pi$ a mesura que la nostra potència de càlcul augmenta. L'explicació es troba en el fet que posseïm definicions de $\pi$ mitjançant sèries (infinites, és clar), els infinits termes de les quals ens són totalment coneguts. L'aparent antinòmia rau que els termes d'aquestes sèries segueixen una llei tal que podem predir exactament el nombre que ocuparà un lloc qualsevol de la sèrie, sense calcular els precedents. Per exemple, tenim l'elegant sèrie que Leibnitz va descobrir el 1674:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \cdots\right).$$

Coneixem, doncs, $\pi$? La resposta ha de ser ambigua: sí i no, depèn. Per tal d'il·luminar més aquesta mena de preguntes filosòfiques, compararem $\pi$ amb un altre nombre important de les matemàtiques: el nombre $e$. Però, abans, vegem com es pot arribar al resultat de Leibnitz: quelcom que en principi sembla gairebé màgic. Seguiré aquí l'esplèndida exposició de Hilbert i Cohn-Vossen en el conegudíssim llibre *Geometria i imaginació*.

Prenem la xarxa de punts del pla de coordenades enteres. Podem pensar en els punts d'intersecció d'un full de paper quadriculat. Gauss va considerar el cercle de

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.066 | 36514 | 32036 | 13411 | 02634 | 02244 | 65222 | 66435 | 20650 | 24015 | 54432 | 15426 | 43102 | 51611 |
| 54565 | 22000 | 26224 | 36103 | 30144 | 32336 | 31011 | 30410 | 05500 | 41024 | 12535 | 21165 | 52105 | 53625 |
| 15030 | 33124 | 24240 | 26100 | 43630 | 56453 | 05263 | 30241 | 32614 | 02100 | 45006 | 34010 | 44665 | 21000 |
| 35400 | 04041 | 11331 | 21523 | 53235 | 43345 | 40642 | 64611 | 00254 | 23321 | 50131 | 11611 | 14533 | 05035 |
| 41442 | 00052 | 62543 | 12414 | 61506 | 46366 | 61250 | 34062 | 15665 | 13342 | 65505 | 31216 | 14145 | 36020 |
| 10463 | 10465 | 24331 | 42205 | 26011 | 15466 | 44300 | 43014 | 20142 | 34203 | 24045 | 21441 | 51301 | 32414 |
| 62052 | 51661 | 52443 | 34504 | 50323 | 50015 | 23003 | 03621 | 64454 | 61065 | 02134 | 62563 | 45244 | 35110 |
| 56450 | 31110 | 52233 | 25414 | 03314 | 61630 | 63055 | 66400 | 02512 | 41363 | 53353 | 13550 | 03143 | 64221 |
| 26150 | 34101 | 63015 | 23416 | 51165 | 44562 | 31316 | 33013 | 40550 | 00414 | 33321 | 23320 | 51104 | 12104 |
| 02240 | 50334 | 65010 | 10222 | 30330 | 46551 | 16161 | 25045 | 25065 | 44564 | 30421 | 36305 | 42260 | 56042 |
| 16431 | 01224 | 53346 | 32241 | 15516 | 32443 | 22001 | 14053 | 01560 | 54442 | 10505 | 63350 | 10423 | 51630 |
| 16562 | 44430 | 56253 | 36304 | 62535 | 33144 | 41564 | 36205 | 25422 | 65163 | 60164 | 43512 | 21413 | 33403 |
| 11231 | 20141 | 54241 | 10210 | 00266 | 01212 | 16352 | 35066 | 15330 | 34035 | 55326 | 16415 | 00660 | 12211 |
| 20233 | 12140 | 25043 | 30425 | 14535 | 34562 | 12555 | 44000 | 22231 | 50314 | 26131 | 12334 | 53165 | 51523 |
| 04206 | 53153 | 42155 | 41350 | 66244 | 64022 | 44033 | 22065 | 66604 | 23452 | 31245 | 44240 | 05230 | 50116 |
| 15054 | 62123 | 65602 | 05514 | 21313 | 22453 | 40323 | 24233 | 04666 | 02241 | 25123 | 12105 | 00343 | 43130 |
| 31422 | 10352 | 02561 | 51422 | 26432 | 64025 | 00161 | 21225 | 02061 | 56052 | 60454 | 44044 | 11301 | 62660 |
| 36011 | 00115 | 14125 | 32242 | 43523 | 12201 | 63515 | 60023 | 10126 | 54542 | 65250 | 44333 | 55206 | 14232 |
| 65340 | 15561 | 30460 | 45065 | 66564 | 00204 | 60624 | 00206 | 21430 | 45456 | 66043 | 20224 | 10601 | 50243 |
| 16341 | 53565 | 03220 | 51160 | 43241 | 44515 | 46162 | 63206 | 03606 | 35463 | 45103 | 36361 | 16033 | 63361 |
| 40664 | 41160 | 46362 | 15145 | 11242 | 60140 | 04355 | 55264 | 63610 | 21531 | 10066 | 14460 | 22162 | 52043 |
| 02056 | 04034 | 03304 | 02216 | 42602 | 36420 | 66255 | 66306 | 62450 | 54210 | 54664 | 34205 | 13544 | 15320 |
| 56160 | 54645 | 14142 | 35555 | 41365 | 50564 | 33415 | 44014 | 51220 | 25445 | 42601 | 52140 | 12365 | 02223 |
| 31052 | 15125 | 16166 | 16231 | 50523 | 25545 | 16006 | 12654 | 42535 | 34656 | 50544 | 43666 | 31105 | 26504 |
| 25225 | 63430 | 24262 | 01323 | 40531 | 16413 | 13316 | 14363 | 06322 | 56524 | 40302 | 13623 | 23166 | 56556 |
| 51322 | 63333 | 14544 | 12445 | 61212 | 11650 | 34502 | 44040 | 00305 | 43605 | 66001 | 50626 | 04336 | 56000 |
| 33155 | 44652 | 55254 | 50012 | 62422 | 61362 | 06106 | 41345 | 55416 | 56243 | 53443 | 11333 | 23333 | 62145 |
| 04201 | 21361 | 11603 | 31046 | 03534 | 63010 | 63355 | 64323 | 22120 | 20355 | 44250 | 54110 | 04124 | 16251 |
| 24116 | 64116 | 15123 | 21622 | 25640 | 62243 | 14416 | 66003 | 26336 | 41604 | 40415 | 42006 | 55600 | 01243 |
| 35245 | 54411 | 25140 | 31054 | 46464 | 42540 | 40102 | 15121 | 64051 | 10366 | 53552 | 05036 | 42223 | 36055 |
| 42523 | 46544 | 23233 | 26246 | 61161 | 63211 | 32330 | 23005 | 05021 | 11514 | 33332 | 30053 | 41022 | 53622 |
| 54626 | 62456 | 24514 | 10451 | 54026 | 51406 | 21331 | 11256 | 22611 | 23620 | 66426 | 32444 | 16244 | 63616 |
| 25116 | 51644 | 15246 | 30616 | 34225 | 02635 | 63421 | 41353 | 42561 | 14614 | 64346 | 63006 | 61410 | 30425 |
| 54245 | 16023 | 06456 | 33333 | 56416 | 42546 | 11104 | 61525 | 65314 | 60502 | 06634 | 55003 | 21366 | 45605 |
| 06440 | 30110 | 52333 | 61122 | 64405 | 54221 | 11202 | 26106 | 64646 | 01450 | 53320 | 36244 | 34632 | 62563 |
| 24051 | 30112 | 02305 | 22536 | 24631 | 24632 | 35605 | 54233 | 14532 | 50126 | 31103 | 25322 | 62533 | 40512 |
| 56060 | 53114 | 06025 | 46464 | 13361 | 10453 | 03631 | 20063 | 42550 | 13114 | 20630 | 12540 | 36550 | 46452 |
| 34664 | 25164 | 63056 | 14420 | 33233 | 26465 | 11214 | 52633 | 66236 | 46022 | 22501 | 05003 | 53306 | 13311 |
| 03104 | 55144 | 30000 | 16042 | 33305 | 16403 | 63200 | 63602 | 64510 | 13435 | 20324 | 36116 | 30412 | 31236 |
| 12202 | 46030 | 40361 | 53430 | 24154 | 21315 | 30024 | 32406 | 04344 | 32031 | 63334 | 32114 | 34036 | 20511 |
| 44312 | 65055 | 16530 | 33156 | 13624 | 53361 | 26520 | 50311 | 50543 | 23562 | 64310 | 21363 | 66131 | 01614 |
| 61511 | 01546 | 53564 | 26123 | 14151 | 35525 | 51301 | 13255 | 42312 | 22651 | 54500 | 25611 | 15601 | 20534 |
| 33665 | 52656 | 12632 | 04261 | 61606 | 64233 | 13032 | 56414 | 03132 | 60421 | 40110 | 64635 | 32612 | 34262 |
| 45306 | 50534 | 20154 | 63362 | 53351 | 02543 | 41332 | 21035 | 36663 | 50564 | 66531 | 55441 | 45163 | 00665 |
| 16120 | 53313 | 02122 | 15125 | 40332 | 63602 | 40601 | 40615 | 61414 | 64530 | 11166 | 05010 | 66650 | 33642 |
| 61005 | 31406 | 55465 | 03324 | 63654 | 51021 | 56431 | 61601 | 25511 | 36463 | 22323 | 30540 | 51342 | 16111 |
| 23002 | 65261 | 60640 | 52411 | 42335 | 65163 | 21001 | 41561 | 23416 | 51455 | 46210 | 56155 | 34303 | 12365 |
| 51004 | 56160 | 12502 | 62132 | 30156 | 50132 | 26054 | 41605 | 46423 | 53626 | 30323 | 15331 | 32623 | 15541 |
| 25202 | 11645 | 64236 | 30332 | 66424 | 22461 | 21653 | 65206 | 01433 | 33616 | 45021 | 51516 | 02214 | 32216 |
| 13610 | 64254 | 61103 | 25305 | 15250 | 66616 | 21232 | 26104 | 32422 | 13432 | 11456 | 56635 | 15522 | 41066 |
| 40435 | 13235 | 21203 | 10163 | 06004 | 16451 | 45322 | 64464 | 12414 | 04432 | 41035 | 42031 | 05323 | 10331 |
| 41622 | 64646 | 03351 | 66336 | 46445 | 16622 | 32053 | 22633 | 65536 | 03410 | 02112 | 12435 | 06245 | 36113 |
| 54256 | 30544 | 16531 | 24406 | 22255 | 50612 | 21100 | 13121 | 45010 | 24201 | 62236 | 45620 | 45413 | 34436 |
| 32163 | 03505 | 03012 | 41531 | 14560 | 42065 | 04410 | 46211 | 54165 | 53033 | 26510 | 40211 | 30064 | 44410 |
| 04150 | 00405 | 00221 | 52555 | 13662 | 52322 | 00023 | 41600 | 04011 | 36642 | 10142 | 43233 | 63633 | 62110 |
| 03406 | 40300 | 52411 | 52336 | 46026 | 21136 | 20061 | 10641 | 30146 | 15645 | 45210 | 24055 | 62264 | 54442 |
| 04054 | 22303 | 60526 | 36443 | 13026 | 52400 | 22355 | 64210 | 34102 | 00566 | 45154 | 25446 | 64162 | 12264 |
| 26112 | 60600 | 46161 | 63142 | 34630 | 13452 | 60642 | 55635 | 40061 | 62155 | 16161 | 42644 | 06426 | 14512 |
| 00320 | 52023 | 46423 | 22636 | 35640 | 61453 | 21362 | 54313 | 36360 | 55162 | 34003 | 55050 | 50324 | 65633 |
| 45615 | 30616 | 35654 | 02302 | 62211 | 10630 | 24440 | 12543 | 53341 | 24202 | 06541 | 23432 | 31440 | 20632 |
| 65466 | 36144 | 60253 | 52643 | 25605 | 05345 | 32261 | 46454 | 12451 | 40246 | 10320 | 35522 | 33655 | 11150 |
| 44551 | 53501 | 01630 | 65340 | 02524 | 26634 | 65663 | 35562 | 26433 | 06063 | 34364 | 51164 | 06124 | 61356 |
| 05564 | 14303 | 22230 | 05505 | 15542 | 62221 | 36154 | 56346 | 10306 | 23364 | 05206 | 66435 | 63523 | 15350 |
| 04300 | 35232 | 31103 | 30565 | 05352 | 02411 | 21605 | 55045 | 20023 | 00645 | 05160 | 25502 | 62564 | 62653 |
| 04062 | 46304 | 41541 | 25515 | 35540 | 50160 | 65604 | 23113 | 65111 | 50521 | 24600 | 51255 | 55532 | 51566 |
| 61023 | 40211 | 51524 | 56342 | 51145 | 61113 | 20121 | 66523 | 45306 | 32141 | 41224 | 02622 | 22514 | 61320 |
| 66505 | 64330 | 65553 | 16412 | 43620 | 61350 | 63205 | 12256 | 14036 | 31046 | 60325 | 64204 | 52641 | 62633 |
| 20515 | 14035 | 10506 | 55333 | 33060 | 02355 | 40361 | 34612 | 05046 | 00651 | 53660 | 03253 | 14450 | 56454 |
| 60421 | 55445 | 64601 | 12245 | 10414 | 26310 | 14351 | 55523 | 06062 | 64434 | 10112 | 21663 | 05042 | 41530 |
| 14013 | 42034 | 32641 | 53145 | 66013 | 11151 | 43530 | 56614 | 00425 | 45525 | 16011 | 11510 | 53343 | 66331 |
| 13600 | 12432 | 22255 | 42104 | 43215 | 55222 | 31161 | 64434 | 21535 | 12426 | 26622 | 30611 | 26563 | 40466 |
| 40445 | 24510 | 63240 | 20612 | 42210 | 56312 | 14552 | 55203 | 61414 | 16203 | 65624 | 42206 | 52021 | 33466 |

TAULA 2: 5 038 dígits septimals de $\pi$.

radi $r$ centrat en un dels punts de la xarxa i va assajar de trobar el nombre $\rho$ de punts (de la xarxa, s'entén i s'entendrà), que hi cauen dintre. Gauss va obtenir els resultats següents:

| | |
|---|---|
| r=10, | $\rho$=317 |
| r=20, | $\rho$=1257 |
| r=30, | $\rho$=2821 |
| r=100, | $\rho$=31417 |
| r=200, | $\rho$=125629 |
| r=300, | $\rho$=282697. |

Veiem que quan $r$ val 10 o 100, $\rho$ val 317 o 31 417, respectivament; nombres que ens recorden el desenvolupament decimal de $\pi$: 3,1415... Això és degut que el cercle de radi 10 té àrea $100\pi$, aproximadament igual a 314, i el de radi 100 té àrea $1000\pi$, aproximadament igual a 31 415. Naturalment, $\rho = 317$ no difereix molt de 314; ni $\rho = 31\,417$ de 31 415 perquè, com que hi ha 317 punts al cercle de radi 10, l'àrea total dels quadrats, l'origen dels quals són aquests 317 punts, és 317, que difereix de $100\pi$, en valor absolut, en menys de l'àrea de tots els quadrats tallats per la perifèria del cercle. Vegem això amb una mica més de calma. Volem saber la diferència $\pi r^2 - \rho$ en valor absolut; $\pi r^2$ consta d'una part verda no coberta pels $\rho$ quadrats i una part, diguem-ne blanca, coberta per ells; $\rho$ consta de la part verda i d'una part vermella que surt del cercle. Així que $\pi r^2 - \rho$ és (verd + blanc) menys (blanc + vermell), és a dir, (verd - vermell). En valor absolut $\pi r^2 - \rho$ és (verd - vermell) o (vermell - verd), segons quin d'ells sigui positiu; però, en tot cas, el valor absolut de $\pi r^2 - \rho$ és menor que (verd + vermell). Però les parts vermella i verda estan formades per parts de quadrats de la xarxa que toquen la perifèria del cercle, per tant, en valor absolut, $\pi r^2 - \rho$ és menor que l'àrea dels quadrats tocats per la perifèria, aquesta àrea és menor que la d'un anell o banda, la línia central de la qual és la perifèria del cercle i les vores de la qual són dues circumferències de radis $r + \sqrt{2}$ i $r - \sqrt{2}$, puix que la diagonal d'un quadrat de la xarxa és $\sqrt{2}$. Però l'àrea d'un anell com aquest és la longitud $2\pi r$ de la seva línia central, per l'amplada $2\sqrt{2}$, és a dir, $4\pi\sqrt{2}r$. Hem demostrat que, en valor absolut, $\pi r^2 - \rho$ és menor que $4\pi\sqrt{2}r$. Aquí hi ha el *quid* de la qüestió perquè, mentre que l'àrea del cercle de radi $r$ depèn de $r^2$, l'àrea de la banda d'amplada $2\sqrt{2}$ centrada a la circumferència de radi $r$ depèn, no del quadrat de $r$, sinó, simplement, de $r$. Dividint-ho tot per $r^2$ (o, geomètricament, reduint-ho tot per una contracció de raó $\frac{1}{r}$) tindrem que el valor absolut de la diferència $\pi - \frac{\rho}{r^2}$ és menor que $\frac{2\pi\sqrt{2}}{r}$. Si fem tendir $r$ a infinit, $\frac{2\pi\sqrt{2}}{r}$ tendeix a zero, així que *$\pi$ és el límit de $\frac{\rho}{r^2}$ quan $r$ tendeix a infinit.* Aquest és un resultat senzill però significatiu. Tornem-ho a dir: prenem el cercle de radi $r$, prenem el nombre $\rho$ de punts de la xarxa que hi cauen dintre, aleshores $\frac{\rho}{r^2}$ tendeix a $\pi$ quan $r$ tendeix a infinit.

Vegem que això és així en els exemples calculats per Gauss:

| | |
|---|---|
| r=10, | $\frac{\rho}{r^2}$=3,17 |
| r=20, | $\frac{\rho}{r^2}$=3,1425 |
| r=30, | $\frac{\rho}{r^2}$=3,134 |
| r=100, | $\frac{\rho}{r^2}$=3,1417 |
| r=200, | $\frac{\rho}{r^2}$=3,140725 |
| r=300, | $\frac{\rho}{r^2}$=3,14107. |

Es tracta ara de calcular $\rho/r^2$ (quan $r$ tendeix a infinit) d'una altra manera i això ens durà a la sèrie de Leibnitz. La clau del càlcul que farem ara es troba a fer tendir $r$ a infinit d'una manera especial. Concretament, farem que $r$ recorri els senars $n$ més grans que 1: $n = 3, 5, 7, \dots$ i, anomenant ara $\nu$ al nombre de punts de la xarxa que cauen al cercle de radi $n$, calcularem $\pi$ com el límit de $\nu/r^2$ quan $n$ tendeix a infinit sobre els senars més grans que 1. Prèviament, dividirem els senars en dues parts disjuntes: els que formen la progressió geomètrica de raó 4: $\{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$, que anomenarem (tan sols per entendre'ns ara) *supersenars*: senars congruents amb 1 mòdul 4; i els nombre subsenars: senars congruents amb 3 mòdul 4 i que formen la progressió $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$. Vull ara simplement indicar que els supersenars són els denominadors dels termes positius de la sèrie de Leibnitz, mentre que els subsenars corresponen als termes negatius.

