

El paper predictiu de la matemàtica a la ciència*

CARLES PERELLÓ VALLS

El progrés de la matemàtica i de la ciència van indissolublement units. Això arriba fins al punt que no es considera que una doctrina ateny el nivell científic si la matemàtica no hi té un paper important.

La matemàtica, en la ciència, hi té tant un paper descriptiu, és a dir, ens permet donar la quantitat, la forma, l'estructura, etc. dels factors i dels actors que intervenen en l'estudi científic, com un paper predictiu: una vegada descrit matemàticament l'objecte d'estudi, ens permet fer prediccions sobre el seu comportament. Aquesta xerrada la vull dedicar a aquest darrer aspecte.

Si mirem el passat, veiem que la matemàtica no comercial es va desenvolupar entre els mesopotàmics per poder fer efemèrides astronòmiques, d'utilització astrològica principalment. En aquesta línia d'utilització trobem els grecs, els indis i els àrabs, que van arribar, així, a crear tot un model del sistema solar, el qual va culminar amb el model copernicà i les lleis de Kepler. Observem, però, que en tot aquest desenvolupament, que porta a un bon principi el coneixement dels nombres, de la geometria i de la resolució d'equacions algebraïques, la capacitat predictiva dels models matemàtics es basa en una descripció d'un model que sembla un mecanisme de rellotgeria. És a dir, no hi ha lleis generals que descriguin les relacions entre el moviment i les característiques dels astres. A partir dels grecs clàssics, el que es fa és adaptar una hipòtesi sobre el tipus de moviment que estan forçats a seguir els planetes: cercles girant al voltant de punts que giren en cercles, i determinar els radis, les velocitats angulars i altres paràmetres a través de l'observació. Certament, això és ciència: donar un model que s'adapti al que s'observa. El problema és que el model copernicokeplerià no era prou bo, per exemple, per satisfer els navegants, que tenien no pas una dificultat sinó una impossibilitat per calcular la longitud geogràfica en què es trobaven. De fet, a la història de l'aplicació de la matemàtica, fora de les operacions aritmètiques elementals, hi ha ben pocs casos anteriors al final del segle XVII. Podem esmentar l'estudi que fa Arquimedes sobre l'estabilitat dels cossos flotants, els estudis de Galileu sobre els cossos caient sota l'efecte de la gravetat, i els treballs de Huygens sobre el moviment del pèndol cicloïdal i altres mecanismes

*Conferència pronunciada el 15 de novembre de 1997 a la Facultat de Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona amb motiu de la festivitat de Sant Albert Magne, patró de la Facultat.

de rellotgeria, i no sé si me'n deixo cap d'important. En aquestes tres aplicacions notem ja la forma d'aplicació de la matemàtica a la ciència i a la tècnica que han esdevingut paradigmàtiques: s'accepten unes lleis (de la natura?) que es considera que regeixen el fenomen que es vol descriure i es matematitzen, és a dir, se'ls dona una expressió matemàtica. A partir d'aquesta formulació matemàtica de la llei general es dedueix, dins del reialme mateix de la matemàtica, quin serà el comportament del sistema, i es reverteix el procés i es reinterpreten els resultats matemàtics en termes pràctics. En el cas d'Arquimedes, les lleis eren les de la palanca i el seu famós principi; les eines matemàtiques que modelaven el problema dels seus cossos flotants eren el càlcul de volums i de centres de gravetat, i a partir d'aquí, utilitzant només eines matemàtiques, era capaç de dir si el cos flotant es trabucaria si se'l treia de la posició desitjada. En el cas de Galileu, la cosa no era tan clara: encara no tenia la llei de gravitació, i el seu model es basava en la constatació, basada en l'experiment, que la velocitat en un cos que cau s'incrementa linealment amb el temps. Huygens, utilitzant els mateixos principis de Galileu, és capaç de determinar la isocronia del pèndol cicloïdal.