Si volem calcular el límit de $\nu/n^2$, la qüestió clau és calcular $\nu$ donat $n$. Naturalment, hom podria traçar en un full quadriculat, amb un compàs molt fi, un cercle de radi $n$, i comptar el nombre $\nu$ de punts de la xarxa que són a dins del cercle. Aquest instructiu procediment no és ni general ni exacte: hi ha d'haver algun mètode més intel·ligent. De moment, observem que la distància d'un punt de la xarxa al centre $(0, 0)$ del cercle és l'arrel quadrada d'un nombre enter, pel teorema de Pitàgoras. Així, traçarem dintre del cercle de radi $n$ les circumferències de radis $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \dots$ , $\sqrt{n^2}$, comptarem quants punts de la xarxa hi ha sobre cada una i la suma donarà $\nu - 1$, puix que hem prescindit del centre del cercle, que també és un punt de la xarxa. La qüestió ara s'ha convertit a esbrinar quants punts de la xarxa hi ha a la circumferència de radi $\sqrt{m}$. Per exemple, a la de radi $\sqrt{1}$ n'hi ha quatre; a la de radi $\sqrt{2}$ n'hi ha quatre, i cap a la de radi $\sqrt{3}$; però a la de radi $\sqrt{5}$ n'hi ha vuit. Quina mena de problema tenim entre mans? Simplement, un problema de teoria de nombres: *a la circumferència de radi $\sqrt{m}$ hi ha tants punts de la xarxa com maneres diferents hi ha d'expressar $m$ com a suma de dos quadrats de nombres enters.* Aquest problema ja va ser considerat per Pere de Fermat el 1640 i la fascinant resposta és que *el nombre de maneres diferents d'expressar un nombre $m$ com a suma de dos quadrats és quatre vegades la diferència entre el nombre de supersenars divisors de $m$ i el nombre de subsenars divisors de $m$.* No ho demostraré pas, però vegem-ne un exemple: 30 posseeix dos divisors supersenars (1 i 5) i dos divisors subsenars (3 i 15); és a dir, que 30 no és la suma de dos quadrats i sobre la circumferència de radi $\sqrt{30}$ no hi ha cap punt de la xarxa. Contràriament, 10 posseeix dos divisors supersenars (1 i 5) i cap de subsenar; és a dir, que 10 es pot escriure de $4 \times 2 = 8$ maneres diferents com a suma de dos quadrats: $10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2$, i sobre la circumferència de radi $\sqrt{10}$ hi ha vuit punts de la xarxa, que són $(1, 3)$, $(3, 1)$ i els seus simètrics respecte dels eixos de coordenades.

Com que a la circumferència de radi $\sqrt{m}$ hi ha tants punts de la xarxa com quatre vegades la diferència entre el nombre de supersenars divisors de $m$, i el nombre de subsenars divisors de $m$, per calcular $(\nu - 1)/4$ prendrem els nombres 1, 2, 3, etc. fins a $n^2$ (radi al quadrat del cercle que estudiem); a continuació comptarem els supersenars divisors d'1, els supersenars divisors de 2, etc., els supersenars divisors de $n^2$, i obtindrem un nombre $S$; després farem el mateix amb els subsenars i obtindrem un nombre $s$. Aleshores $(\nu - 1)/4 = S - s$. Aquest recompte pot fer-se d'una altra manera i aquí hi ha el nus de la qüestió. Prenem un supersenar fixat, per exemple el 5, i ens preguntarem quants dels nombres 1, 2, 3 fins a $n^2$ el posseeixen com a divisor: òbviament, es tracta dels nombres 5, 10, 15, etc., múltiples de cinc menors o iguals que $n^2$. Quants n'hi ha, d'aquests múltiples? Pensem en els nombres $1, 2, 3, \ldots, n^2$ com si fossin els pisos d'un edifici. Estem fent el recompte del nombre de pisos que són múltiples de cinc, menors o iguals que $n^2$. D'aquests pisos, n'hi ha tants com pisos calen per atènyer el pis on es troba el nombre $n^2/5$. Aquest pis on és $n^2/5$ es denota per $[n^2/5]$ i és la part entera del nombre $n^2/5$. En resum, hem demostrat la igualtat

$$\frac{\nu-1}{4} = \left[\frac{n^2}{1}\right] - \left[\frac{n^2}{3}\right] + \left[\frac{n^2}{5}\right] - \left[\frac{n^2}{7}\right] + \cdots \pm \left[\frac{n^2}{n^2}\right], \tag{1}$$

que ens permet calcular $\nu$. Així, per exemple, per $n = 5$ tindrem tretze termes que disminueixen en valor absolut des de 25 fins a 1 amb signes alternats. Tindrem, en aquest cas,

$$\nu = 1 + 4(25 - 8 + 5 - 3 + 2 - 2 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1) = 1 + 4(20) = 81.$$

És a dir, que per a $n = 5$ hi ha 81 punts al cercle de radi 5.

Per a obtenir la sèrie de Leibnitz cal treure els claudàtors a l'expressió anterior. Si ho fem, cometem un error en valor absolut

$$0 < |\epsilon_1 - \epsilon_3 + \epsilon_5 - \epsilon_7 + \cdots \pm \epsilon_{n^2}| < \frac{n^2+1}{2},$$

puix que l'error $\epsilon_i$ quan traiem el claudàtor $i$-èsim és $0 \le \epsilon_i < 1$. L'error comès seria de la forma $\pm\epsilon(n^2+1)/2$, $0 < \epsilon < 1$, *on* $\epsilon$ *depèn de* $n$. En aquest error apareix el terme $n^2$, que faria impossible de continuar el nostre argument, puix que en passar al límit $(\nu - 1)/4n^2$ (quan $n = 3, 5, 7, \ldots$), $\epsilon/2$ podria no tendir a zero. Cal, per tant, actuar amb més cura.

Primer observem que els termes de l'expressió (1) van baixant en valor absolut des de $[n^2/1] = n^2$ fins a $[n^2/n] = n$ i després baixen fins a 1, i són menors que $n$ en valor absolut. Això es veu clar en l'exemple $n = 5$. Primer tenim $(n+1)/2$ termes $\{25, -8, 5\}$ que, si els traiem els claudàtors, produeixen un error $\pm\hat{\epsilon}_1(n+1)/2$, $0 < \hat{\epsilon}_1 < 1$ i com que $(n+1)/2 < n$, per a $n = 3, 5, 7, \ldots$ podem escriure-ho com $\epsilon_1 n$, $0 < \epsilon_1 < 1$; després resten $n(n-1)/2$ termes que acaben en 1, són menors que $n$ en valor absolut i alternen els signes: $\{-3, 2, -2, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1\}$. La seva suma és menor que $n$ i la podem escriure així: $\epsilon_2 n$, $0 < \epsilon_2 < 1$. Això resol el nostre problema: escrivim (1) així:

$$\frac{\nu-1}{4} = \frac{n^2}{1} - \frac{n^2}{3} + \cdots \pm \frac{n^2}{n} \pm \epsilon_1 n \pm \epsilon_2 n, \tag{2}$$

i si dividim per $n^2$ obtenim:

$$\frac{\nu}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \pm \frac{1}{n} \pm \frac{\epsilon_1}{n} \pm \frac{\epsilon_2}{n}. \tag{3}$$

Quan fem tendir $n$ a infinit sobre els senars més grans que 1, la successió $(\nu/4n^2) - (1/4n^2)$ té el mateix límit que la successió $\nu/4n^2$, perquè $1/4n^2$ tendeix a zero; aquest límit —ja ho sabem— és $\pi/4$. Tanmateix, la successió del costat dret de (3) té, quan $n = 3, 5, 7, \ldots$, el mateix límit que la successió $1-(1/3)+(1/5)-\cdots\pm(1/n)$. Per tant:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

tal com volíem demostrar.

Val la pena d'analitzar breument la demostració anterior. Té dues parts: una part, que podem anomenar finita, es basa en un teorema de teoria de nombres: «de quantes maneres es pot escriure un nombre natural com a suma de dos quadrats». La segona part és un pas al límit que, com és típic, inclou certes estimacions. Així, l'anàlisi del nombre irracional $\pi$ (un nombre «infinit» en un cert sentit) es recolza en un resultat de teoria de nombres i en un pas al límit. Cal observar que en la sèrie de Leibnitz hi resta un «rastre» del teorema sobre nombres: els denominadors supersenars tenen signe + i els subsenars tenen signe −. D'aquesta manera, si bé la simple contemplació de la sèrie no ens diu res, el procés de demostració hi apareix reflectit de manera ben patent, la qual cosa produeix la sensació psicològica que posseïm el sentit de la sèrie. Aquesta observació és molt útil per a aquells que, a més de la recerca, ens dediquem a l'ensenyament. En tots dos camps no n'hi ha prou amb el mer desenvolupament lògic de la demostració; cal reflectir en l'enunciat del teorema, ni que sigui només a la nostra ment, les ocultes relacions que han fet possible la seva demostració. És clar que aquesta sèrie es pot obtenir amb altres mètodes. Crec que sempre ens hem d'inclinar cap a aquells que il·luminen el significat del teorema; i, si cal, donar demostracions diverses d'un mateix teorema si ens il·luminen el resultat des d'angles diferents. Aquí és on rau la «guspira» intel·lectual que permet el descobriment matemàtic.

Vegem si el mètode clàssic de demostració és o no és més lluminós. Fem ús del càlcul diferencial. La sèrie de Leibnitz és el polinomi infinit (sèrie de potències)

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

avaluat a $z = 1$. Derivant $f(z)$ s'obté un polinomi conegut:

$$f'(z) = z - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots = \frac{1}{1+z^2}$$

(on la darrera igualtat només val per a $|z| < 1$). Però $1/(1+z^2)$ és la derivada de la funció inversa de la tangent. Per tant, $f(z)$ i $\arctan(z)$ difereixen en una constant, que és zero perquè $f(0) = \arctan(0) = 0$, per tant, $\arctan(z) = f(z)$ si $|z| < 1$. La situació és delicada perquè nosaltres volem que aquesta darrera igualtat valgui per a $z = 1$, és a dir, $f(1) = \arctan(1) = \pi/4$, i la igualtat només la tenim per a $|z| < 1$. Recapitulant: la funció $f(z)$ està ben definida i és contínua en l'interval $[0,1)$ puix que aquí coincideix amb $\arctan(z)$. Però sabem alguna petita cosa més: $f(1)$ està ben definida; en efecte: $f(1)$, la sèrie de Leibnitz $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$, és una sèrie alternada els termes de la qual decreixen numèricament i s'aproximen al límit zero. Per tant, la sèrie $f(1)$ convergeix. Només resta veure que la funció $f$, definida a $[0,1]$, és *contínua* perquè, en aquest cas, tindrem

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{z\to 1} \arctan(z) = \lim_{z\to 1} f(z) = f(1).$$

La continuïtat de $f$ a $[0,1]$ s'estableix demostrant la continuïtat uniforme de la sèrie $f(z)$ a $[0,1]$; com que cada terme d'aquesta sèrie és continu a $[0,1]$, també ho és $f(z)$ a $[0,1]$. Els detalls són en qualsevol llibre de funcions de variable complexa. És més lluminosa aquesta demostració? En certa manera, sí que ho és, perquè colloca la sèrie de Leibnitz en un context més ampli però, d'una altra banda, no il·lumina gaire la forma concreta de la sèrie. Essencialment, el que està succeint aquí és que el procés finit que dóna lloc a la sèrie infinita ha estat absorbit per un procés finit *universal* sobre el qual es construeix tot el càlcul diferencial. Nosaltres hem utilitzat un procés finit particular per al nostre problema, que ens ha fet ressaltar les seves particularitats. Aquesta possibilitat d'un procés finit universal és el que va fer possible el càlcul diferencial totalment general descobert per Leibnitz i Newton, superant els mètodes particulars (basats en processos finits particulars adaptats a cada tipus de problema) des d'Arquimedes a Fermat. Però crec que convé entendre que en la mesura que un procés s'automatitza, es guanya en potència, però es poden també perdre molts resultats interessants. En l'ensenyament de les matemàtiques convé tenir ben apresa aquesta experiència. En l'exemple següent veurem alguna cosa d'aquest mateix estil, en què és la teoria de l'homologia la que fa fonedís el procés finit.

Passem, però, a la comparació entre el nombre $\pi$ i el nombre $e$ que hem promès dur a terme. Ja sabem que en el sistema de base 10 els nombres racionals tenen un desenvolupament decimal periòdic (pur o mixt) i els irracionals en tenen un de no periòdic. Ja hem indicat que el desenvolupament decimal de $\pi$ o de qualsevol nombre és, en realitat, una sèrie convergent. Aquí vull fer èmfasi en el fet que les xifres del desenvolupament depenen de la base de numeració escollida: no són intrínseques al nombre. En altres paraules, si treballem en base 7 el desenvolupament «septimal» de $\pi$ seria totalment diferent al decimal (vegin les taules 1, 2, 3 i 4). D'altra banda, els termes de la sèrie de Leibnitz per a $\pi$ donen un desenvolupament intrínsec de $\pi$. La qüestió natural és: hi ha alguna mena de desenvolupament intrínsec que sigui vàlid per a tots els nombres reals? *Intrínsec* vol dir que la llista dels nombres que defineixen el desenvolupament d'un nombre no depenen de la base de numeració escollida. La resposta és afirmativa i el desenvolupament s'anomena *desenvolupament en fracció contínua d'un nombre.*

Per comprendre el desenvolupament en fracció contínua d'un nombre se m'ha acudit un parell de mètodes geomètrics, que passo a descriure. Comencem pel primer. Imaginem un gratacels d'alçada infinita i summament prim, tant que, de fet, és una semirecta amb l'extrem descansant a terra. El gratacels té infinits pisos. La planta baixa és el pis 0. També hi ha un ascensor d'alçada igual a la de qualsevol dels pisos. La planta baixa del gratacels és el centre d'una semiesfera de vidre que arriba just fins al pis 1. En aquesta situació, imaginem que volem obtenir el desenvolupament en fracció contínua del nombre $\pi$. El nombre $\pi$ l'imaginem com un punt $b_1$ que està levitant a l'aire del pis 3: apuntem 3 com a primer nombre $a_1$ del desenvolupament en fracció contínua de $\pi$. Ara baixem amb ascensor fins a la planta baixa: allà $\pi$ haurà baixat i serà un nombre $d_1 = b_1 - a_1$: la part decimal de $\pi = b_1$ levitant sota la volta de vidre a una certa alçada (0,1415...) del terra. Ara apliquem a $d_1$ una sessió de raigs làser de la manera següent. Prenem al cercle que forma la base de la volta dos punts diametralment oposats, per exemple $P$ i $Q$. Des de $P$ llancem un raig làser cap a $d_1$, que perforarà la volta a $d_1'$, i des de $Q$, a continuació, llancem un altre raig làser que passi a través de la perforació $d_1'$ i arribi a marcar (més amunt de la volta) un punt $b_2$ en algun pis del gratacels. El segon nombre $a_2$ del desenvolupament en fracció contínua de $\pi$ és el pis on es troba $b_2$. El que succeeix és que $b_2$ és al pis $7 = a_2$. Procedint d'aquesta manera s'obté el desenvolupament en fracció contínua de $\pi$ (vegin la taula 5):