Tot i això, l'aplicació de la matemàtica a la darrerria del segle XVII no incloïa models matemàtics que permetessin predir el comportament dels fenòmens dinàmics amb què es trobava la filosofia natural del moment. El que ho va fer possible, i d'una manera esclatant, va ser el càlcul infinitesimal, que, després d'una gestació mil·lenària, veia la llum amb el guiatge de Newton i de Leibniz. I encara més, amb el guiatge de Newton era utilitzat per resoldre, almenys en principi, el problema de la predicció del moviment dels astres. No cal, aquí, exaltar la imatge de Newton, que ens proporciona al mateix temps les lleis de la natura, el mitjà d'expressar-les matemàticament i l'aplicació de la matemàtica al càlcul de l'òrbita d'aquests astres.

Certament, és molt notable la simplicitat de l'expressió matemàtica de les lleis newtonianes: d'una banda, la força iguala la massa per l'acceleració, que és la derivada segona de la posició, i de l'altra, aquesta força depèn de la posició dels astres proporcionalment al quadrat de l'invers de les distàncies i al producte de les masses. Aquestes fórmules, ben senzilles d'escriure, no són altra cosa que un sistema d'equacions diferencials de segon ordre. Un sistema impossible de resoldre explícitament si hi ha més de dos cossos en joc. (Amb dos cossos s'obté el resultat de Kepler!) Tot i això, el sistema permet predir el moviment dels planetes i dels satèl·lits mitjançant el càlcul numèric aproximat: és una habilitat que es desenvolupa necessàriament, ja que les equacions diferencials del moviment són monstres amb solucions d'un comportament conjunt complicadíssim. Gràcies a l'expressió matemàtica de les lleis del moviment dels astres i gràcies al tractament numèric, s'obtenen les efemèrides donant la posició dels astres del sistema solar amb gran precisió. Tanta, que quan els astres no es van comportar com s'havia predit, es van descobrir els culpables, sense haver-los vist amb els telescopis òptics sinó amb els matemàtics: Neptú i Plutó. I avui són aquestes mateixes eines matemàtiques les que permeten llançar amb precisió totes aquestes sondes i aquests satèl·lits que ens envolten.

El càlcul infinitesimal obre una caixa de Pandora, però no pas plena de coses nefastes, sinó d'aplicacions de la matemàtica que permetran entendre, en el sentit de reduir a lleis generals i a arguments racionals, molts dels fenòmens naturals amb què ens trobem.

Els segles XVIII i XIX veuen l'esclat de les aplicacions de la nova eina matemàtica. Un exponent d'aquesta evolució es troba en la figura d'Euler, que dona el model ma-

temàtic pel comportament dels cossos rígids (la baldufa i el giroscopi, per exemple) i també matematitza les lleis de la hidrodinàmica, on introdueix les equacions en derivades parcials. És interessant constatar que els treballs d'Euler en hidrodinàmica comencen amb el disseny d'una turbina hidràulica de reacció que havia d'accionar un molí de gra. També s'ocupa de la deformació i la vibració de barres elàstiques on dóna per primera vegada un exemple d'inestabilització per bifurcació amb l'arqueig de columnes.

Hem de fer notar que les aplicacions de la matemàtica no depenen tan sols dels progressos en la utilització de les eines matemàtiques, sinó que s'ajunten amb una millor comprensió dels fenòmens que tracten de modelitzar. És així, per exemple, amb la deformació dels cossos. En temps de Galileu i fins i tot d'Euler, no es tenia una bona teoria sobre com funcionava la relació entre esforços i deformació i, per tant, era impossible formular-ne les lleis matemàticament. Cauchy, ja al segle XIX, va unir la llei de Hooke amb la descripció tridimensional de l'estat d'esforços i deformacions en un punt, per tal d'expressar l'equilibri dels cossos elàstics. Aquestes descripcions tridimensionals consisteixen essencialment en la introducció dels tensors. Al segle XIX, a més de les aplicacions puntuals del càlcul, es van desgranant les expressions matemàtiques de les lleis de la natura, entre les quals certament destaquen la teoria de la calor de Fourier (on introdueix la seva coneguda i útil transformada), les lleis de l'electromagnetisme de Maxwell i la termodinàmica de Boltzman.

I finalment, pel que fa a les grans teories de la física, tenim, al segle XX, la teoria de la relativitat d'Einstein, que necessita el llenguatge de la geometria diferencial, i la mecànica quàntica, que comporta tot un desenvolupament de l'anàlisi funcional, grups de transformacions, teoria de representacions, etc.