$$\{3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, \dots\}.$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.718 | 28182 | 84590 | 45235 | 36028 | 74713 | 52662 | 49775 | 72470 | 93699 | 95957 | 49669 | 67627 | 72407 |
| 66303 | 53547 | 59457 | 13821 | 78525 | 16642 | 74274 | 66391 | 93200 | 30599 | 21817 | 41359 | 66290 | 43572 |
| 90033 | 42952 | 60595 | 63073 | 81323 | 28627 | 94349 | 07632 | 33829 | 88075 | 31952 | 51019 | 01157 | 38341 |
| 87930 | 70215 | 40891 | 49934 | 88416 | 75092 | 44761 | 46066 | 80822 | 64800 | 16847 | 74118 | 53742 | 34544 |
| 24371 | 07539 | 07774 | 49920 | 69551 | 70276 | 18386 | 06261 | 33138 | 45830 | 00752 | 04493 | 38265 | 60297 |
| 60673 | 71132 | 00709 | 32870 | 91274 | 43747 | 04723 | 06969 | 77209 | 31014 | 16928 | 36819 | 02551 | 51086 |
| 57463 | 77211 | 12523 | 89784 | 42505 | 69536 | 96770 | 78544 | 99699 | 67946 | 86445 | 49059 | 87931 | 63688 |
| 92300 | 98793 | 12773 | 61782 | 15424 | 99922 | 95763 | 51482 | 20826 | 98951 | 93668 | 03318 | 25288 | 69398 |
| 49646 | 51058 | 20939 | 23982 | 94887 | 93320 | 36250 | 94431 | 17301 | 23819 | 70684 | 16140 | 39701 | 98376 |
| 79320 | 68328 | 23764 | 64804 | 29531 | 18023 | 28782 | 50981 | 94558 | 15301 | 75671 | 73613 | 32069 | 81125 |
| 09961 | 81881 | 59304 | 16903 | 51598 | 88851 | 93458 | 07273 | 86673 | 85894 | 22879 | 22849 | 98920 | 86805 |
| 82574 | 92796 | 10484 | 19844 | 43634 | 63244 | 96848 | 75602 | 33624 | 82704 | 19786 | 23209 | 00216 | 09902 |
| 35304 | 36994 | 18491 | 46314 | 09343 | 17381 | 43640 | 54625 | 31520 | 96183 | 69088 | 87070 | 16768 | 39642 |
| 43781 | 40592 | 71456 | 35490 | 61303 | 10720 | 85103 | 83750 | 51011 | 57477 | 04171 | 89861 | 06873 | 96965 |
| 52126 | 71546 | 88957 | 03503 | 54021 | 23407 | 84981 | 93343 | 21068 | 17012 | 10056 | 27880 | 23519 | 30332 |
| 24745 | 01585 | 39047 | 30419 | 95777 | 70935 | 03660 | 41699 | 73297 | 25088 | 68769 | 66403 | 55570 | 71622 |
| 68447 | 16256 | 07988 | 26517 | 87134 | 19512 | 46652 | 01030 | 59212 | 36677 | 19432 | 52786 | 75398 | 55894 |
| 48969 | 70964 | 09754 | 59185 | 69563 | 80236 | 37016 | 21120 | 47742 | 72283 | 64896 | 13422 | 51644 | 50781 |
| 82442 | 35294 | 86363 | 72141 | 74023 | 88934 | 41247 | 96357 | 43702 | 63755 | 29444 | 83379 | 98016 | 12549 |
| 22785 | 09257 | 78256 | 20926 | 22648 | 32627 | 79333 | 86566 | 48162 | 77251 | 64019 | 10590 | 04916 | 44998 |
| 28931 | 50566 | 04725 | 80277 | 86318 | 64155 | 19565 | 32442 | 58698 | 29469 | 59308 | 01915 | 29872 | 11725 |
| 56347 | 54639 | 64479 | 10145 | 90409 | 05862 | 98496 | 79128 | 74068 | 70504 | 89585 | 86717 | 47985 | 46677 |
| 57573 | 20568 | 12884 | 59205 | 41334 | 05392 | 20001 | 13786 | 30094 | 55606 | 88166 | 74001 | 69842 | 05580 |
| 40336 | 37953 | 76452 | 03040 | 24322 | 56613 | 52783 | 69511 | 77883 | 86387 | 44396 | 62532 | 24985 | 06549 |
| 95886 | 23428 | 18997 | 07733 | 27617 | 17839 | 28034 | 94650 | 14345 | 58897 | 07194 | 25863 | 98772 | 75471 |
| 09629 | 53741 | 52111 | 51368 | 35062 | 75260 | 23264 | 84728 | 70392 | 07643 | 10059 | 58411 | 66120 | 54529 |
| 70302 | 36472 | 54929 | 66693 | 81151 | 37322 | 75364 | 50988 | 89031 | 36020 | 57248 | 17658 | 51180 | 63036 |
| 44281 | 23149 | 65507 | 04751 | 02544 | 65011 | 72721 | 15551 | 94866 | 85080 | 03685 | 32281 | 83152 | 19600 |
| 37356 | 25279 | 44951 | 58284 | 18829 | 47876 | 10852 | 63981 | 39559 | 90067 | 37648 | 29224 | 43752 | 87184 |
| 62457 | 80361 | 92981 | 97139 | 91475 | 64488 | 26260 | 39033 | 81441 | 82326 | 25150 | 97482 | 79877 | 79964 |
| 37308 | 99703 | 88867 | 78227 | 13836 | 05772 | 97882 | 41256 | 11907 | 17663 | 94650 | 70633 | 04527 | 95466 |
| 18550 | 96666 | 18566 | 47097 | 11344 | 47401 | 60704 | 62621 | 56807 | 17481 | 87784 | 43714 | 36988 | 21855 |
| 96709 | 59102 | 59686 | 20023 | 53718 | 58874 | 85696 | 52200 | 05031 | 17343 | 92073 | 21139 | 08032 | 93634 |
| 47972 | 73559 | 55277 | 34907 | 17837 | 93421 | 63701 | 20500 | 54513 | 26383 | 54400 | 01863 | 23991 | 49070 |
| 54797 | 78056 | 69785 | 33580 | 48966 | 90629 | 51194 | 32473 | 09958 | 76552 | 36812 | 85904 | 13832 | 41160 |
| 72260 | 29983 | 30535 | 37087 | 61389 | 39639 | 17795 | 74540 | 16137 | 22361 | 87893 | 65260 | 53815 | 58415 |
| 87186 | 92553 | 86061 | 64779 | 83402 | 54351 | 28439 | 61294 | 60352 | 91332 | 59427 | 94904 | 33729 | 90857 |
| 31580 | 29095 | 86313 | 82683 | 29147 | 71163 | 96337 | 09240 | 03168 | 94586 | 36060 | 64584 | 59251 | 26994 |
| 65572 | 48391 | 86564 | 20975 | 26850 | 82307 | 54425 | 45993 | 76917 | 04197 | 77800 | 85362 | 73094 | 17101 |
| 63434 | 90769 | 64237 | 22294 | 35236 | 61255 | 72508 | 81477 | 92231 | 51974 | 77806 | 05696 | 72538 | 01718 |
| 07763 | 60346 | 24592 | 78778 | 46585 | 06560 | 50780 | 84421 | 15296 | 97521 | 89087 | 40196 | 60906 | 65180 |
| 35165 | 01792 | 50461 | 95013 | 66585 | 43663 | 27125 | 49639 | 90854 | 91442 | 00014 | 57476 | 08193 | 02212 |
| 06602 | 43300 | 96412 | 70489 | 43903 | 97177 | 19518 | 06990 | 86998 | 60663 | 65832 | 32278 | 70937 | 65022 |
| 60149 | 29101 | 15171 | 77635 | 94460 | 20232 | 49300 | 28040 | 18677 | 23910 | 28809 | 78666 | 05651 | 18326 |
| 00436 | 88508 | 81715 | 72386 | 69842 | 24220 | 10249 | 50551 | 88169 | 48032 | 21002 | 51542 | 64946 | 39812 |
| 87367 | 76589 | 27688 | 16359 | 83124 | 77886 | 52014 | 11741 | 10913 | 60116 | 49950 | 76629 | 07794 | 36460 |
| 05851 | 94199 | 85601 | 62647 | 90761 | 53210 | 38727 | 55712 | 69925 | 18275 | 68798 | 93027 | 61761 | 14616 |
| 25493 | 56495 | 90379 | 80458 | 38182 | 32336 | 86120 | 16243 | 73656 | 98467 | 03785 | 85330 | 52758 | 33337 |
| 93990 | 75216 | 60692 | 38053 | 36988 | 79565 | 13728 | 55938 | 83499 | 89470 | 74161 | 81550 | 12539 | 70646 |
| 48171 | 94670 | 83481 | 97214 | 48889 | 87906 | 76503 | 79590 | 36696 | 72494 | 99254 | 52790 | 33729 | 63616 |
| 26589 | 76039 | 49857 | 67413 | 97359 | 44102 | 37443 | 29709 | 35547 | 79826 | 29614 | 59144 | 29364 | 51428 |
| 61715 | 85873 | 39746 | 79189 | 75712 | 11956 | 18738 | 57836 | 44758 | 44842 | 35555 | 81050 | 02561 | 14923 |
| 91518 | 89309 | 94634 | 28413 | 93608 | 03830 | 91662 | 81881 | 15037 | 15284 | 96705 | 97416 | 25628 | 23609 |
| 21680 | 75150 | 17772 | 53874 | 02564 | 25347 | 08790 | 89137 | 29172 | 28286 | 11515 | 91568 | 37252 | 41630 |
| 77225 | 44063 | 37875 | 93105 | 98267 | 60944 | 20326 | 19242 | 85317 | 01878 | 17729 | 60235 | 41306 | 06721 |
| 36046 | 00038 | 96610 | 93647 | 09514 | 14171 | 85777 | 01418 | 06064 | 43636 | 81546 | 44400 | 53316 | 08778 |
| 31431 | 74440 | 81194 | 94229 | 75599 | 31401 | 18886 | 83314 | 83280 | 27065 | 53833 | 00469 | 32901 | 15744 |
| 14756 | 31399 | 97221 | 70380 | 46170 | 92894 | 57909 | 62716 | 62260 | 74071 | 87499 | 75359 | 21275 | 60844 |
| 14737 | 82330 | 32703 | 30168 | 23719 | 36480 | 02173 | 28573 | 49359 | 47564 | 33412 | 99430 | 24850 | 23573 |
| 22145 | 97843 | 28264 | 14216 | 84878 | 72167 | 33670 | 10615 | 09424 | 34569 | 84401 | 87331 | 28101 | 07945 |
| 12722 | 37378 | 86126 | 05816 | 56680 | 53714 | 39612 | 78887 | 32527 | 37389 | 03928 | 90506 | 86532 | 41380 |
| 62796 | 02593 | 03877 | 27697 | 78379 | 28684 | 09325 | 36588 | 07339 | 88457 | 21874 | 60210 | 05311 | 48335 |
| 13238 | 50047 | 82716 | 93762 | 18004 | 90479 | 55979 | 59290 | 59165 | 54705 | 05777 | 51430 | 81751 | 12698 |
| 98518 | 84087 | 18564 | 02603 | 53055 | 83737 | 83242 | 29241 | 85625 | 64425 | 50226 | 72155 | 98027 | 40126 |
| 17971 | 92804 | 71396 | 00689 | 16382 | 86652 | 77009 | 75276 | 70697 | 77036 | 43926 | 02243 | 72841 | 84088 |
| 32518 | 48770 | 47263 | 84403 | 79530 | 16690 | 54659 | 37461 | 61932 | 38403 | 63893 | 13136 | 43271 | 37688 |
| 84102 | 68112 | 19891 | 27522 | 30562 | 56756 | 25470 | 17250 | 86349 | 76536 | 72886 | 05966 | 75274 | 08686 |
| 27407 | 91285 | 65769 | 96313 | 78975 | 30346 | 60616 | 66980 | 42182 | 67724 | 56053 | 06607 | 73899 | 62421 |
| 83408 | 59882 | 07186 | 46826 | 23215 | 08028 | 82863 | 59746 | 83965 | 43588 | 56685 | 50377 | 31312 | 96587 |
| 97581 | 05012 | 14916 | 20765 | 67699 | 50659 | 71534 | 47634 | 70320 | 85321 | 56036 | 74828 | 60837 | 86568 |
| 03073 | 06265 | 76334 | 69774 | 29563 | 46437 | 16709 | 39719 | 30608 | 76963 | 49532 | 88468 | 33613 | 03882 |
| 94310 | 40800 | 29687 | 38691 | 17066 | 66614 | 68000 | 15121 | 14344 | 22560 | 23874 | 47432 | 52507 | 69387 |

TAULA 3: 5 038 dígits decimals de $e$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.501 | 24106 | 54226 | 50433 | 53530 | 00300 | 62644 | 26305 | 14442 | 00131 | 53365 | 66446 | 44013 | 35464 |
| 65221 | 66542 | 06150 | 00650 | 06514 | 30401 | 13651 | 01042 | 13125 | 66666 | 22205 | 15360 | 10400 | 31440 |
| 43413 | 16205 | 10426 | 04211 | 20146 | 06126 | 00516 | 31164 | 44052 | 03243 | 64302 | 03561 | 11600 | 62646 |
| 63131 | 16101 | 12236 | 34505 | 51256 | 62332 | 13230 | 20642 | 33164 | 14105 | 65226 | 63512 | 03162 | 55330 |
| 64301 | 23223 | 20503 | 36401 | 35326 | 46056 | 13321 | 25242 | 60600 | 32515 | 11100 | 52164 | 53613 | 63503 |
| 25202 | 23305 | 04232 | 32442 | 32255 | 11313 | 13450 | 21115 | 65632 | 15502 | 25554 | 06021 | 46642 | 45506 |
| 10661 | 44305 | 21241 | 36030 | 52321 | 15114 | 31340 | 36143 | 32420 | 00522 | 36515 | 66212 | 16502 | 42213 |
| 03143 | 23665 | 10052 | 03604 | 30436 | 00506 | 01065 | 55110 | 55251 | 65030 | 00510 | 46511 | 13244 | 01144 |
| 16111 | 21616 | 31032 | 23321 | 61143 | 60316 | 13110 | 55620 | 12454 | 02515 | 42035 | 05461 | 25433 | 44412 |
| 53203 | 01356 | 65420 | 34455 | 56552 | 62212 | 06414 | 06430 | 20541 | 00663 | 13261 | 62266 | 66305 | 43445 |
| 04644 | 33140 | 11503 | 11406 | 50464 | 03361 | 45426 | 62204 | 32620 | 01512 | 11042 | 03061 | 26411 | 23412 |
| 43205 | 06531 | 05155 | 20062 | 43443 | 13233 | 66341 | 20034 | 25555 | 13642 | 16526 | 62025 | 22313 | 35520 |
| 23150 | 26545 | 31502 | 43425 | 53466 | 46040 | 36166 | 26233 | 43354 | 23256 | 60044 | 34600 | 40216 | 42365 |
| 14454 | 22112 | 22365 | 24146 | 14443 | 36264 | 40305 | 23420 | 62101 | 03626 | 35314 | 10240 | 56255 | 11140 |
| 52222 | 13460 | 44341 | 22663 | 25164 | 06611 | 15262 | 42522 | 65532 | 26321 | 11645 | 11062 | 31623 | 44035 |
| 40235 | 00323 | 66023 | 36161 | 61665 | 54415 | 40540 | 10302 | 63330 | 35145 | 62244 | 42046 | 45135 | 31502 |
| 56215 | 60322 | 12421 | 21300 | 33456 | 66643 | 26036 | 06442 | 33202 | 46031 | 14035 | 15633 | 36444 | 64300 |
| 25122 | 35411 | 20466 | 64034 | 13656 | 64542 | 23526 | 21645 | 53165 | 40446 | 35020 | 02362 | 61563 | 15412 |
| 36014 | 43542 | 41046 | 35326 | 36532 | 36532 | 45305 | 55321 | 62140 | 64644 | 34163 | 03325 | 53413 | 02243 |
| 14501 | 16233 | 52653 | 60534 | 41423 | 31211 | 44403 | 44645 | 66343 | 64251 | 45442 | 35625 | 34612 | 43104 |
| 14415 | 55664 | 13100 | 55502 | 61402 | 02456 | 61102 | 02041 | 06424 | 45446 | 56454 | 33450 | 32426 | 24241 |
| 12624 | 14645 | 24644 | 15566 | 25206 | 56455 | 34125 | 14463 | 53305 | 56316 | 63322 | 13666 | 61033 | 13341 |
| 32326 | 65201 | 63663 | 10556 | 62231 | 14344 | 11614 | 11012 | 23310 | 04400 | 46135 | 23606 | 52661 | 10355 |
| 42126 | 66331 | 25420 | 10613 | 05541 | 61310 | 52540 | 63505 | 02136 | 40500 | 63055 | 02164 | 61253 | 66663 |
| 30335 | 33546 | 13265 | 41653 | 53562 | 45641 | 14052 | 45634 | 25363 | 20132 | 52551 | 12565 | 05102 | 20404 |
| 22503 | 11036 | 50040 | 30355 | 60614 | 40136 | 61301 | 53264 | 03133 | 54644 | 65210 | 65252 | 55314 | 14006 |
| 33562 | 63266 | 66130 | 50642 | 33004 | 25541 | 63166 | 14522 | 02364 | 44561 | 04431 | 22142 | 36620 | 44032 |
| 66222 | 65125 | 24312 | 30343 | 41466 | 12166 | 52633 | 64652 | 65626 | 06032 | 16054 | 21123 | 26325 | 21614 |
| 61562 | 20305 | 06241 | 52062 | 51401 | 66123 | 51436 | 03364 | 13206 | 63450 | 33600 | 55046 | 12254 | 66536 |
| 54552 | 33250 | 23652 | 63655 | 14131 | 42546 | 30532 | 24545 | 65645 | 12025 | 66613 | 51410 | 50214 | 10435 |
| 23203 | 62552 | 10560 | 65435 | 51303 | 25264 | 40110 | 23040 | 54115 | 64544 | 61104 | 66213 | 11020 | 66402 |
| 00254 | 45340 | 41245 | 15656 | 23555 | 51135 | 20656 | 60013 | 13465 | 41223 | 06633 | 00230 | 35411 | 42640 |
| 14655 | 34555 | 43605 | 26653 | 13636 | 26546 | 21200 | 10453 | 13511 | 22365 | 32141 | 40160 | 36112 | 50141 |
| 41030 | 10446 | 15534 | 60225 | 45116 | 30004 | 00550 | 25213 | 46435 | 25356 | 11342 | 42234 | 16234 | 11025 |
| 34103 | 66202 | 30650 | 12106 | 40131 | 66411 | 62531 | 60003 | 43326 | 36335 | 26614 | 11136 | 04302 | 16555 |
| 06336 | 61200 | 02501 | 46433 | 20445 | 52506 | 12524 | 40355 | 43043 | 24613 | 46641 | 32140 | 06220 | 12353 |
| 64250 | 64112 | 60462 | 52654 | 66030 | 51261 | 22056 | 42515 | 61646 | 40214 | 44453 | 46151 | 65063 | 42206 |
| 40431 | 15426 | 11632 | 36320 | 52542 | 05402 | 23315 | 32324 | 62063 | 63453 | 31311 | 50661 | 42554 | 56550 |
| 21424 | 61462 | 64413 | 16412 | 13663 | 16201 | 14335 | 52600 | 41110 | 04622 | 36326 | 26136 | 62024 | 10161 |
| 40642 | 21602 | 02655 | 65562 | 42030 | 06233 | 13530 | 40410 | 02142 | 24060 | 62355 | 22652 | 34243 | 60624 |
| 16543 | 52640 | 55234 | 62063 | 21524 | 22533 | 02164 | 64042 | 20211 | 43304 | 41052 | 53520 | 35203 | 12065 |
| 24553 | 52055 | 55403 | 00165 | 46145 | 01544 | 10150 | 40052 | 15146 | 33125 | 23116 | 31331 | 46361 | 05010 |
| 36302 | 62562 | 04136 | 36144 | 03343 | 51311 | 36466 | 50556 | 34213 | 66132 | 42301 | 23022 | 14006 | 01465 |
| 50216 | 46242 | 26123 | 14263 | 01250 | 00263 | 10601 | 41362 | 31600 | 21504 | 45404 | 60521 | 32612 | 14416 |
| 13146 | 45426 | 61134 | 05321 | 12442 | 41660 | 05364 | 44526 | 01015 | 56436 | 22312 | 02033 | 50306 | 06060 |
| 21653 | 55255 | 65036 | 20245 | 64551 | 03164 | 46131 | 20024 | 34066 | 13336 | 43515 | 02610 | 24645 | 15023 |
| 01632 | 04264 | 50113 | 62336 | 22603 | 42351 | 05211 | 12052 | 45320 | 16313 | 04402 | 50542 | 31401 | 04466 |
| 21160 | 46635 | 63412 | 36566 | 55406 | 56464 | 13614 | 60263 | 25314 | 55460 | 66612 | 00563 | 31551 | 21361 |
| 62646 | 35333 | 23240 | 66445 | 15464 | 11322 | 06143 | 41063 | 11200 | 46014 | 01404 | 02024 | 66665 | 61202 |
| 22250 | 26354 | 14161 | 56330 | 52220 | 03105 | 02646 | 36203 | 02003 | 50253 | 32465 | 15410 | 23426 | 10316 |
| 24013 | 04260 | 15623 | 13065 | 12102 | 20431 | 03036 | 66060 | 00035 | 42463 | 52651 | 41140 | 40304 | 52504 |
| 02440 | 55466 | 32612 | 22503 | 51525 | 42105 | 13660 | 66316 | 34542 | 62610 | 31545 | 60411 | 53041 | 14423 |
| 21661 | 42300 | 10210 | 35553 | 24113 | 30303 | 23403 | 42403 | 05624 | 36154 | 06441 | 00233 | 25430 | 50210 |
| 23301 | 15014 | 64065 | 20566 | 12262 | 06330 | 03262 | 50665 | 56503 | 46664 | 43051 | 13515 | 55621 | 44112 |
| 43660 | 56404 | 44434 | 24025 | 06663 | 22242 | 10214 | 44140 | 42340 | 51631 | 66013 | 04104 | 50114 | 11621 |
| 52244 | 22654 | 00060 | 31323 | 25233 | 60361 | 56225 | 13461 | 06402 | 04012 | 03614 | 40465 | 11144 | 41266 |
| 64136 | 36516 | 10025 | 66241 | 45363 | 46415 | 36041 | 50656 | 52230 | 66520 | 46261 | 34644 | 36442 | 16553 |
| 63366 | 60031 | 14234 | 21426 | 03032 | 05430 | 62250 | 11234 | 16340 | 54111 | 14066 | 45446 | 32005 | 55456 |
| 45556 | 02663 | 52501 | 50112 | 23222 | 20505 | 04351 | 32112 | 62106 | 55254 | 15254 | 22512 | 45432 | 64265 |
| 51660 | 60605 | 42112 | 00150 | 40461 | 26062 | 25414 | 12633 | 24555 | 44655 | 00130 | 44621 | 31223 | 50352 |
| 56303 | 30301 | 42463 | 04204 | 44200 | 02510 | 55465 | 03203 | 45510 | 24661 | 50154 | 11032 | 32336 | 31303 |
| 02213 | 14455 | 60166 | 06530 | 22041 | 02303 | 40235 | 64536 | 60522 | 10062 | 14322 | 35563 | 53464 | 64461 |
| 45502 | 10066 | 26525 | 34350 | 60332 | 05216 | 02521 | 35412 | 42624 | 53166 | 53611 | 52034 | 35260 | 13535 |
| 43430 | 24306 | 25164 | 25216 | 36006 | 40015 | 14533 | 10613 | 55432 | 15620 | 03630 | 56452 | 63305 | 34043 |
| 44332 | 03211 | 50466 | 51242 | 16431 | 22662 | 65464 | 16321 | 41511 | 31565 | 53536 | 00243 | 14152 | 45224 |
| 02065 | 22113 | 50461 | 44660 | 06615 | 35353 | 53303 | 52414 | 04532 | 04136 | 22605 | 26243 | 02325 | 64434 |
| 03423 | 45361 | 41540 | 06510 | 16521 | 65233 | 05513 | 44416 | 46340 | 61353 | 15041 | 62104 | 53132 | 65144 |
| 50050 | 02441 | 30156 | 51122 | 56424 | 36305 | 25435 | 42104 | 35553 | 55620 | 63025 | 22056 | 12651 | 00154 |
| 35216 | 63403 | 23246 | 26650 | 32632 | 55133 | 66112 | 11464 | 25050 | 10154 | 32253 | 24113 | 13623 | 31626 |
| 40343 | 44524 | 11040 | 66001 | 56130 | 61031 | 55316 | 13503 | 02123 | 51454 | 56630 | 61600 | 03004 | 01442 |
| 52601 | 21440 | 10121 | 53513 | 15013 | 34061 | 62404 | 61245 | 61364 | 35265 | 35361 | 43042 | 63032 | 60346 |
| 60254 | 06603 | 21563 | 51505 | 34142 | 61351 | 63340 | 25143 | 41030 | 14650 | 10325 | 12403 | 62134 | 56044 |

TAULA 4: 5 038 dígits septimals de *e*.

(3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5,
1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45,
1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, 5, 4, 1, 2, 2, 8, 1, 5, 2, 2, 26, 1, 4, 1, 1, 8, 2, 42, 2, 1, 7,
3, 3, 1, 1, 7, 2, 4, 9, 7, 2, 3, 1, 57, 1, 18, 1, 9, 19, 1, 2, 18, 1, 3, 7, 30, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 8, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 2,
13, 1, 2, 1, 4, 1, 12, 1, 1, 3, 3, 28, 1, 10, 3, 2, 20, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 120, 2, 1, 1, 3, 1, 23,
1, 15, 1, 3, 7, 1, 16, 1, 2, 1, 21, 2, 1, 1, 2, 9, 1, 6, 4, 127, 14, 5, 1, 3, 13, 7, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 29,
3, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 10, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 12, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 1, 11, 3, 1, 7, 1, 4, 1, 48, 16, 1,
4, 5, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2, 5, 20, 1, 1, 5, 4, 1, 436, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 6, 11, 4, 3, 1,
1, 1, 2, 5, 4, 6, 9, 1, 5, 1, 5, 15, 1, 11, 24, 4, 4, 5, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 58, 5, 1, 2, 1, 2, 1, 1,
2, 2, 7, 1, 15, 1, 4, 8, 1, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 9, 1, 4, 3, 15, 1, 2, 1, 13, 1, 1, 1, 3, 24, 1, 2, 4,
10, 5, 12, 3, 3, 21, 1, 2, 1, 34, 1, 1, 1, 4, 15, 1, 4, 44, 1, 4, 20776, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 23, 1, 7, 2, 1, 94, 55, 1, 1,
2, 1, 1, 3, 1, 1, 32, 5, 1, 14, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 50, 2, 16, 5, 1, 2, 1, 4, 6, 3, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 2, 5, 2, 2, 2, 28, 1, 1, 13,
1, 5, 43, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 19, 2, 7, 1, 72, 3, 1, 2, 3, 7, 11, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 33,
7, 19, 1, 19, 3, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 1, 4, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 11, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 7, 2,
27, 1, 1, 6, 2, 1, 9, 6, 26, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 15, 1, 36, 4, 2, 2, 1, 22, 2, 1, 106, 2, 2, 1, 3, 1, 12, 10, 7, 1, 2,
1, 1, 1, 1, 8, 2, 4, 5, 3, 2, 1, 4, 23, 1, 18, 2, 10, 3, 1, 6, 6, 13, 8, 6, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 7, 17, 1, 1, 1, 2, 5, 5,
1, 1, 2, 11, 1, 6, 1, 6, 1, 29, 4, 29, 3, 5, 3, 1, 141, 1, 2, 7, 7, 2, 2, 7, 1, 1, 7, 1, 7, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 30, 1, 12, 4, 18,
10, 2, 8, 1, 2, 2, 2, 4, 13, 1, 5, 4, 1, 6, 1, 1, 11, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 3, 12, 1, 1, 39, 5, 1, 1, 16, 125, 1, 4, 1, 2, 1, 19,
1, 4, 1, 1, 2, 1, 4, 1, 10, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 5, 10, 4, 14, 1, 13, 41, 1, 4, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 6, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 4, 1,
14, 1, 2, 8, 1, 8, 3, 3, 3, 1, 37, 4, 2, 4, 1, 3, 4, 25, 4, 27, 2, 7, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 12, 1, 2, 2, 2, 13, 12, 1, 3, 1, 6,
1, 1, 33, 1, 5, 3, 1, 5, 15, 8, 8, 47, 1, 3, 2, 12, 2, 12, 1, 12, 1, 2, 5, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 4, 2, 1, 1, 5, 1, 9, 14, 1,
1, 3, 2, 1, 9, 3, 22, 13, 1, 1, 3, 20, 1, 1, 61, 1, 376, 2, 107, 1, 10, 3, 2, 2, 31, 1, 2, 10, 2, 2, 62, 2, 2, 7, 4, 5, 6, 1,
1, 1, 1, 2, 8, 2, 73, 3, 5, 42, 1, 3, 2, 1, 1, 59, 6, 1, 1, 1, 5, 1, 6, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 8, 1, 4, 2, 5, 4, 7,
1, 4, 2, 2, 6, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 10, 1, 6, 1, 129, 1, 4, 65, 2, 4, 4, 3, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 1,
1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 27, 6, 2, 1, 193, 1, 3, 9, 1, 3, 35, 2, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 9, 3,
56, 1, 6, 6, 2, 8, 1, 8, 1, 2, 3, 6, 3, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 13, 1, 1, 1, 1, 13, 2, 1, 3, 1, 3, 15, 2, 1, 1, 2, 4, 1, 4, 5, 2, 2, 1,
2, 1, 6, 1, 4, 12, 1, 1, 1, 1, 13, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 2, 9, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 4, 1, 1, 4, 3, 1, 39, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 4,
7, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 114, 12, 4, 1, 3, 2, 1, 19, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 60, 3, 72, 2, 1, 1, 1, 50, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1,
2, 2, 1, 4, 1, 7, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 1, 1, 2, 6, 2, 21, 2, 6, 1, 6, 1, 1, 2, 1, 7, 1, 8, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 1,
11, 2, 4, 10, 2, 1, 1, 13, 1, 1, 7, 15, 1, 1, 1, 2, 3, 15, 8, 8, 2, 1, 13, 3, 5, 1, 2, 1, 6, 1, 10, 123, 3, 1, 4, 59, 4, 156,
88, 1, 5, 4, 1, 3, 1, 4, 2, 9, 1, 7, 4, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 11, 1, 13, 7, 7, 1, 63, 37, 12, 86, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 2, 18, 1,
1, 1, 41, 2, 1, 1, 12, 1, 2, 1, 1, 2, 10, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 3, 1, 7, 5, 1, 9, 1, 2, 2, 7, 1, 1, 5, 2, 1, 3, 3, 5, 2, 1, 11, 3, 1,
3, 2, 1, 1, 2, 1, 14, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 2, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 1, 14, 1, 1, 58, 7, 1, 2, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 5,
18, 1, 4, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 5, 1, 148, 1, 9, 2, 1, 2, 1, 5, 4, 93, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 73, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 34, 1,
5, 6, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 16, 28, 17, 2, 5, 5, 26, 1, 1, 4, 12, 1, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 9, 3, 2, 41, 1, 16, 2, 2, 20, 1, 17, 1, 6,
16, 3, 3, 2, 2, 2, 18, 15, 1, 1, 51, 4, 9, 5, 2, 2, 1, 2, 1, 45, 3, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 5, 1, 2, 3, 8, 2, 47, 2, 3, 1,
1, 1, 15, 9, 1, 8, 2, 1, 4, 2, 4, 14, 1, 12, 2, 1, 161, 1, 26, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 18, 528, 12, 4, 1, 5, 16, 3, 1,
1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 63, 1, 97, 1, 4, 4, 10, 5, 9, 5, 2, 3, 2, 5, 7, 1, 32, 13, 1, 5, 4, 1, 7, 1, 3, 12, 1, 3, 9, 1, 7, 1,
102, 53, 1, 1, 1, 3, 4, 2, 15, 2, 8, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 14, 1, 80, 11, 1, 1, 1, 1, 22,
1, 2, 3, 1, 3, 26, 2, 24, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 63, 1, 1, 1, 25, 1, 1, 1, 8, 1, 3, 3, 1, 10, 5, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1,
1, 2, 2, 1, 2, 8, 12, 1, 53, 1, 2, 1, 1, 5, 1, 1, 3, 1, 39, 1, 12, 1, 3, 14, 18, 9, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 4, 4, 7, 1, 17, 1,
14, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 10, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 12, 1, 3, 44, 2, 10, 1, 14, 1, 2, 1, 43, 4, 1, 7, 3, 4, 1, 1, 2, 2,
1, 34, 1, 2, 5, 8, 3, 2, 1, 2, 13, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 25, 1, 5, 1, 94, 2, 4, 3, 4, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 10, 41, 1, 5, 1, 4, 4, 1, 155, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 9, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 6, 23, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 7, 67,
5, 7, 1, 23, 3, 3, 1, 6, 1, 11, 1, 57, 1, 4, 1, 5, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 5, 2, 10, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 11, 2, 10, 1, 4,
18, 1, 2, 3, 1, 1, 6, 3, 6, 4, 31, 3, 4, 1, 18, 3, 9, 7, 5, 1, 2, 2, 1, 7, 1, 23, 2, 217, 1, 2, 1, 4, 1, 54, 2, 196, 10, 3, 1,
32, 1, 40, 55, 1, 5, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 6, 3, 16, 1, 31, 1, 5, 6, 1, 4, 42, 4, 1, 10, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1,
13, 1, 88, 1, 1, 1, 14, 3, 27, 3, 1, 1, 16, 4, 1, 2, 4, 1, 4, 1, 1, 17, 2, 4, 1, 1, 9, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 30, 1, 1, 3, 2, 2, 1,
1, 4, 10, 1, 7, 1, 6, 1, 35, 1, 1, 2, 3, 6, 1, 1, 2, 4, 4, 24, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 6, 6, 2, 1, 1, 10, 6, 4, 2,
1, 3, 9, 1, 2, 16, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, 5, 1, 13, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 30, 2, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 1,
1, 6, 5, 3, 65, 48, 3, 3, 6, 1, 9, 2, 1, 5, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 620, 8, 1, 1, 4, 8, 1, 6, 1, 5, 8, 1, 5, 1, 4, 9, 47, 3, 1, 6, 1,
25, 1, 3, 425, 2, 3, 3, 17, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 1, 1, 5, 2, 1, 41, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 1, 6, 256, 17, 1, 14, 1, 2, 3, 1, 2,
2, 2, 4, 9, 7, 3, 3, 18, 1, 33, 1, 5, 2, 4, 25, 1, 2, 1, 6, 1, 3, 4, 16, 4, 2, 2, 7, 3, 1, 14, 2, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 1, 59, 1,
121, 9, 1, 2, 1, 11, 1, 20, 1, 9, 2, 1, 3, 391, 1, 2, 8, 3, 4, 1, 1, 3, 13, 1, 95, 2, 2, 4, 21, 1, 21, 2, 8, 13, 3, 1, 1, 1,
5, 1, 8, 1, 15, 1, 252, 3, 4, 2, 15, 1, 1, 1, 5, 2, 6, 11, 1, 10, 41, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1,
2, 2, 2, 2, 1, 24, 8, 21, 3, 3, 9, 14, 9, 1, 9, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 9, 1, 5, 3, 7, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 3, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
15, 2, 4, 1, 1, 7, 1, 2, 1, 1, 15, 2, 1, 5, 1, 1, 13, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 2, 21, 1, 1, 1, 1, 13, 1, 1, 10, 1, 6, 2, 11, 1, 2, 7,
1, 7, 1, 16, 1, 4, 3, 1, 2, 1, 7, 1, 3, 1, 4, 9, 2, 1, 1, 1, 1, 23, 1, 1, 4, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 6, 106,
1, 1, 1, 7, 2, 18, 1, 1, 1, 4, 1, 2, 4, 20, 2, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 50, 1, 2, 14, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 1, 1,
1, 13, 8, 3, 2, 1, 8, 5, 1, 6, 1, 50, 1, 2, 3, 8, 1, 3, 5, 2, 1, 8, 8, 1, 1, 10, 2, 1, 1, 1, 2, 13, 1, 4, 10, 1, 1, 1, 1, 26, 2,
22, 3, 7, 6, 1, 2, 3, 28, 3, 17, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 5, 2, 4, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 4, 1, 2, 5, 2, 193, 2, 1, 47,
1, 4, 1, 6, 1, 4, 1, 6, 23, 4, 1, 20, 2, 3, 32, 1, 6, 1, 4, 1, 3, 1, 10, 1, 3, 1, 1, 2, 5, 2, 1, 1, 1, 93, 1, 1, 11, 8, 1, 1, 1,
1, 2, 15, 4, 1, 7, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 9, 10, 1, 6, 1, 4, 5, 3, 1, 11, 1, 6, 5, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 152, 3, 1, 4, 3, 7, 1, 473, 1,
1, 1, 3, 108, 2, 1, 3, 3, 3, 6, 1, 1, 1, 18, 1, 51, 2, 2, 5, 2, 2, 1, 1, 15, 6, 10, 1, 6, 1, 1, 6, 8, 2, 33, 1, 6, 2, 5, 3, 1,
13, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 2, 1, 10, 4, 2, 1, 2, 6, 23, 4, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 5, 3, 1, 3, 2, 5, 8, 1, 4, 5, 1, 1, 18, 6,
1, 1, 43, 1, 8, 1, 22, 1, 9, 5, 1, 2, 1, 15, 16, 1, 1, 5, 4, 3, 7, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 3, 3, 1, 2, 16, 2, 7, 1, 17, 3, 28, 5, 15,
5, 1, 8, 3, 1, 141, 1, 9, 7, 2, 5, 1, 1, 7, 5, 30, 1, 6, 2, 2, 6, 1, 4, 3, 3, 10, 22, 14, 1, 2, 3, 21, 4, 1, 1, 1, 12, 1, 9, 4,
2, 1, 7, 1, 1, 1, 10, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 10, 1, 7, 8, 2, 1, 1, 1, 5, 8, 5, 9, 37, 4, 1, 17, 1, 2, 1, 3, 1, 5, 2, 1, 4,
15, 2, 2, 5, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 20, 48, 1, 5, 17, 2, 7, 7, 1, 16, 1, 37, 3, 2, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 3, 16, 1, 2, 18, 2, 1,
1, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 5, 1, 2, 23, 2, 3, 1, 4, 13, 7, 1, 5, 1, 2, 1, 1, 30, 1, 7, 4, 1, 1, 1, 15, 1, 17, 1, 4, 1, 1, 1, 2, 188,
1, 5, 2, 2, 19, 2, 1, 2, 1, 70, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 5, 2, 1, 2, 7, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 31,
8, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 15, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 24, 4, 1, 1, 7, 2, 12, 4, 2, 2, 1, 15, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 9, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 9,
1, 1, 3, 1, 1, 7, 1, 12, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 6, 6, 1, 1, 1, 1, 10, 2, 10, 1, 2, 2, 2, 5, 12, 1, 2, 3, 4, 10, 1, 1, 3, 2, 4, 1, 37,

1, 4, 2, 1, 1, 67, 1, 1, 6, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 5, 2, 2, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 47, 57, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 7, 5, 2, 2, 2, 3, 7, 1, 4,
1, 1, 6, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 16, 49, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 38, 2, 3, 2, 3, 25, 6, 1, 1, 12, 3, 5, 3, 4, 7, 1, 1,
2, 7, 1, 9, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 33, 2, 6, 3, 1, 10, 1, 1, 2, 43, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 310, 2, 7, 2, 53, 211, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 7, 1,
1, 8, 2, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 9, 3, 11, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 2, 1, 17, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 6, 4, 3, 3, 11, 23, 2,
1, 5, 12, 21, 2, 1, 2, 3, 6, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 210, 15, 1, 1, 16, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 20, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 23, 29, 1, 23, 24, 1, 2,
3, 1, 2, 7, 1, 5, 80, 1, 2, 4, 2, 2, 32, 2, 4, 16, 3, 46, 2, 5, 1, 113, 4, 1, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 16, 1, 2, 1, 5, 4, 7, 1, 1, 5, 1,
31, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 3, 1, 2, 5, 1, 1, 17, 3, 2, 3, 1, 2, 10, 2, 2, 1, 1, 325, 1, 85, 3, 1, 4, 55, 3, 1, 3, 14, 1, 5, 1, 6, 4, 6,
30, 3, 1, 11, 1, 1, 1, 1, 1722, 1, 87, 24, 5, 1, 1, 16, 1, 15, 23, 8, 3, 3, 15, 1, 1, 292, 2, 6, 2, 1, 98, 3, 1, 2, 4, 1, 5, 2,
1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 8, 1, 2, 33, 3, 3, 2, 3, 9, 6, 4, 4, 5, 7, 1, 13, 7, 1, 2, 2, 21, 4, 1, 8, 3, 19, 7, 1, 1, 50, 1, 3, 1, 1,
17, 1, 4, 5, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 18, 4, 38, 1, 33, 4, 2, 1, 57, 1, 1, 6, 1, 1, 4, 1, 2, 104, 3, 5, 8, 1, 1, 7, 1, 4, 1, 52, 1, 5, 1,
5, 1, 4, 84, 1, 2, 8, 8, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 111, 1, 12, 1, 1, 18, 4, 2, 3, 1, 9, 2, 1, 40, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 9, 1, 5, 1, 3, 2,
2, 2, 1, 1, 204, 36, 1, 1, 4, 118, 1, 8, 3, 2, 1, 12, 1, 1, 1, 2, 1, 31, 1, 4, 5, 1, 11, 2, 55, 1, 17, 1, 1, 1, 6, 6, 1, 4, 5, 8,
1, 5, 1, 14, 1, 1, 3, 2, 5, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 5, 1, 1, 5, 20, 11, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 46, 2, 4, 1, 1, 1, 10, 2, 1, 5,
1, 2, 4, 22, 2, 7, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 10, 11, 7, 3, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 8, 1, 8, 1, 2, 2, 3, 6, 2, 36, 1, 2, 1,
4, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 2, 3, 1, 7, 3, 4, 4, 1, 1, 1, 2, 54, 16, 1, 7, 19, 2, 4, 1, 1, 1, 2, 7, 1, 1, 5, 3, 4, 1, 4, 18, 1, 1, 1, 1, 1,
8, 3, 1, 8, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 6, 1, 1, 8, 2, 3, 2, 13, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 3, 1, 10, 2, 1, 3, 2, 5, 1, 1, 1, 2, 142, 2, 1,
1, 1, 3, 7, 1, 16, 4, 1, 84, 1, 14, 1, 39, 1, 1, 33, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 2, 6, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 1,
1, 10, 3, 2, 1, 9, 2, 10, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 14, 3, 1, 5, 2, 4, 1, 3, 29, 2, 2, 2, 4, 1, 18, 1, 4, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 1, 3, 2, 1,
1, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 1, 46, 1, 1, 3, 4, 3, 212, 3, 1, 2, 1, 1, 4, 8, 1, 74, 1, 2, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 80, 2, 1, 3, 1, 1, 2,
2, 4, 4, 1, 2159, 5, 8, 4, 1, 1, 4, 2, 2, 5, 1, 5, 2, 2, 2, 44, 1, 1, 1, 23, 2, 1, 6, 1, 1, 1, 13, 46, 2, 2, 7, 3, 18, 1, 8277,
35, 29, 2, 1, 2, 2, 6, 1, 5, 2, 1, 5, 2, 242, 4, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 7, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 7, 1, 28, 1, 50, 10, 2, 37, 13, 1, 1, 1,
2, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 5, 2, 1, 4, 1, 1, 520, 10, 2, 8, 1, 4, 1, 39, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 7, 10, 1, 1, 5, 1, 1, 2, 6, 2, 5, 5,
4, 1, 12, 1, 6, 2, 4, 3, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 1, 588, 1, 3, 1, 6, 1, 8, 8, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 7, 4, 1, 13, 1, 58, 1, 4, 1, 6,
5, 1, 17, 1, 1, 1, 63, 1, 4, 2, 1, 2, 14, 1, 3, 5, 1, 1, 61, 1, 1, 3, 5, 2, 3, 1, 2, 11, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 10, 1, 5,
1, 2, 2, 1, 5, 1, 1, 5, 1, 1, 7, 1, 1, 4, 11, 1, 1, 1, 3, 2, 6, 1, 3, 2, 1, 4, 6, 2, 1, 7, 1, 17, 12, 1, 1, 7, 7, 1431, 5, 1, 10, 2,
4, 9, 1, 7, 2, 2, 5, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 17, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 3, 73, 7, 4, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 1,
1, 1, 3, 1, 2, 10, 21, 9, 3, 1, 5, 1, 1, 7, 6, 3, 4, 19, 11, 1, 1, 1, 6, 5, 3, 1, 8, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 4, 12, 3, 6, 1, 1, 5,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 9, 1, 1, 92, 3, 26, 1, 212, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 6, 1, 1, 41, 1, 7, 4, 1, 8, 1, 5, 2, 1, 1, 2,
4, 2, 15, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 10, 8, 1, 12, 2, 1, 1, 1, 10, 1, 12, 5, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 5, 331, 1, 1, 1,
22, 3, 1, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 21, 2, 1, 1, 57, 2, 2, 1, 5, 1, 117, 21, 7, 19, 1, 3, 1, 1, 1, 5, 4, 4, 7, 3, 2, 3, 1, 3, 4, 2, 21, 1,
5, 1, 2, 1, 143, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 2, 3, 49, 1, 3, 2, 31, 2, 1, 32, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 1, 1,
7, 1, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 12, 5, 5, 1, 2, 2, 27, 1, 1, 1, 2, 1, 21, 1, 4, 1, 4, 1, 6, 7, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 21, 2, 3, 1, 4, 1, 501,
1, 1, 11, 7, 3, 1, 2, 6, 9, 1, 1, 15, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 4, 1, 40, 1, 1, 22, 154, 1, 5, 7, 1, 2, 3, 8, 1, 5, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 8, 1, 1,
2, 1, 1, 1, 1, 5, 10, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 5, 1, 2, 4, 5, 1, 1, 23, 1, 47, 1, 17, 9, 4, 2, 1, 3, 20, 1, 1, 2, 180, 1, 1, 2, 6, 1, 9, 1,
2, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 21, 2, 1, 3, 1, 2, 6, 1, 15, 2, 3, 3, 1, 1, 18, 27, 1, 9, 19, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 12, 3, 23, 1,
1, 1, 42, 1, 3, 1, 6, 1, 7, 1, 4, 1, 7, 4, 1, 1, 3, 3, 46, 8, 1, 3, 10, 6, 1, 2, 3, 1, 42, 1, 4, 1, 2, 6, 3, 1, 1, 1, 6, 1, 5, 1, 2, 9,
1, 2, 9, 37, 4, 2, 4, 2, 9, 1, 5, 2, 4, 1, 2, 1, 18, 5, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 27, 11, 1, 3, 1, 3, 1, 7, 1, 13, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 9, 4, 2,
1, 1, 9, 1, 1, 15, 8, 1, 3, 4, 2, 7, 1, 4, 134, 5, 1, 57, 2, 18, 2, 9, 1, 1, 3, 1, 4, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 8, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 35, 2, 1,
3, 2, 1, 7, 1, 11, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 3, 7, 1, 1, 4, 1, 1, 63, 1, 1, 1, 14, 527, 3, 1, 1, 3, 1, 19, 1, 3, 2, 1, 1, 44, 1, 2, 1, 1,
3, 17, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 9, 1, 75, 5, 34, 3, 3, 3, 1, 55, 2, 1, 1, 1, 29, 5, 15, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 82, 2, 1, 1, 2, 1, 4, 13, 1,
2, 2, 172, 3, 12, 6, 2, 1, 19, 1, 1, 27, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 1, 1282, 1, 2, 1,
2, 1, 17, 1, 14, 2, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 4, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 204, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1,
3, 1, 5, 4, 18, 4, 1, 1, 12, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 5, 1, 5, 3, 5, 2, 1, 9, 1, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 1, 4, 3, 29, 8, 3, 5, 2, 1, 1, 1, 9, 1, 1,
4, 3, 1, 1, 2, 4, 5, 2, 3, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 16, 1, 12, 4, 1, 1, 2, 1, 1, 36, 3, 5, 6, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 89, 3, 2, 3, 2, 1, 3, 1,
1, 6, 1, 15, 15, 1, 5, 5, 9, 4, 3, 1, 1, 16, 1, 1, 2, 1, 4, 4, 1, 1, 11, 8, 1, 1, 1, 1, 52, 4, 4, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 8, 1, 1, 3,
1, 1, 2, 5, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 18, 9, 1, 4, 8, 2, 31, 1, 1, 164, 4, 3, 2, 1, 8, 12, 2, 78, 6, 3, 3, 14, 10, 1, 26, 2, 6, 34, 1,
7, 12, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 4, 1, 12, 2, 19, 2, 1, 20, 1, 38, 1, 4, 1, 2, 8, 1, 9, 3, 3, 11, 1, 2, 1, 1, 1, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 3,
2, 1, 2, 14, 1, 2, 8, 3, 1, 1, 3, 7, 1, 1, 13)