La matemàtica, i en particular el càlcul infinitesimal, no sols és aplicable a la física, encara que és cert que les altres ciències han trigat més a adquirir el llenguatge matemàtic. Tot i això, aquest segle que ara acaba veu els models de Lotka i Volterra a la dinàmica de poblacions en forma d'equacions diferencials, que també modelen la cinètica de les reaccions químiques. En l'enginyeria destaca l'aplicació en molts camps de la teoria del control, de particular importància en la química, en els processos industrials i certament, en el llançament de naus i satèl·lits interplanetaris. Els models matemàtics s'apliquen avui a l'economia, a la meteorologia, a l'estudi global dels canvis climàtics, a la morfogènesi, etc. I quan aquests models pretenen predir el comportament dinàmic, són les equacions diferencials (i les seves generalitzacions) les que apareixen.

Els terrenys de la ciència en què els problemes dinàmics no s'han reduït a equacions diferencials han progressat poc en la seva aplicació pràctica. Això passa, per exemple, amb la teoria de la relativitat i amb la mecànica quàntica: partint de les seves lleis no podem resoldre, ni expressar, els problemes de la dinàmica que tractem amb les lleis de Newton.

Fet aquest esbós de l'escalada mútua entre la matemàtica i la seva aplicació a les ciències, deixeu-me fer-ne un altre, per força incomplet i esbiaixat, d'alguns camps d'interès actual on la utilització dels models matemàtics és del tot indispensable.

1. Disseny de vehicles, reactors, estructures, xarxes (elèctriques, per exemple), maquinària, elements electrònics, etc.
2. Predicció meteorològica.
3. Geodinàmica i astrofísica.

4. Dinàmica de poblacions.
5. Dinàmica econòmica.
6. Canvi climàtic global.

L'apartat 1 vol contenir la llista de les aplicacions més tecnològiques, és a dir, les que permeten construir els artefactes que estenen la capacitat humana en la seva interacció amb el món que l'envolta. Avui ja no es fan gaires models a escala per jutjar el comportament d'un avió supersònic, i molt menys d'un reactor nuclear: se'n fa un model matemàtic, moltes vegades en forma d'equació diferencial, i a partir d'aquest es treuen propietats (estabilitat, comportament asimptòtic, etc.), o se'n calculen solucions, tot sovint numèricament perquè no hi ha més remei.

Dins d'aquest apartat, jo diria que els problemes de base ja solen estar resolts: els principis que permeten fer-ne el model són prou coneguts i el tractament d'aquest model és possible amb més o menys dificultat. Hi ha excepcions i casos fronterers, és clar. Per exemple, els reactors de fusió presenten un repte, d'enginyeria i matemàtic, que encara no s'ha pogut superar. Sembla, però, que només és una qüestió de continuar millorant les tècniques i els recursos que s'hi esmercen per obtenir els primers reactors supercrítics. Aquí potser caldria fer notar que hi ha problemes, com el de la fusió controlada, en què no és possible fer ni tan sols un experiment a escala reduïda sense una gran quantitat de física i de matemàtica. En contrast amb aquesta manera matemàtica de fer, tenim que als segles XII, XIII i XIV es construïen catedrals que encara s'aguanten només amb càlculs i maquetes elementals. Això sí, amb una gran experiència pràctica d'èxits i de fracassos. Avui, crec que cap arquitecte no s'atreviria a fer una nau amb aquelles voltes sense uns bons càlculs de resistència estructural, els quals, certament, requereixen un bon ordinador i un bon programa.