TAULA 5: 4 977 termes de la fracció contínua de $\pi$.

Podem observar que $b_2$ no és una altra cosa que l'invers de $d_1$, construït geomètricament.

La traducció algebraica del procés anterior és l'algorisme següent, que assigna a un nombre real $x \geq 0$ el seu desenvolupament en fracció contínua $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$:

$$
\begin{array}{llll}
1 & b_1 := x & a_1 := [b_1] & d_1 := b_1 - a_1 \\
2 & b_2 := 1/d_1 & a_2 := [b_2] & d_2 := b_2 - a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & b_n := 1/d_{n-1} & a_n := [b_n] & d_n := b_n - a_n
\end{array}
$$

on $a_1 \geq 0$, $a_i > 0$ per a $i > 1$.

Aleshores, es veu clarament que el nombre $x$ és

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}.$$

Si denotem per $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ el *cumulant*

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

el membre de la dreta de l'expressió en fracció contínua de $x$ és, per definició, el límit de la successió de cumulants $\{(a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_2, a_3), \ldots\}$ i aquest límit val $x$.

Per exemple, en el cas del nombre $\pi$, el cumulant $(3, 7) = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,142\ldots$ s'aproxima raonablement bé a $\pi$, malgrat ésser tan curt. El motiu és que el cumulant que segueix, que és $(3, 7, 15)$, acaba al pis $a_3 = 15$, i això succeeix perquè, levitant a sota de la volta de vidre, hi ha un nombre $d_2$ tan proper a l'origen perquè el seu invers $b_3$ (obtingut mitjançant els raigs làser) arribi al pis 15.

Això ens diu que, com que el pis 292 és molt alt, el cumulant anterior al cumulant $(3, 7, 15, 1, 292)$ ens donarà una aproximació molt bona de $\pi$. Tenim, de fet, $(3, 7, 15, 1) = \frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$, que dóna $\pi$ amb 6 decimals exactes. Aquesta aproximació era coneguda des de l'antigor i així Spencer, en el seu llibre d'efemèrides, diu que «cap al 480 després de Crist, el matemàtic xinès Tse Ch'ung-chih donava $22/7 = (3, 7)$ com a valor 'no fi' de $\pi$ i donava $355/113 = (3, 7, 15, 1)$ com a valor 'fi' de $\pi$». A Occident ens va caldre esperar fins a l'any 1573. En aquest any «Valentinus Otto va trobar l'antic valor xinès de $\pi$, és a dir, 355/113». El 1585 «Adrian Anthoniszoon va redescobrir l'antic valor xinès de $\pi$, 355/113, però sembla que va ser per pura casualitat, puix que va començar establint la desigualtat

$$\frac{377}{120} > \pi > \frac{333}{106}$$

i després va prendre la mitjana aritmètica dels numeradors i els denominadors com a valor "exacte" de $\pi$». Com a simple curiositat, diguem que si hom vol obtenir l'aproximació de $\pi$ que dóna la fracció 355/113 mitjançant la sèrie de Leibnitz, ens caldria calcular 3748630 termes de la sèrie! Veiem, doncs, que la sèrie, per si mateixa, no és pas una manera pràctica de calcular decimals de $\pi$. També és cert, però, que un ús apropiat de la sèrie ens permet de fer càlculs més precisos.[8]

El cumulant de $\pi$ d'ordre 432 acaba al pis 20776 i, per aquest motiu, el cumulant d'ordre 431 s'aproxima a $\pi$ amb 434 xifres decimals exactes.

El segon mètode de visualització geomètrica de les fraccions contínues és més suggeridor. Suposem que volem desenvolupar el nombre real positiu $x$ en fracció contínua. Prenem una taula de billar rectangular d'alçada 1 i amplada $b_1 = x$, com

8 Vegin el llibre en anglès de Harold M. Edwards: *Càlcul avançat: un enfocament mitjançant formes diferencials*, Birkhäuser, 1994, secció 7.5, problema 1.

| número | coef. | número | coef. | número | coef. |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 292 | 2054 | 620 | 3440 | 118 |
| 80 | 161 | 2078 | 425 | 3642 | 142 |
| 197 | 120 | 2105 | 256 | 3745 | 212 |
| 223 | 127 | 2155 | 121 | 3778 | 2159 |
| 308 | 436 | 2168 | 391 | 3812 | 8277 |
| 432 | 20776 | 2199 | 252 | 3826 | 242 |
| 602 | 106 | 2356 | 106 | 3867 | 520 |
| 670 | 141 | 2477 | 193 | 3916 | 588 |
| 726 | 125 | 2553 | 152 | 4020 | 1431 |
| 870 | 376 | 2560 | 473 | 4127 | 212 |
| 872 | 107 | 2565 | 108 | 4193 | 331 |
| 961 | 129 | 2689 | 141 | 4216 | 117 |
| 1002 | 193 | 2845 | 188 | 4242 | 143 |
| 1111 | 114 | 3085 | 310 | 4323 | 501 |
| 1216 | 123 | 3090 | 211 | 4348 | 154 |
| 1222 | 156 | 3158 | 210 | 4401 | 180 |
| 1360 | 148 | 3204 | 113 | 4552 | 134 |
| 1484 | 161 | 3249 | 325 | 4606 | 527 |
| 1498 | 528 | 3274 | 1722 | 4666 | 172 |
| 1546 | 102 | 3291 | 292 | 4701 | 1282 |
| 1759 | 155 | 3374 | 104 | 4739 | 204 |
| 1858 | 217 | 3403 | 111 | 4900 | 164 |
| 1866 | 196 | 3435 | 204 | | |

TAULA 6: Coeficients superiors a 100 del desenvolupament en fracció contínua de $\pi$.

la de la figura 1, en què $x = 17/13$. Es llença una bola des de la cantonada inferior esquerra amb un angle de 45 graus. Cada vegada que la bola topa amb una banda, la taula de billar perd el quadrat, la diagonal del qual ha estat recorreguda per la bola. Anem prenent nota del nombre de quadrats de cada mida que van desapareixent. Si el primer quadrat que traiem no és de mida $1\times 1$, això vol dir que $x < 1$ i afegirem un zero a l'inici de la nostra llista de nombres. S'obté així el desenvolupament en fracció contínua de $x$: $(a_1; a_2, a_3, \dots)$. En la figura 1 es té (1;3,4). També pot imaginar-se que tenim un rectangle de mida $1\times x$ que cal enrajolar. En lloc d'imaginar que traiem una rajola per cada diagonal que recorre la bola de billar, en posem una. D'aquesta manera, un enrajolador va utilitzant, primer, $a_1 \geq 0$ rajoles de mida $1 \times 1$; després $a_2 > 0$ rajoles de mida $d_1 \times d_1$, on $d_1 = b_1 - a_1$, etc. És clar que $a_1 = [b_1]$ i que $a_2 = [1/d_1]$, etc. Ara és fàcil veure quan la successió $\{a_1, a_2, \dots\}$ és finita. Si la successió s'acaba amb $a_k$, és que el costat de la penúltima rajola pot recobrir-se amb $a_k$ rajoles de les últimes que hem utilitzat, d'on resulta que el costat de la penúltima rajola és commensurable amb el costat de l'última rajola. Procedint així, resulta que els costats de totes les rajoles són commensurables amb el de l'última i, per tant, si l'alçada de la cambra admet $m$ d'aquestes últimes rajoles i l'amplada n'admet $n$, aleshores $x$ consta de $n$ parts de $1/m$: tenim $x = n/m$. El recíproc és obvi. El desenvolupament de $x$ és finit si i només si $x$ és racional. El meu alumne de doctorat, el senyor Crespí de Valldaura, ha obtingut, utilitzant el mètode del

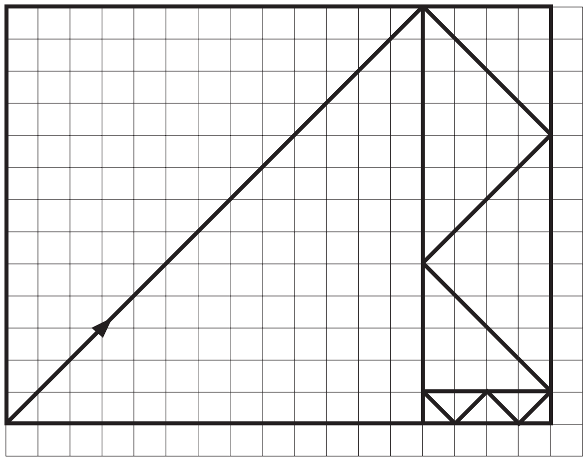

FIGURA 1

billar, una demostració absolutament elemental que el desenvolupament en fracció contínua de $x$ és periòdic si i només si $x$ és de la forma $(a+b\sqrt{c})/d$ on $a$, $b$ i $d$ són enters, $d \neq 0$ i $c$ és enter positiu i no és quadrat perfecte. Aquest mateix senyor estudia en la seva tesi la generalització òbvia del desenvolupament de $x$ quan l'angle de tir de la bola de billar no és de 45 graus.

Comparant això amb el desenvolupament decimal d'un nombre, en què els racionals són exactament els periòdics, sembla com si amb el desenvolupament en fracció contínua baixéssim un graó cap a un coneixement més profund dels nombres. Així, per exemple, el desenvolupament en fracció contínua de $\sqrt{17}$ és $(4; 8, 8, 8, \dots)$. Però hi ha encara sorpreses més interessants. Ja hem indicat que el desenvolupament en fracció contínua del nombre $\pi$ no sembla seguir cap mena de pauta. Això contrasta fins a l'astorament amb el desenvolupament en fracció contínua del nombre $e$. Aquest nombre, igual que $\pi$, no només és irracional, sinó que és transcendent: cap dels dos no és l'arrel d'un polinomi amb coeficients enters. I, tanmateix, mentre que $\pi$ no sembla pas que segueixi cap pauta en el seu desenvolupament en fracció contínua, vegin vostès quin és el desenvolupament en fracció contínua de $e$:

$$e - 1 = \{1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots\};$$

de manera que podem dir a la bestreta quina serà la xifra que ocuparà un lloc determinat. Podem dir que, dintre del context dels desenvolupaments en fracció contínua, els nombres racionals, els irracionals quadràtics i el nombre $e$ ens són perfectament coneguts. El nombre $\pi$ segueix essent un misteri.

Notin que els termes del desenvolupament de $e$ en fracció contínua pugen per damunt de tota fita. Curiosament, calculant el desenvolupament en fracció contínua de $\pi$ s'observa que la quantitat de pisos alts és petita en comparació de la de termes del desenvolupament. Si $x = (a_0; a_1, a_2, \dots)$, $a_0 \geq 0$, $a_1 \geq 1$, anomenarem pisos als $a_i$.

Sigui $\mathbb{B}_k$ la col·lecció dels nombres que arriben al pis $k$ i prou. Sigui $\mathbb{B}$ la col·lecció de nombres que posseeixen un últim pis. Òbviament, $\mathbb{B}$ és la unió de tots els $\mathbb{B}_k$. Podem imaginar els nombres com una ciutat amb edificis d'alçades diverses. El nombre $e$ té alçada infinita. No se sap si $\pi$ té alçada finita o infinita. (En la taula 6, cortesia del senyor Crespí de Valldaura, apareixen els «pisos alts» dels primers nombres del desenvolupament de $\pi$.)

Si $\mathbb{E} = \mathbb{B} \cap (0,1)$ són els nombres d'alçada finita de l'interval obert $(0,1)$, es coneix que $\mathbb{E}$ posseeix una quantitat no numerable d'elements. Nogensmenys, $\mathbb{E}$ posseeix mesura zero. Dit d'una altra manera: la probabilitat que un nombre entre 0 i 1, escollit a l'atzar, tingui alçada finita, és zero. L'article de J. Shallit «Nombres reals amb quocients parcials fitats»[9] conté notícies molt interessants sobre aquests nombres d'alçada finita. El 1966 Lang en va dir: «tret dels irracionals quadràtics, no es coneixen exemples senzills d'irracionals d'alçada constant. La millor conjectura és que no n'hi ha.» La conjectura és falsa; en efecte, el nombre $f(n)$ definit per la sèrie

$$f(n) = n^{-2^0} + n^{-2^1} + n^{-2^2} + n^{-2^3} + \cdots$$

té alçada $n+2$ si $n \geq 3$. Però si $n = 2$, té alçada 6. Per exemple, $f(3)$ té alçada 5 i, efectivament,

$$f(3) = (0; 2, 5, 3, 3, 1, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 1, \cdots).$$

A més, els nombres $f(n)$ són tots transcendents d'alçada finita, com es va demostrar el 1979.

Pel que fa al desenvolupament en fracció contínua dels nombres algebraics, poc és el que se'n sap. Descomptant els irracionals quadràtics que tenen desenvolupament periòdic, ni tan sols se sap si són d'alçada finita o no.

Si tornem ara al nombre $e$, no cal ni dir que, tal com passa amb el nombre $\pi$, tenim desenvolupaments en sèrie de $e$ que ens permeten calcular tants decimals com vulguem. Respecte d'això, se'm va acudir de definir un nou nombre que no he trobat en la literatura i que proposo que s'anomeni *nombre $p$*. El nombre $p$, per definició, és aquell que té per desenvolupament en fracció contínua la successió dels nombres primers. Pot calcular-se amb la precisió que es vulgui, en la mesura que anem trobant nombres primers. Els seus desenvolupaments decimal i septimal apareixen en les taules 7 i 8. Sobre el nombre $p$, l'única cosa que sé és que és irracional, perquè això equival que la successió dels nombres primers és infinita. Qualsevol altra informació que algú pugui donar sobre aquest nou nombre —per exemple, un desenvolupament en sèrie— revolucionaria les matemàtiques. Dubto molt que, en la situació actual dels nostres coneixements, ningú pugui dir res de substancial sobre $p$. Nogensmenys, un examen del seu desenvolupament decimal és tan o més important que el del nombre $\pi$.

Vull també considerar aquí un nou nombre que proposo que s'anomeni $g$ (que és la primera lletra de la paraula castellana per *bessons*) i que és el nombre que té per desenvolupament en fracció contínua la successió dels primers bessons. Dos primers es diu que són bessons si difereixen en menys de 3 unitats: 2 i 3 són bessons, 3 i 5 també ho són, etc. Com que no se sap si la successió de primers bessons és infinita o no, ni tan sols podem dir, ara per ara, si el nombre $g$ és racional o irracional.

## 7 Del discret al continu en la topologia combinatòria

Abandonem ja els nombres i entrem de ple a la geometria. Es tracta ara d'un procés infinit basat en un altre de finit de caràcter combinatori. Em refereixo a la demos-

9 *L'Enseignement Math.* 38 (1992), 151–187.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.313 | 03673 | 64335 | 82906 | 38395 | 16026 | 41782 | 47639 | 66897 | 71803 | 25634 | 02101 | 24442 | 14456 |
| 47317 | 76272 | 24369 | 53220 | 17238 | 32817 | 45301 | 58200 | 72360 | 21662 | 15392 | 26487 | 31005 | 37277 |
| 01567 | 12220 | 68549 | 46746 | 55364 | 18758 | 07695 | 29275 | 15082 | 71179 | 33164 | 47285 | 72144 | 29997 |
| 24871 | 80896 | 92883 | 28780 | 36101 | 58268 | 65802 | 54525 | 18759 | 59989 | 58733 | 87510 | 34270 | 02778 |
| 52019 | 11407 | 97044 | 40265 | 98549 | 68883 | 39753 | 62351 | 01296 | 87204 | 33103 | 32602 | 43136 | 89870 |
| 56137 | 12460 | 76539 | 89604 | 78704 | 02968 | 23298 | 00625 | 38519 | 86897 | 59329 | 66072 | 06103 | 80156 |
| 30107 | 11120 | 58002 | 32441 | 47011 | 31100 | 12442 | 49363 | 92195 | 92503 | 40123 | 42581 | 83456 | 39722 |
| 63106 | 69877 | 74260 | 03859 | 72273 | 23937 | 25224 | 30356 | 71671 | 14519 | 34680 | 32365 | 94595 | 99609 |
| 95749 | 56352 | 96346 | 85969 | 65275 | 63391 | 29225 | 54813 | 82424 | 52823 | 62929 | 99765 | 68199 | 48298 |
| 39873 | 94850 | 48753 | 42265 | 37347 | 22161 | 75266 | 19983 | 77073 | 94932 | 15913 | 94060 | 87375 | 89680 |
| 63507 | 17251 | 66692 | 82788 | 67779 | 87548 | 13700 | 54294 | 39748 | 29261 | 88169 | 88987 | 12705 | 24318 |
| 69477 | 72514 | 68076 | 87459 | 96842 | 78208 | 90547 | 32650 | 38643 | 76028 | 30667 | 35243 | 57855 | 59612 |
| 04602 | 46026 | 61695 | 29558 | 44927 | 99381 | 61294 | 54563 | 14126 | 83672 | 68771 | 76475 | 43454 | 31758 |
| 72145 | 57343 | 79229 | 98031 | 57566 | 54627 | 20490 | 27644 | 64754 | 27667 | 29502 | 93714 | 67097 | 21802 |
| 18194 | 89242 | 20379 | 71708 | 00277 | 79820 | 15978 | 86942 | 97864 | 77797 | 68845 | 17841 | 22365 | 70722 |
| 43174 | 31433 | 66942 | 75088 | 64723 | 94497 | 75123 | 89082 | 24228 | 24584 | 58497 | 76349 | 69950 | 48683 |
| 97029 | 96779 | 21246 | 17938 | 07893 | 60433 | 62795 | 70083 | 83455 | 08257 | 87743 | 55286 | 25082 | 78467 |
| 71338 | 05572 | 69491 | 70325 | 13995 | 29806 | 36581 | 84697 | 15847 | 75352 | 50872 | 10062 | 91140 | 60546 |
| 51078 | 94407 | 30620 | 21590 | 18773 | 74190 | 03498 | 89650 | 42708 | 69203 | 40763 | 49573 | 87642 | 85170 |
| 77262 | 74176 | 87783 | 55652 | 32658 | 64357 | 28163 | 07879 | 90094 | 23187 | 29811 | 62203 | 69070 | 96651 |
| 76249 | 29963 | 98055 | 70885 | 63420 | 72619 | 13251 | 20144 | 52980 | 94196 | 11578 | 96047 | 11940 | 98721 |
| 02178 | 31161 | 68775 | 58686 | 72162 | 69541 | 29667 | 13804 | 04434 | 65299 | 01924 | 11502 | 68523 | 16944 |
| 93169 | 19376 | 11028 | 56555 | 27206 | 60499 | 39889 | 54722 | 11048 | 54507 | 19777 | 61801 | 62317 | 35641 |
| 22167 | 57418 | 38528 | 11511 | 21837 | 06143 | 18412 | 69172 | 40289 | 28337 | 62692 | 79851 | 70778 | 58121 |
| 78227 | 68756 | 39925 | 72759 | 66411 | 27930 | 37582 | 50586 | 65016 | 65811 | 74929 | 79350 | 47798 | 41498 |
| 38555 | 63027 | 47053 | 38649 | 84827 | 10925 | 23556 | 29071 | 54763 | 05659 | 89100 | 30500 | 71539 | 21857 |
| 80945 | 57306 | 86749 | 44448 | 45254 | 25353 | 52395 | 20198 | 17148 | 11946 | 21322 | 01480 | 63813 | 38144 |
| 71788 | 58383 | 33617 | 40221 | 59613 | 63978 | 24313 | 56165 | 52567 | 21167 | 96940 | 21498 | 49356 | 25178 |
| 89197 | 28948 | 80150 | 33198 | 33345 | 58711 | 71515 | 91817 | 37285 | 35714 | 81637 | 46428 | 25407 | 63990 |
| 81143 | 39184 | 24024 | 24610 | 61469 | 50936 | 52893 | 15952 | 93544 | 62080 | 19473 | 72844 | 56649 | 16235 |
| 38132 | 48942 | 85575 | 19850 | 65405 | 12207 | 04755 | 17104 | 73414 | 38526 | 88722 | 22659 | 48606 | 66101 |
| 89693 | 60190 | 47985 | 60717 | 28883 | 68839 | 29924 | 37998 | 04873 | 54836 | 24301 | 47030 | 70809 | 32501 |
| 81125 | 86821 | 99680 | 94275 | 76264 | 38966 | 31878 | 35154 | 58379 | 68942 | 24578 | 74448 | 60459 | 52740 |
| 23329 | 74192 | 86555 | 08192 | 23749 | 28617 | 47060 | 40417 | 74184 | 29948 | 73087 | 89316 | 83738 | 59501 |
| 03390 | 38865 | 41208 | 45166 | 79500 | 57871 | 57264 | 93623 | 67513 | 03251 | 15527 | 94160 | 34769 | 91113 |
| 59733 | 59311 | 93298 | 74166 | 55038 | 42144 | 17270 | 40313 | 65644 | 42652 | 52790 | 67070 | 40447 | 47217 |
| 59732 | 38227 | 57505 | 71419 | 25197 | 04410 | 22934 | 16040 | 73963 | 79983 | 42842 | 67546 | 78564 | 71436 |
| 97563 | 19144 | 01164 | 43799 | 15801 | 04439 | 95356 | 76335 | 95772 | 52815 | 29901 | 65642 | 62552 | 18659 |
| 88199 | 40175 | 37701 | 31475 | 37899 | 31747 | 08475 | 99161 | 97451 | 00664 | 38139 | 24692 | 79912 | 73484 |
| 18589 | 42157 | 81702 | 75991 | 70234 | 70718 | 75179 | 01790 | 58658 | 81903 | 90473 | 34340 | 60480 | 01284 |
| 70792 | 28886 | 72968 | 45596 | 46764 | 52281 | 52466 | 16762 | 26883 | 50279 | 81350 | 33990 | 05346 | 71094 |
| 80579 | 28072 | 22802 | 30773 | 47206 | 04873 | 89731 | 02635 | 36801 | 91504 | 38632 | 92147 | 23426 | 10073 |
| 28636 | 16557 | 16849 | 37089 | 21489 | 80630 | 27833 | 77196 | 66364 | 81389 | 90227 | 55642 | 71375 | 91160 |
| 13468 | 05872 | 43274 | 60365 | 56608 | 11890 | 20160 | 71377 | 55926 | 70830 | 69329 | 57399 | 91376 | 00085 |
| 68242 | 34453 | 74329 | 42808 | 14856 | 78123 | 09481 | 58892 | 65932 | 93694 | 00936 | 30850 | 95358 | 59992 |
| 84318 | 55186 | 10509 | 77704 | 73343 | 98852 | 55852 | 77980 | 96079 | 34162 | 27119 | 29304 | 70974 | 35026 |
| 90028 | 67813 | 46534 | 84167 | 22802 | 44069 | 23253 | 54069 | 93843 | 06490 | 92247 | 81638 | 55037 | 95219 |
| 21598 | 51479 | 46601 | 12505 | 75659 | 79004 | 30574 | 39541 | 90413 | 85368 | 49489 | 60781 | 75307 | 60685 |
| 97559 | 15541 | 53471 | 56890 | 17879 | 82938 | 41815 | 06576 | 87764 | 26854 | 51981 | 24000 | 34730 | 63225 |
| 82132 | 73396 | 16390 | 42666 | 55121 | 00791 | 61819 | 72670 | 72497 | 36672 | 32858 | 08481 | 79899 | 43015 |
| 41707 | 89418 | 26064 | 76570 | 64552 | 87595 | 38319 | 84370 | 92651 | 64001 | 58916 | 72088 | 94656 | 16757 |
| 05034 | 14238 | 08716 | 20916 | 98934 | 55667 | 39141 | 03957 | 78903 | 09981 | 32220 | 87045 | 75915 | 33903 |
| 88961 | 03628 | 89598 | 11512 | 61536 | 99785 | 30996 | 52457 | 97355 | 62540 | 58344 | 81490 | 15381 | 10319 |
| 93950 | 02196 | 68507 | 05284 | 03338 | 01116 | 50889 | 43999 | 43503 | 55561 | 14455 | 56201 | 21586 | 11456 |
| 88456 | 89764 | 74719 | 56699 | 48894 | 86327 | 48680 | 98524 | 94468 | 82902 | 24915 | 75912 | 29722 | 39365 |
| 09230 | 68632 | 65313 | 33889 | 62411 | 07930 | 44025 | 06442 | 65815 | 90587 | 24764 | 90405 | 92731 | 28209 |
| 12009 | 19111 | 90137 | 09815 | 91583 | 39689 | 25853 | 09344 | 30187 | 28511 | 26317 | 04181 | 53031 | 96049 |
| 12210 | 61425 | 72675 | 00574 | 79537 | 52229 | 33055 | 01660 | 61784 | 73330 | 21174 | 29364 | 93650 | 17445 |
| 10747 | 26351 | 69878 | 03892 | 23018 | 75870 | 33585 | 95344 | 23104 | 42245 | 51817 | 58237 | 94673 | 33904 |
| 73922 | 59536 | 31510 | 64466 | 36449 | 24469 | 49532 | 44688 | 90543 | 24555 | 11450 | 23406 | 78970 | 57441 |
| 15690 | 76915 | 20838 | 33476 | 77669 | 11555 | 47994 | 82634 | 33047 | 23755 | 22039 | 53416 | 85709 | 71074 |
| 09461 | 68767 | 27493 | 33628 | 73719 | 57117 | 70087 | 95904 | 27221 | 48090 | 22230 | 83677 | 01128 | 06294 |
| 25593 | 94835 | 69079 | 75327 | 77038 | 03328 | 29024 | 86649 | 25820 | 74221 | 80188 | 24679 | 99242 | 39461 |
| 06068 | 55402 | 43441 | 77715 | 64811 | 93498 | 73690 | 37816 | 30115 | 13608 | 87661 | 61688 | 29493 | 94893 |
| 51898 | 77094 | 19385 | 65451 | 46179 | 36237 | 20477 | 76927 | 23281 | 60852 | 19725 | 58337 | 96990 | 55556 |
| 62065 | 27434 | 70969 | 51001 | 44186 | 19036 | 33921 | 28229 | 58151 | 26107 | 09523 | 78670 | 16412 | 02000 |
| 33456 | 52531 | 60009 | 70603 | 40939 | 97367 | 52115 | 05530 | 57323 | 84290 | 29189 | 96495 | 90336 | 41807 |
| 33818 | 33689 | 28755 | 82381 | 07449 | 33925 | 37749 | 88571 | 60810 | 36864 | 69235 | 85502 | 28652 | 54588 |
| 30423 | 30431 | 92986 | 24430 | 24985 | 15925 | 71356 | 35720 | 52591 | 58253 | 56743 | 36296 | 43426 | 39921 |
| 75473 | 02983 | 96602 | 86746 | 94475 | 20096 | 12264 | 95080 | 29742 | 74403 | 18864 | 73362 | 54372 | 39245 |
| 75168 | 69671 | 54455 | 63419 | 96619 | 47260 | 21871 | 28483 | 23892 | 84779 | 14955 | 51307 | 28895 | 33979 |
| 83982 | 08049 | 37418 | 45454 | 56765 | 86884 | 97853 | 39362 | 24517 | 72562 | 19996 | 25595 | 01405 | 88902 |

TAULA 7: 5 038 dígits decimals de $p = (2; 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.212 | 24131 | 33033 | 04151 | 45054 | 46255 | 16343 | 66531 | 40332 | 44051 | 46156 | 22633 | 02336 | 22215 |
| 36404 | 32456 | 00151 | 06403 | 45112 | 52232 | 15442 | 14562 | 60032 | 33106 | 14146 | 15001 | 11122 | 32345 |
| 34544 | 65413 | 20206 | 00410 | 63421 | 30233 | 20424 | 40323 | 45653 | 56351 | 53065 | 63146 | 40163 | 42022 |
| 24621 | 12601 | 63541 | 41363 | 26104 | 13010 | 00243 | 60353 | 46335 | 53136 | 06042 | 44503 | 03555 | 01163 |
| 60140 | 56342 | 44111 | 33162 | 00453 | 11113 | 65214 | 45164 | 43460 | 46156 | 05522 | 63532 | 62456 | 32630 |
| 51235 | 34142 | 22410 | 13144 | 25336 | 54244 | 11255 | 14300 | 30150 | 01106 | 02542 | 13662 | 01443 | 63015 |
| 62024 | 33303 | 56136 | 10124 | 60015 | 61162 | 05042 | 41450 | 15146 | 00401 | 46543 | 22612 | 63046 | 03312 |
| 05164 | 66443 | 43413 | 51352 | 65125 | 00632 | 26260 | 45314 | 25631 | 11015 | 31463 | 12421 | 51434 | 22105 |
| 46322 | 43140 | 03441 | 22455 | 43556 | 24220 | 12251 | 21151 | 25650 | 45543 | 22364 | 01202 | 46411 | 60512 |
| 41622 | 04614 | 62454 | 56633 | 01232 | 33631 | 65365 | 43131 | 05351 | 11012 | 21434 | 63333 | 03464 | 06534 |
| 44656 | 50351 | 34051 | 54145 | 32302 | 30363 | 20323 | 34341 | 46536 | 20626 | 01431 | 44536 | 02625 | 03604 |
| 21633 | 44402 | 43105 | 32310 | 21611 | 43462 | 66566 | 10141 | 45546 | 51141 | 04522 | 23615 | 25521 | 45311 |
| 53565 | 61202 | 13051 | 64432 | 45424 | 44544 | 53533 | 63451 | 21561 | 60021 | 13422 | 34353 | 50464 | 06365 |
| 23301 | 42541 | 66314 | 23201 | 55062 | 12266 | 56006 | 12033 | 06342 | 32205 | 42356 | 50231 | 64502 | 10066 |
| 41150 | 14123 | 42355 | 20110 | 61136 | 22552 | 44335 | 46405 | 51301 | 20260 | 45623 | 04156 | 36216 | 60535 |
| 22661 | 34530 | 31664 | 05441 | 12153 | 05040 | 60263 | 02013 | 00400 | 12422 | 25045 | 06620 | 32554 | 05650 |
| 54230 | 65142 | 33333 | 46654 | 32145 | 21103 | 65144 | 16105 | 22603 | 53120 | 25626 | 05414 | 33056 | 61430 |
| 55063 | 02434 | 24423 | 60300 | 01236 | 45520 | 04252 | 05216 | 45311 | 02500 | 21203 | 63204 | 00516 | 15402 |
| 33415 | 04033 | 12502 | 11126 | 32104 | 16663 | 22446 | 56661 | 06320 | 00064 | 42364 | 11263 | 66333 | 32404 |
| 53052 | 34236 | 65401 | 35014 | 13144 | 51122 | 20042 | 34430 | 11532 | 40302 | 50155 | 26144 | 55525 | 31532 |
| 14542 | 03026 | 64501 | 10214 | 54243 | 34215 | 32612 | 21432 | 13124 | 33023 | 12415 | 52564 | 34030 | 22056 |
| 03512 | 20436 | 66664 | 16566 | 36512 | 63545 | 36462 | 52343 | 62224 | 42626 | 45566 | 02165 | 12355 | 00053 |
| 20164 | 65042 | 14500 | 46403 | 02405 | 23654 | 34402 | 45464 | 23314 | 21422 | 55320 | 64555 | 54200 | 42016 |
| 10606 | 36305 | 00134 | 11221 | 26201 | 54610 | 21520 | 11266 | 64150 | 20100 | 14322 | 66346 | 13042 | 03643 |
| 44330 | 30604 | 50313 | 23314 | 65634 | 60466 | 42443 | 11646 | 12062 | 44405 | 01123 | 65265 | 50235 | 14254 |
| 51144 | 31135 | 46013 | 44331 | 13144 | 46104 | 40060 | 33603 | 16315 | 33144 | 41535 | 51151 | 56445 | 14200 |
| 22522 | 55412 | 34064 | 55202 | 46530 | 05651 | 64423 | 40065 | 62106 | 64261 | 52011 | 00642 | 34160 | 62035 |
| 22122 | 56214 | 30054 | 26300 | 44236 | 63354 | 32331 | 20562 | 44523 | 41551 | 02330 | 20225 | 66065 | 32213 |
| 43140 | 31552 | 12014 | 30245 | 22364 | 30220 | 66104 | 54014 | 02420 | 12064 | 21060 | 06106 | 06000 | 20346 |
| 06463 | 40623 | 25610 | 53056 | 51410 | 50336 | 12111 | 54120 | 51606 | 11465 | 16063 | 12552 | 55020 | 40652 |
| 00400 | 41340 | 64501 | 11045 | 24446 | 30544 | 01033 | 30552 | 20336 | 03204 | 55523 | 42135 | 13636 | 41322 |
| 43146 | 25450 | 16623 | 24216 | 43122 | 03153 | 14624 | 43403 | 22206 | 05120 | 14501 | 43164 | 63202 | 12162 |
| 42162 | 66561 | 13446 | 60050 | 60542 | 23004 | 20232 | 41150 | 12352 | 41114 | 41445 | 61015 | 02422 | 65045 |
| 34031 | 54343 | 23351 | 22640 | 12344 | 43131 | 03046 | 52363 | 50523 | 20122 | 62444 | 53556 | 25154 | 15601 |
| 31264 | 66234 | 33644 | 52623 | 30433 | 15062 | 42443 | 25304 | 00342 | 15441 | 45334 | 64113 | 64145 | 22066 |
| 32155 | 06160 | 46461 | 05316 | 22622 | 53543 | 50165 | 05051 | 52543 | 40564 | 42222 | 10124 | 36126 | 06460 |
| 42402 | 44554 | 04205 | 41451 | 12510 | 12615 | 41560 | 11301 | 22132 | 33651 | 35103 | 21611 | 11621 | 11233 |
| 55225 | 26501 | 00241 | 33210 | 40413 | 51354 | 51435 | 11143 | 46302 | 44502 | 55556 | 05464 | 13042 | 00241 |
| 50510 | 40520 | 21302 | 26636 | 52556 | 11353 | 50641 | 50364 | 41160 | 22622 | 14513 | 21603 | 15551 | 20214 |
| 66153 | 03623 | 66223 | 15460 | 44321 | 06202 | 11613 | 54632 | 22146 | 13433 | 40011 | 43456 | 53456 | 16450 |
| 20463 | 36603 | 52362 | 41526 | 54606 | 00433 | 66353 | 04542 | 45040 | 31601 | 11425 | 05152 | 44413 | 36401 |
| 65003 | 42202 | 15105 | 50414 | 66010 | 03544 | 40243 | 10522 | 01145 | 64051 | 51006 | 12206 | 32040 | 62414 |
| 20334 | 51236 | 25062 | 16255 | 65356 | 63146 | 06012 | 55441 | 30064 | 31666 | 34023 | 65301 | 03016 | 64512 |
| 30634 | 34015 | 42664 | 05656 | 51343 | 12640 | 43614 | 21302 | 00111 | 05035 | 40011 | 43062 | 11264 | 31252 |
| 31526 | 03620 | 06124 | 56142 | 46304 | 10245 | 36052 | 60325 | 62301 | 02414 | 10061 | 25216 | 15456 | 24056 |
| 50525 | 56460 | 31102 | 04040 | 25165 | 64066 | 05623 | 25601 | 20561 | 52010 | 12152 | 03204 | 60222 | 23202 |
| 11334 | 04464 | 12503 | 50062 | 56164 | 25162 | 00341 | 51450 | 61525 | 04665 | 30362 | 16202 | 03055 | 36032 |
| 16312 | 42111 | 26444 | 63523 | 26433 | 34225 | 62110 | 20054 | 04255 | 13142 | 00163 | 06645 | 56511 | 13526 |
| 01515 | 13111 | 21503 | 23251 | 33653 | 15010 | 01600 | 23526 | 21326 | 52313 | 36111 | 30510 | 51441 | 01035 |
| 04423 | 44205 | 04155 | 26335 | 00526 | 23110 | 51664 | 44343 | 62221 | 22234 | 34046 | 51344 | 61430 | 52545 |
| 21550 | 25151 | 56631 | 64115 | 36506 | 35506 | 64030 | 66500 | 03663 | 23331 | 26312 | 00256 | 03255 | 56324 |
| 02524 | 05445 | 61414 | 05633 | 25355 | 01642 | 24320 | 21001 | 11221 | 15546 | 53401 | 66061 | 63256 | 53410 |
| 06461 | 55643 | 43114 | 62635 | 02013 | 11425 | 24126 | 16334 | 10240 | 41612 | 55236 | 34411 | 21213 | 46162 |
| 53502 | 61462 | 31216 | 22253 | 20132 | 61626 | 05600 | 16515 | 02354 | 33136 | 43346 | 51320 | 44120 | 30421 |
| 11261 | 45623 | 51342 | 36346 | 00604 | 10305 | 20235 | 23454 | 51242 | 55604 | 55332 | 53562 | 43453 | 06552 |
| 63113 | 62161 | 52510 | 14135 | 61202 | 04361 | 61626 | 33522 | 64500 | 00430 | 51005 | 64504 | 10603 | 64016 |
| 15255 | 00404 | 32526 | 33662 | 50304 | 62034 | 15442 | 33406 | 55224 | 40300 | 02521 | 43522 | 01422 | 43165 |
| 12165 | 54020 | 64125 | 51511 | 05664 | 44655 | 34151 | 10212 | 25504 | 02404 | 25356 | 53200 | 30102 | 03303 |
| 31434 | 44151 | 63346 | 61312 | 40463 | 10013 | 26644 | 52341 | 35655 | 34412 | 44203 | 22246 | 34225 | 45602 |
| 60664 | 22655 | 35151 | 14465 | 06335 | 66350 | 50201 | 34113 | 24603 | 00511 | 51264 | 61110 | 23416 | 13532 |
| 02445 | 01462 | 03022 | 45324 | 56664 | 66200 | 20144 | 55503 | 62311 | 52461 | 03263 | 34241 | 15246 | 56062 |
| 01066 | 46665 | 05643 | 16554 | 33610 | 63553 | 13032 | 33035 | 06106 | 33656 | 13125 | 13503 | 06601 | 33516 |
| 32443 | 22541 | 60313 | 53610 | 03234 | 22441 | 05552 | 52646 | 43515 | 21330 | 64315 | 64221 | 33464 | 31100 |
| 64032 | 21012 | 40166 | 41360 | 26455 | 04633 | 20026 | 14245 | 23246 | 10045 | 46142 | 32523 | 60403 | 44253 |
| 43555 | 35326 | 21022 | 46201 | 65344 | 65116 | 11542 | 03242 | 25552 | 04524 | 05543 | 31233 | 46422 | 00553 |
| 14115 | 23433 | 36453 | 22534 | 35606 | 62440 | 16533 | 50505 | 51411 | 61200 | 63633 | 05420 | 16566 | 00256 |
| 16354 | 34525 | 33353 | 14403 | 61303 | 20114 | 36525 | 23243 | 55546 | 64000 | 54152 | 63405 | 04506 | 65650 |
| 16225 | 66551 | 61404 | 26214 | 41206 | 56163 | 35463 | 35403 | 03446 | 42005 | 26115 | 60540 | 25624 | 56330 |
| 21523 | 00452 | 10113 | 36363 | 40214 | 26222 | 64412 | 56505 | 21633 | 60406 | 32216 | 03425 | 06002 | 13236 |
| 51345 | 22552 | 12156 | 02444 | 02200 | 22403 | 43636 | 44564 | 06614 | 46116 | 26122 | 10052 | 52645 | 30232 |
| 24265 | 10205 | 21422 | 66455 | 20054 | 24430 | 66432 | 50100 | 05064 | 46610 | 43564 | 00406 | 40624 | 02636 |
| 55425 | 56215 | 64613 | 23415 | 24450 | 66665 | 40502 | 64565 | 45331 | 33324 | 41533 | 00034 | 31354 | 16510 |