En segon lloc, hem posat la predicció meteorològica. És una d'aquelles coses que ha portat de corcoll la humanitat des que existeix: el perill dels llamps, els problemes de la pagesia —plourà, pedregarà, gelarà, farà bo?—, el temps per navegar —recordem l'Armada Invencible—, el trànsit aeri, etc. De fet, les primeres utilitzacions que van tenir els ordinadors digitals (ENIAC) eren la predicció meteorològica, o potser hauríem de dir-ne la pretensió de la predicció meteorològica. Les lleis que governen aquesta barreja de gasos i líquids (i de vegades sòlids) que és l'atmosfera són prou conegudes: una barreja de termodinàmica i aerodinàmica. El model consisteix en un sistema prou complicat d'equacions en derivades parcials. Intractables teòricament, s'han d'integrar numèricament. I aquí apareixen les grans dificultats típiques d'aquesta i de moltes altres situacions. D'una banda, encara que coneguésim les condicions inicials i frontereres, és a dir, temperatures, vents, humitats, orografia, el sistema és d'una complexitat tan gran, que requereix simplificacions fortes per tal de ser resolt numèricament en un temps que permeti la predicció. D'altra banda, el sistema és molt sensible a petits canvis en les condicions inicials, la qual cosa fa que el comportament previst s'aparti força del real per poc que les condicions inicials i de frontera difereixin de les reals (que per força han de diferir), i també és sensible a les simplificacions. Que la situació és difícil de superar es pot jutjar del sistema de Lorenz, que tracta el problema de la convexió atmosfèrica amb grans simplificacions: obté un sistema de tres equacions polinomials de primer ordre. Resulta que aquest sistema, al calcular numèricament les solucions, mostra el fenomen del caos i dels atractors estranys! és a dir, que el problema de

la impossibilitat de calcular les solucions a llarg termini ja apareix en els sistemes mes senzills. I, és clar, es insalvable. Per tant, sembla que estem condemnats a no poder fer prediccions meteorològiques vàlides més enllà de molt pocs dies.

En el punt 3 hem posat la geodinàmica. Aquí ens referíem a diversos fenòmens de diferent magnitud: moviment del nucli de la Terra, camp magnètic terrestre (*Rikitake*), que mostren que els períodes d'inversió de la polaritat se succeeixen caòticament. També apareixeria aquí el fenomen, que també sembla posseir característiques caòtiques, conegut com «El Niño», que consisteix en un canvi en els corrents marins que afecten el clima global. L'astrofísica és tan complexa que només m'atreveixo a esmentar-la.

L'estudi de la dinàmica de poblacions que esmentem al punt 4 és un dels temes que s'estan tractant amb prioritat dins la matemàtica aplicada. Hem de fer notar, però, que s'aborden només els problemes més senzills, gairebé *naïfs*, perquè són els que es presten més a admetre un model tractable. Per això hi ha models per a l'explotació pesquera, per a la caça d'espècies en extinció, per a l'evolució de poblacions estructurades, sigui per mida, sigui per edat, etc. En tot cas, els sistemes que s'estudien són molt simplificats i quasi autònoms, en el sentit que l'única influència de fora del sistema està especificada explícitament: quantitats que es pesquen, variació dels paràmetres que apareixen a les equacions, etc. Certament, els models de població humana o de poblacions que depenen de l'activitat de l'home d'una manera no explicitada presenten la dificultat, de moment insuperada, de com fer aparèixer el comportament de l'home dins d'un model matemàtic.

I, iniciat el tema de l'home, què n'hem de dir, de la dinàmica econòmica? Hi ha molts models, tant microeconòmics com macroeconòmics, alguns dels quals tracten d'equilibris que depenen de paràmetres, i d'altres, més ambiciosos, tracten de fer prediccions que no siguin simplement extrapolacions dels anomenats cicles econòmics (com les dels astrònoms babilònics!). És clar que l'home, de moment, ha d'aparèixer com a amo i senyor, és a dir, com a modificador de paràmetres a voluntat, com si aquesta voluntat i els valors que hi ha al darrere no depenguessin precisament de les condicions socioeconòmiques que es volen estudiar.

I, per acabar aquest esbós, hem d'esmentar els esforços que es comencen a fer per entendre de què depèn la climatologia global per tal de prendre, si cal, mesures que evitin una evolució indesitjable. J. L. Lions, en un llibre sobre el planeta Terra, ens vol donar esperances sobre la possibilitat d'aconseguir aquest coneixement. Es basa en els avenços que ha experimentat la formulació matemàtica de les lleis que regulen el comportament dels diferents aspectes que hi intervenen, en els avenços de la capacitat de càlcul mitjançant la millora dels ordinadors digitals i dels programes amb què treballen, i per acabar, en els avenços cap a la possibilitat d'acords a escala global per prendre mesures de control i correcció. Quin optimisme! Clarament, un projecte així no pot reeixir en un termini de temps de pocs anys.