TAULA 8: 5 038 dígits septimals de $p := (2; 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$.

tració del teorema del punt fix utilitzant el lema de Sperner. També aquí hi ha un substrat finit: el lema de Sperner i un pas al límit.

El teorema del punt fix de Brouwer diu que en un tetràedre de dimensió $n$ (o $n$-símplex) tota funció contínua del tetràedre en si mateix té un punt fix. Pensarem en un triangle, $n = 2$, però la demostració general és essencialment la mateixa.

Si el triangle $T$ posseeix una funció contínua $f : T \to T$ sense cap punt fix, aleshores, per a cada punt $t \in T$ podem definir un punt $r(t) \in \partial T$ (frontera de $T$) per la projecció de $t$ des de $f(t)$ a $\partial T$. Aquesta funció $r : T \to \partial T$ és contínua i és la identitat a $\partial T$: en efecte, si $t \in \partial T$, quan projectem $t$ des de $f(t)$ obtenim $t$ perquè $t$ ja és a $\partial T$. La funció $r$ es diu que és una retracció de $T$ a la seva frontera $\partial T$. Es tracta de veure que aquesta mena de retraccions no són possibles.

Suposem que els vèrtexs de $T$ els tenim marcats 0, 1 i 2 i sigui $r : T \to \partial T$ una retracció. Aleshores, podem assignar a tot punt $t \in T$ un nombre 0, 1 o 2 de la manera següent:

Si $r(t) \in [0,1)$, posem $n(t) = 0$;
Si $r(t) \in [1,2)$, posem $n(t) = 1$;
Si $r(t) \in [2,0)$, posem $n(t) = 2$.

Observem que els punts de $[0,1]$ tenen assignat el 0 o l'1; els de $[1,2]$ tenen assignat l'1 o el 2; i els de $[2,0]$ tenen assignat el 2 o el 0. Els punts de l'interior de $T$ $(= T \setminus \partial T)$ tenen assignat el nombre 0, 1 o 2.

El substrat finit del teorema que diu que no existeix una retracció d'aquestes és el *lema de Sperner* que enunciaré per un triangle, però és igualment vàlid per a un $n$-símplex, amb les alteracions òbvies. Aquest lema diu així: considerem el triangle $T = (0,1,2)$ triangulat (és a dir, $T$ és una unió de triangles, en nombre finit, de manera que si dos triangles es toquen ho fan exactament al llarg d'una cara comuna). Suposem que els vèrtexs de l'aresta $[0,1]$ estan marcats amb 0 o amb 1, els de l'aresta $[1,2]$ ho estan amb 1 o 2, els de l'aresta $[2,0]$ ho estan amb 2 o 0 i els de $T \setminus \partial T$ estan marcats amb 0, 1 o 2, indistintament. *Aleshores, hi ha un triangle de la triangulació de $T$ que té els vèrtexs marcats amb tres xifres diferents entre si.* La demostració que segueix, bellíssima, la vaig llegir fa més de vint anys, però no recordo on.

Prop del costat $[0,1]$ de $T$ prenem un vèrtex nou $V$ exterior al triangle $T$ i li assignem el nombre 0. Després unim $V$ amb els vèrtexs de la triangulació de $T$ que hi ha sobre l'aresta $[0,1]$. D'aquesta manera obtindrem un quadrilàter $C$ triangulat $(V,0,2,1)$ i numerat $(0,0,2,1)$. Veiem que $C$ només posseeix una aresta $[0,1]$ a la seva frontera. Ara farem un joc. Ens trobem fora del quadrilàter $C$ i entrarem al seu interior i hi deambularem seguint les següents regles senzilles:

1. Només podem travessar arestes marcades $[0,1]$.
2. Un cop hem travessat una aresta, ja no la podem tornar a travessar.

Comencem la nostra passejada i, necessàriament, entrem al recinte $C$ per l'única aresta $[0,1]$ que hi ha a la frontera. Això implica que, si seguim les regles, ja mai més no podrem tornar a sortir de $C$. El procés de creuar arestes $[0,1]$ s'acabarà més tard o més d'hora, perquè només n'hi ha un nombre finit. Quan ja no en puguem creuar cap més, això voldrà dir que hem entrat per una aresta $[0,1]$ en un triangle en què l'altre vèrtex és 2. Aquest és, doncs, un triangle marcat amb $(0,1,2)$ i no és dels nous (els que tenen un vèrtex a $V$) perquè cap d'aquests triangles nous està marcat

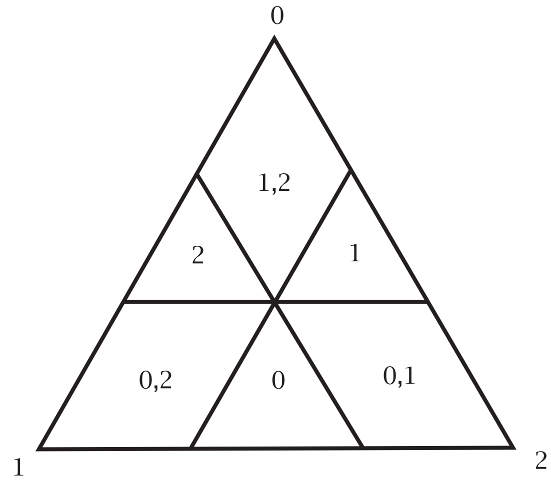


FIGURA 2

amb $(0,1,2)$. Hem trobat un triangle de la triangulació de $T$ marcat amb $(0,1,2)$, tal com volíem demostrar.

Ara ve el procés de pas al límit. Prenem triangulacions $T_1, T_2, T_3, \ldots$ de $T$ que són cada cop més i més fines. Es pot definir la *mida* d'una triangulació $T_i$ com la del seu triangle més gran (el que posseeix dos punts que maximitzen la distància). (No és difícil de veure que les successives triangulacions baricèntriques de $T$ tenen mides que tendeixen a zero.)

La funció $n : T \to \{0,1,2\}$ assigna als vèrtexs de $T_i$ nombres que compleixen les hipòtesis del lema de Sperner. Per tant, $T_i$ posseeix un triangle $A_i$ marcat amb $(0,1,2)$. La successió dels baricentres $B_i$ dels $A_i$ és infinita i, essent $T$ compacte, aquesta successió tindrà un punt límit $Q$. A tot entorn de $Q$ hi ha infinits baricentres, per tant, a tot entorn de $Q$ hi ha un triangle $A_i$. Tenim que $Q$ és el límit dels vèrtexs d'aquests triangles, d'on surt que $Q$ és el límit de punts marcats amb un 0 i, per continuïtat, com que els punts marcats amb un 0 van a l'interval $[0,1)$, tindrem que $r(Q) \in [0,1]$. Però $Q$ és també el límit de punts marcats amb un 1, d'on resulta que $r(Q) \in [1,2]$; i $Q$ és també el límit de punts marcats amb un 2 i tenim que $r(Q) \in [2,0]$. Això és una contradicció que ens diu que $r$ no existeix i, en conseqüència, el teorema del punt fix de Brouwer és correcte.

L'argument és, de fet, constructiu. Es pren una triangulació $T_1$ de $T$; si $f : T \to T$ té un vèrtex fix, ja hem acabat. En el cas contrari, es pren una triangulació $T_2$ més fina que $T_1$, etc. Si a cap de les triangulacions $T_1, T_2, T_3, \ldots$ cada cop més fines, hi ha un vèrtex fix, podem variar lleugerament l'argument anterior així: assignem als punts de $T$ que no siguin fixos per $f$ un nombre 0, 1 o 2 de la manera següent. Prenem la fletxa $(t, f(t))$ i la traslladem, paral·lelament, al baricentre de $T$, de manera que $t$ ocupi el baricentre.

La figura 2 indica el nombre que cal assignar a $t$.

Es compleixen així les hipòtesis del lema de Sperner per a les triangulacions $T_1, T_2, T_3, \ldots$, i a cada $T_i$ hi haurà un triangle $A_i$ marcat amb $(0,1,2)$. El $\lim_{i\to\infty} A_i$ és un punt fix $Q$ perquè hi convergeixen successions de zeros, uns i dosos, i com que la fletxa $(Q, f(Q))$ no pot apuntar en tres direccions diferents, resulta que no hi ha cap fletxa a $Q$: $f(Q) = Q$. Aquest argument prova directament el teorema del punt fix de Brouwer, però no el teorema més fort de la inexistència de la retracció de $T$ a $\partial T$.

En els cursos de topologia algebraica es demostra la inexistència de la retracció $r$ observant que el diagrama commutatiu de funcions contínues

$$\begin{array}{ccc} \partial T & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \partial T \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \| \\ T & \xrightarrow[r]{} & \partial T \end{array}$$

(on $j$ és la inclusió canònica), indueix, mitjançant el functor d'homologia singular entera, un triangle commutatiu de grups abelians i homomorfismes

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\partial T; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(\partial T; \mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle j_*}\downarrow & & \| \\ H_{n-1}(T) \cong 0 & \xrightarrow[r_*]{} & \mathbb{Z} \cong H_{n-1}(\partial T; \mathbb{Z}) \end{array}$$

que és impossible ($T$ té dimensió $n$). El que succeeix és que en aquest argument el substrat finit i el pas a l'infinit han estat escamotejats pel functor d'homologia. En quin punt de la definició d'homologia té lloc el substrat finit i el pas al límit és una cosa que cal explicar en un curs d'homologia. Però es tracta d'un punt molt subtil i pot invalidar tot el resultat del curs, si no es fa prou bé.

## 8 Del finit a l'infinit en la teoria de nusos

Abandonarem ara la «topologia contínua» i anirem a la de varietats. Es tracta ara de mostrar que el substrat finit de l'existència d'una 3-varietat oberta i contractible, no homeomorfa a $\mathbb{R}^3$, és la teoria de nusos. D'aquesta manera col·locarem en un mateix nivell la teoria de nombres, la combinatòria i la teoria de nusos. Succeeix que entre aquestes tres teories hi ha interrelacions múltiples i molt belles, que explicaré cap al final.

Fem una mica d'història, que servirà per a centrar el problema que ara tenim entre mans. Som a finals del segle passat, quan la topologia neix del cervell de Poincaré, després d'un període de gestació que ocupa la meitat del segle. És l'època en què Poincaré ha demostrat el seu teorema de dualitat per a varietats triangulades i tancades. Aleshores, en el seu «Segon complement a l'Analysis Situs»[10]conjectura que una 3-varietat (compacta i sense frontera) ha de ser homeomorfa a la 3-esfera $S^3$ si té els mateixos grups d'homologia que $S^3$. Quatre anys més tard, demostra la falsedat de la seva pròpia conjectura en el seu «Cinquè complement a l'Analysis Situs»[11] mitjançant el famós contraexemple que avui du el nom de *varietat de Poincaré*. Es tracta d'una 3-varietat tancada $P^3$ que és homològicament com $S^3$, però en difereix en el grup fonamental (definit expressament per Poincaré). El grup fonamental de

10 *Proc. London Math. Soc.* 32 (1900), 277–308.
11 *Rendiconti Circ. Mat. Palermo.* 18 (1904), 45–110.

$P^3$ és una extensió central del grup cíclic de dos elements pel grup alternat de cinc xifres $A_5$. El grup fonamental de $P^3$ resulta ésser, doncs, un grup finit de cent vint elements, mentre que el de $S^3$ consta d'un únic element.[12] El contraexemple $P^3$ apareix en l'article de Poincaré citat abans i també, reproduït mostrant la seva simetria, en el meu article en català citat. És un diagrama de Heegaard que sempre ha suscitat en mi una gran perplexitat puix que Poincaré no dóna ni la més lleu indicació de com el pot haver obtingut, i no puc pas creure que es pugui deure a l'atzar.

Havent vist el mateix Poincaré que hi ha 3-esferes homològiques, com ara $P^3$, no homeomorfes a $S^3$, llença al final del seu «Cinquè complement» el famós repte que segueix obert, per a la vergonya dels geòmetres. Poincaré diu, en el millor estil gallec: «Restaria estudiar la pregunta: és possible que el grup fonamental de $V^3$ es redueixi a la substitució idèntica, sense que $V^3$ sigui $S^3$?» L'expectació negativa a aquesta pregunta és el que hem anomenat *pregunta* o *conjectura de Poincaré.*

Si no vaig errat, la primera «demostració» falsa publicada de la conjectura de Poincaré (una de les moltes que després s'han anat trobant), es deu a J. H. C. Whitehead. El 1934 va publicar un article, que es pot trobar en les seves obres completes, on, entre altres coses, «demostra» la conjectura de Poincaré. Whitehead va comprendre immediatament el seu error, perquè la seva demostració proporcionava un resultat més general que el que es buscava, puix que valia per a 3-varietats obertes, a més de per a les tancades; una situació similar a la trampa de Waldhausen que hem discutit abans. Whitehead, però, no va caure a la seva pròpia trampa i va sospitar de seguida que el seu argument era incorrecte. Amb un enginy extraordinari, va construir ràpidament una 3-varietat $W^3$ (la varietat de Whitehead) oberta (no compacta, sense frontera) i contractible (del tipus d'homotopia d'un punt), però no homeomorfa a $\mathbb{R}^3$.

Cal observar que el compactificat d'Alexandroff de $\mathbb{R}^3$ és $S^3$; el compactificat d'Alexandroff de $W^3$ no és una 3-varietat. Si ho fos, tindríem el desitjat contraexemple a la conjectura de Poincaré. En poques paraules, Whitehead va demostrar que la generalització de la conjectura de Poincaré en varietats obertes és falsa; un resultat anàleg al de Boileau-Zieschang que hem vist abans.

Es tracta ara de descriure el contraexemple $W^3$ de Whitehead. S'obté per un pas a l'infinit amb un substrat finit donat per la teoria de nusos.

Comencem estudiant el sistema de nusos (en direm un lligam) de la figura 3, que es coneix com a lligam de Whitehead.

1. El nus $N_2$ és trivial i la corba $N_1$, que és a $S^3\backslash N_2$, té nombre de lligam zero amb $N_2$ i és, per tant, homòloga a zero a $S^3\backslash N_2$. (Es pot veure directament que és homòloga a zero observant que $N_1$ és la vora d'un tor al complement de $N_2$.) Essent $N_2$ trivial, s'infereix que $N_1$ és també homòtopa a zero a $S^3\backslash N_2$. Aquesta és una propietat senzilla que utilitzarem més endavant.
2. Prenem un petit entorn tubular $T^1$ de $N_1$. Demostrarem ara que

$$i_\sharp : \pi_1(\partial T^1) \to \pi_1(S^3\backslash L),$$

l'homomorfisme induït entre els grups de Poincaré per la inclusió canònica $i : \partial T^1 \to S^3\backslash L$, és injectiu. Calculem $\pi_1(S^3\backslash L)$. Prenent els meridians $x$ i $y$ de

12 El lector interessat en aquestes coses pot consultar el meu article en català «Punts de vista sobre el problema de Poincaré» a *El desenvolupament de les matemàtiques al segle* XIX, Arxius de la Secció de Ciències, LXXV, IEC 1984; o el meu llibre en anglès *Tessel·lacions clàssiques i 3-varietats*, Springer, 1987.

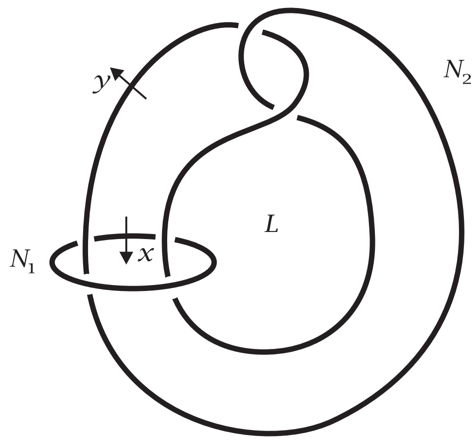


FIGURA 3

la figura 3, obtenim la presentació de $\pi_1(S^3\backslash L)$ següent:

$$\langle x, y \quad | \quad x(yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y) = (yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y)x\rangle.$$

El grup fonamental de $\partial T^1$ està generat per una corba paral·lela a $N_1$ que anomenarem $m$, i per la corba $x$ que anomenarem $l$. La corba $m$, pensada a $\pi_1(S^3\backslash L)$, representa la paraula $x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y$. Hem de demostrar que si $i_\sharp(m^a t^b)$ és l'element trivial, aleshores $a = b = 0$. Definim l'homomorfisme $\pi_1(S^3\backslash L) \to C_2 * C_2$ mitjançant $x \mapsto \beta\alpha$, $y \mapsto \alpha$, on $\alpha$ genera el primer factor $C_2$ i $\beta$ el segon factor $C_2$ del producte lliure $C_2 * C_2$. Pot veure's que aquesta assignació és un homomorfisme perquè l'única relació $xw = wx$, on $w = yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y$ va a la identitat. En efecte:

$$w \mapsto \alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha = (\beta\alpha)^3.$$

En aquest homomorfisme $m \mapsto (\beta\alpha)^4$. Com que la paraula $\beta\alpha$ és reduïda, $(\beta\alpha)^4$ té ordre infinit a $C_2 * C_2$. Suposem que $m^a l^b$ és contractible a $S^3\backslash L$. Aleshores, també és contractible a $S^3\backslash N_1 \supset S^3\backslash L$. Però la corba $m$ és contractible a $S^3\backslash N_1$ i se segueix que $l^b$ és contractible a $S^3\backslash N_1$; essent $l = x$ un generador de $\pi_1(S^3\backslash N_1) \cong \mathbb{Z}$, deduïm que $b = 0$. És a dir, $m^a$ és contractible a $S^3\backslash L$, la qual cosa implica que $(\beta\alpha)^{4a}$ és trivial, i això només passa si $a = 0$, perquè $(\beta\alpha)^4$ té ordre infinit a $C_2 * C_2$. D'aquesta manera hem demostrat que $i_\sharp : \pi_1(\partial T^1) \to \pi_1(S^3\backslash L)$ és injectiva.

3. Encara necessitarem un tercer resultat de la teoria de nusos. Demostrarem que si $T_2$ és un petit entorn tubular de $N_2$, també és injectiu l'hoomorfisme següent induït per la inclusió:

$$\pi_1(\partial T_2) \rightarrowtail \pi_1(S^3\backslash L).$$

La raó és ben òbvia perquè el lligam de Whitehead és *intercanviable*: hi ha una involució de $(S^3, L)$ que envia $N_1$ a $N_2$, i recíprocament (vegin la figura 4).

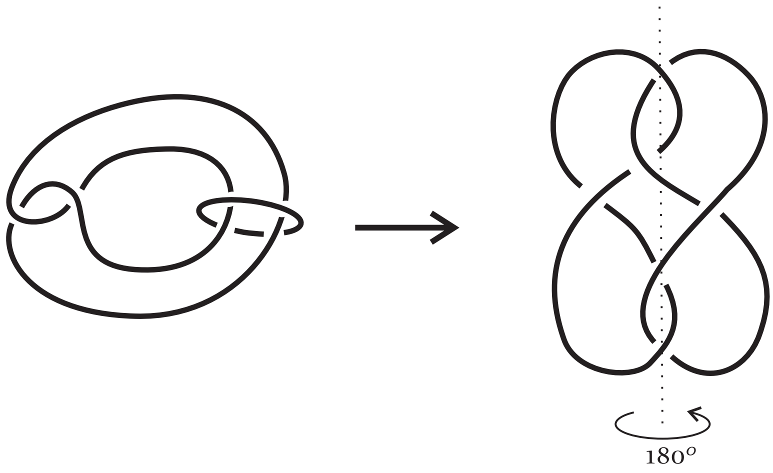


FIGURA 4

Fins aquí, el substrat finit de la nostra construcció infinita. Ja és hora de definir la famosa varietat de Whitehead. Es parteix d'un tor sòlid $T_1$ contingut a $S^3$ i desnuat (figura 5).

Dintre de $T_1$ prenem un tor sòlid $T_2$, tal com s'indica en la figura 5, *i es procedeix inductivament amb $T_2$ com si fos $T_1$*. Aleshores, $S^3 \setminus \bigcap T_i$ és una 3-varietat oberta i contractible diferent de $\mathbb{R}^3$, que anomenarem $W^3$: la varietat de Whitehead. Parin esment que $W^3$ és el resultat de treure de $S^3$ un tancat compacte $\bigcap T_i$, d'on resulta que $W^3$ és un obert de $S^3$ i és, per tant, una varietat triangulable (amb una infinitat de tetràedres). La naturalesa de $\bigcap T_i$ no és pas fàcil d'entendre. El meridià $m$ de la figura 5 és la vora d'un disc a $T_1$ que talla $\bigcap T_i$ en un conjunt de Cantor. És a dir, $\bigcap T_i$ és una mena de conjunt de Cantor $\times \mathbb{R}$ lligat amb si mateix d'una manera molt complicada.

$W^3$ pot ésser descrita d'una altra manera. Anomenem $T^i$ a la clausura de $S^3 \setminus T_i$. Aleshores $W^3 = \bigcup T^i$. Observin que $T^{i-1} \subset T^i$. Vegem ara com es relaciona aquesta construcció amb el lligam de Whitehead. Comparant la figura 5 amb la figura 3, s'observa que $N_1 = m$ i $N_2$ és l'ànima de $T_2$. Cal notar que $T^1$ (l'exterior de $T_1$ a $S^3$) té $N_1 = m$ per ànima.

La propietat 1 del lligam $L$ implica, per tant, que $\pi_1(T^1)$, generat per $N_1 = m$, és enviat a zero per la inclusió canònica:

$$i_1 : \pi_1(T^1) \to \pi_1(T^2),$$

perquè $N_1$ és homòtop a zero a $S^3 \setminus N_2$, que té el tipus d'homotopia de la clausura de $S^3 \setminus T_2$, és a dir, $T^2$.

Puix que totes les parelles $(T^2, T^1), \ldots, (T^n, T^{n-1}), \ldots$ són homeomorfes, obtenim per inducció que tots els homomorfismes $i_m$ induïts per inclusió: $\pi_1(T^1) \xrightarrow{i_1} \pi_1(T^2) \xrightarrow{i_2} \pi_1(T^3) \xrightarrow{i_3} \cdots$ són zero.

Donat un llaç a $W^3 = \bigcup T^i$, com que és un compacte, necessàriament ha de caure dintre d'algun $T^i$, la qual cosa implica que la seva imatge a $T^{i+1}$ és homòtopa a zero. Així deduïm que $\pi_1(W^3)$ és trivial. D'altra banda, si prenem $f : S^m \to W^3$ contínua,

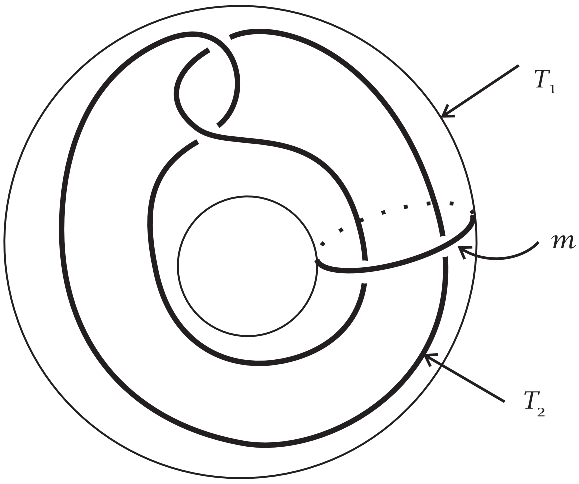


FIGURA 5

$f(S^m)$ estarà contingut, per compacitat, en algun $T^i$. Però $T^i$ té el tipus d'homotopia de $S^1$ i $f$ és homòtopa a zero a $T^i$ (i, per tant, a $W^3$). Això demostra que $\pi_m(W^3) = 1$, per a tot $m \geq 1$. Com que $W^3$ és un políedre (un obert de $S^3$), es dedueix que $W^3$ és contractible.

Vegem ara que $W^3$ no és homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. La diferència es troba en l'infinit. En el cas de $\mathbb{R}^3$, si es compactifica aquest espai amb un punt denotat $\infty$, els entorns de $\mathbb{R}^3 + \infty$ al voltant del nou punt són boles tals que, sense $\infty$, tenen el tipus d'homotopia de la 2-esfera i són, per tant, simplement connexes. En altres paraules, $\mathbb{R}^3$ és una unió creixent de boles, mentre que $W^3$ és una unió creixent de tors sòlids, amb la peculiaritat que el tor enèsim es posa dintre del tor $(n+1)$-èsim com $T_2$ ho fa dintre de $T_1$. Per això mateix, podem esperar que $T^1$ no estigui contingut a cap compacte amb complement (entorn de $\infty$ a la compactificació d'Alexandroff) que sigui simplement connex. És a dir, $W^3$ *no és simplement connexa a l'infinit.* Per tant, per a distingir $\mathbb{R}^3$ de $W^3$ utilitzarem la següent propietat òbvia de $\mathbb{R}^3$: tot compacte de $\mathbb{R}^3$ està contingut en un altre compacte (una bola) amb complement simplement connex (i. e. que té grup fonamental trivial i és connex).

Vegem ara que aquesta propietat topològica de $\mathbb{R}^3$ no és pas compartida per $W^3$. En efecte, vegem que el compacte $T^1$ no està contingut a cap compacte $K$ de $W^3$ que tingui complement simplement connex. Suposem que el contrari és cert.

Jugarem ara amb les dues descripcions de $W^3$. Recordem que

$$W^3 = S^3 \backslash \bigcap T_i = \bigcup T^i.$$

Si $T^1$ està contingut en un compacte, aquest compacte $K$ està contingut en algun $\overset{\circ}{T}{}^m$ i, per tant, $W^3 \backslash K \supset W^3 \backslash \overset{\circ}{T}{}^m = T_m$. Aleshores, el meridià $x$ de $T_m$ seria un element de $\pi_1(W^3 \backslash K) = 0$ i aquest meridià seria contractible a

$$W^3 \backslash K \subset W^3 \backslash T^1 \subset \overline{W^3 \backslash T^1} = T_1 \backslash \bigcap T_i.$$

Vegem ara que això és fals. En efecte, tenim els homomorfismes induïts per les inclusions:

$$\pi_1(T_1\backslash T_2) \xrightarrow{i_2} \pi_1(T_1\backslash T_3) \xrightarrow{i_3} \pi_1(T_1\backslash T_4) \to \cdots \to \pi_i(T_1\backslash \bigcap T_i) = \varinjlim \pi_1(T_1\backslash T_i)$$

i el meridià $x$ de $T_m$ cau dintre de $T_1\backslash T_m$. N'hi ha prou de comprovar que:

(A) $j_\sharp : \pi_1(\partial T_m) \rightarrowtail \pi_1(\overline{T_1\backslash T_m})$ és injectiu, i $j_\sharp$ és l'homomorfisme induït per la inclusió. D'aquesta manera, $j_\sharp(x) \neq 0$ a $\pi_1(T_1\bar{\backslash} T_m)$.

(B) La successió d'homomorfismes induïts per inclusió $i_2, i_3, i_4, \ldots$ és una successió d'injeccions. Aleshores, $j_\sharp$ no pot morir a cap $\pi_1(T_1\backslash T_i)$, $i = 2, 3, \ldots$ i representa, per tant, un element no trivial del límit directe del sistema $i_1, i_2, i_3, \ldots$, que és $\pi_1(T_1\backslash T_i)$. Així, $x$ no és contractible a $T_1\backslash \bigcap T_i$, tal com volíem demostrar.

Demostrarem tot això per inducció, usant el teorema de Van Kampen. Suposem que $\pi_1(T_{n-2}\backslash T_{n-1}) \to \pi_1(T_1\backslash T_{n-1})$ és injectiva per a tot $n > 3$ i vegem que és cert per a $n + 1$. (Per a $n = 3$, l'homomorfisme és $\pi_1(T_1\backslash T_2) \to \pi_1(T_1\backslash T_2)$, que és la identitat.)

Analitzem què significa la propietat 2 de $L$. Dèiem que

$$\pi_1(\partial T^1) \rightarrowtail \pi_1(S^3\backslash L),$$

que equival a $\pi_1(\partial T_1) \rightarrowtail \pi_1(T_1\backslash T_2)$. La propietat 3 de $L$ diu que

$$\pi_1(\partial T_2) \rightarrowtail \pi_1(S^3\backslash L),$$

que equival a $\pi_1(\partial T_2) \rightarrowtail \pi_1(T_1\backslash T_2)$. La propietat 3 i la hipòtesi d'inducció diuen que la composició següent és injectiva:

$$\pi_1(\partial T_{n-1}) \overset{3}{\rightarrowtail} \pi_1(T_{n-2}\backslash T_{n-1}) \overset{\text{inducció}}{\rightarrowtail} \pi_1(T_1\backslash T_{n-1})$$

i aquesta és la propietat (A) que volíem demostrar.

La propietat 2 diu que aquest homomorfisme és injectiu:

$$\pi_1(\partial T_{n-1}) \overset{2}{\rightarrowtail} \pi_1(T_{n-1}\backslash T_n).$$

Fem esment que la intersecció $(T_1\backslash T_{n-1}) \bigcap (T_{n-1}\backslash T_n)$ té el tipus d'homotopia de $\partial T_{n-1}$. Pel teorema de Van Kampen, les dues fletxes $\phi$ i $\psi$ del diagrama següent són injectives:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\partial T_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(T_1\backslash T_{n-1}) \arrow[d, "\phi"] \\
\pi_1(T_{n-1}\backslash T_n) \arrow[r, "\psi"'] & \pi_1(T_1\backslash T_n)
\end{tikzcd}$$

perquè es té que

$$(T_1\backslash T_{n-1}) \bigcup (T_{n-1}\backslash T_n) = T_1\backslash T_n.$$

La fletxa $\psi$ és el pas següent de la inducció, que queda així provada, mentre que la fletxa $\phi$ és l'afirmació (B) que volíem demostrar.

Per tant, $W^3$ no és homeomorf a $\mathbb{R}^3$.

Una propietat notable de $W^3$ és que $W^3 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^4$. El lector sabrà fer això com a exercici.

He escollit aquest exemple per a il·lustrar com la teoria de nusos es troba en el centre dels problemes de la topologia de les 3-varietats obertes. També es troba en el centre de la topologia de les 4-varietats. El propi M. Freedman, el que va demostrar la conjectura de Poincaré topològica en dimensió 4, va utilitzar de manera essencial la varietat de Whitehead.[13] És una bona ironia del destí que allò que va servir de contraexemple a una «demostració» de la conjectura de Poincaré en dimensió 3 va servir també per a demostrar-la en dimensió 4!

No és pas aquest el lloc on explicar de quina manera intervé $W^3$ en aquest problema 4-dimensional. El lector interessat pot llegir M. Freedman i F. Quinn, *Topologia de 4-varietats*, publicat per la Princeton University Press. Però vull indicar aquí que la teoria de nusos és tan essencial per a la geometria com ho és la teoria de nombres per a tota la matemàtica.

Podem trobar altres aspectes del tema de què hem tractat aquí al si del càlcul infinitesimal, però es tracta d'exemples tan coneguts i debatuts que en tinc prou d'adreçar el lector a algun dels múltiples llibres que expliquen el desenvolupament del càlcul des d'un punt de vista històric o, com en el llibre citat d'O. Toeplitz, genètic.

Un altre tema més dur, però molt interessant, és el de la curvatura a superfícies polièdriques i les seves relacions amb superfícies suaus. Cal remuntar-se fins a Descartes i acabar amb els treballs d'Alexandroff i Pogorelov, si ens volem fer una idea cabal de la meravellosa bellesa d'aquesta relació.

I, per acabar, voldria dir que entre els substrats de les anteriors construccions infinites hi ha relacions sorprenents. Per exemple, entre la teoria de nusos i la combinatòria hi va haver tot de relacions importants a l'inici de la teoria de nusos (em refereixo als treballs de Reidemeister, Goeritz, Alexander, Fox i l'escola japonesa contemporània de Fox), però aquesta relació ha tingut una revifada important ben recentment, quan un nombrós grup de matemàtics ha creat una nova branca de la teoria de nusos que jo anomenaria *teoria combinatòria de nusos*. Aquests treballs, que són encara en un estat incipient i s'assemblen molt als de la clàssica teoria de grafs, han interessat molts físics teòrics. (En un treball del professor Antonio Fernández Rañada sobre l'explicació del llamp en bola, aparegut a *Nature*, s'hi trobarà una curiosa aplicació de tot això a la física.) Aquesta mútua relació amb els físics ha proporcionat valuoses idees que també han trobat (mitjançant la teoria de nusos) la seva aplicació en la troballa de nous invariants de les 3-varietats tancades.

També recentment, la teoria de nusos ha tingut un poderós aliat en la geometria riemanniana, de la mà de W. Thurston. Aquest matemàtic ha generalitzat (revitalitzant unes recerques anteriors de Satake) el concepte de varietat amb la idea de calidoscopi (*orbifold*) on les singularitats són lligams i àdhuc grafs en una 3-varietat tancada. Ell ha posat de manifest la relació entre els nusos i la geometria hiperbòlica. Com que el grup de les isometries d'aquesta geometria és un grup de Lie complex, té sentit parlar dels seus subgrups aritmètics. És així com es troben relacions sorprenents entre els nusos i la teoria de nombres. Per exemple, el volum d'un nus «aritmètic» pot expressar-se mitjançant les funcions clàssiques de la teoria de nombres.

Qui primer va observar aquesta mena de relació va ser L. Bianchi a la fi del segle

13 Sóc del parer que la demostració de Freedman no ha passat encara l'examen crític d'un nombre *prou elevat* d'especialistes.

passat, quan va demostrar el fet següent:

> El nombre de punts cuspidals del quocient de l'espai hiperbòlic per l'acció del grup $\mathrm{PSL}(2, \mathcal{A}(D))$, on $\mathcal{A}(D)$ és l'anell dels enters del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, ($D$ és un enter positiu lliure de quadrats), coincideix amb el nombre de classes d'ideals de l'anell $\mathcal{A}(D)$.

Aquest bellíssim teorema relaciona els nusos amb els nombres, puix que els punts cuspidals poden completar-se, tancant-los amb un nus.

Una altra relació remarcable entre els nusos i els nombres és la que procedeix dels nusos fibrats i, en general, dels invariants cada cop més sofisticats que troben els matemàtics que es dediquen als nusos. Aquesta relació no ens ha de sorprendre pas per tal com tots dos objectes, nusos i nombres, sembla que es trobin a la base de tota la matemàtica.

Espero que algun dia tingui temps per a posar de manifest aquestes relacions tan variades i suggeridores. Ara, però, no voldria seguir abusant de la seva paciència, ans agrair-los l'atenció que m'han dedicat. Moltes gràcies.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
28040 Madrid, España
montesin@eucmax.sim.ucm.es