A la llista d'aplicacions de la matemàtica a les prediccions de la ciència i de la tècnica, hi podríem afegir l'algorísmica, en el seu sentit més ampli, és a dir, les cadenes de raonaments estructurades que descriuen el comportament, des del pensament lògic fins a l'operació d'un robot, passant per la programació d'un ordinador. Tot i que pot caure en la matemàtica més descriptiva, no hi ha dubte que opera seqüencialment i ens prediu un comportament. Tot i això, sent de natura tan diferent de la matemàtica de la qual hem parlat fins ara i, a més, no sent jo un expert, ni de bon tros, en l'entrellat que presenta, no faig més que esmentar-la per completesa.

No he esmentat explícitament els processos estocàstics ni les equacions diferencials estocàstiques, però és clar que formen part de la matemàtica predictiva quan són utilitzats així, i queden incorporats a models de diverses dinàmiques: físiques, químiques, biològiques, econòmiques, etc.

Ja hem fet notar, però hi insisteixo, que hi ha dues maneres —la teòrica i la numèrica— de tractar un model matemàtic donat per equacions diferencials, i les dues tenen les seves limitacions.

Dels sistemes que es poden tractar teòricament, només en comptadíssims casos podem obtenir-ne les solucions explícites. En d'altres, fent servir les eines de l'estudi qualitatiu d'aquestes equacions, iniciat per Poincaré i Liapunov fa cosa d'un segle, es poden obtenir les propietats qualitatives del conjunt de solucions, del que se'n diu el *retrat de fases*. Es pot dir si les solucions són tancades, si hi ha atractors, i en alguns casos es pot esbrinar la naturalesa d'aquests atractors. La veritat és que aquests mètodes qualitius funcionen per a sistemes força simples, però, certament, els sistemes més complexos, que solen correspondre a situacions més reals, es resisteixen a aquest tractament. Pensem, per exemple, en el problema de determinar amb un mínim de validesa quin és el comportament qualitatiu d'un model del sistema solar que tingui en compte tots els planetes! S'obtenen resultats fent simplificacions que consisteixen a considerar el sistema com una pertorbació petita d'un sistema integrable, però no es pot conèixer el teixit fi del retrat de fases, que tindrà per dimensió sis vegades el nombre de cossos que es considerin.

Pel que fa al tractament numèric en el qual s'utilitzen els recursos dels ordinadors digitals, ens trobem les limitacions degudes a la capacitat de memòria i a la velocitat dels ordinadors i, a més, a la possible sensibilitat del sistema als valors de les condicions inicials i, per tant, als errors d'arrodoniment que es produeixen per força en aquests tipus de càlcul.

Si hagués de dir com evolucionarà la utilització dels models matemàtics en l'esdevenidor, diria que si no apareixen nous mètodes, que òbviament no em puc ni imaginar (de la mateixa manera que els mesopotàmics no podien imaginar el càlcul infinitesimal), hi haurà una desacceleració, no en la incorporació d'aquests models en diferents aspectes, per exemple en l'economia, sinó en el tipus i la complexitat dels models que siguin tractables matemàticament, tot i que aquesta desacceleració es veurà palliada parcialment per una capacitat de càlcul numèric molt més gran.

Relacionat amb l'anterior, hi ha l'objectiu que tenim a l'estudiar un determinat fenomen mitjançant un model matemàtic. D'una banda, com en el cas del llançament d'un artefacte a Mart, ens interessa saber amb gran precisió la trajectòria del nostre vehicle, i també com es modificarà aquesta trajectòria si les condicions canvien dins d'un camp previsible. És clar que fer aquest càlcul no implica conèixer totes les solucions del sistema ni com s'imbriquen entre elles. El càlcul de la trajectòria dependrà en gran mesura del càlcul numèric, i també hi entraran consideracions de caire qualitatiu que es relacionen amb l'estabilitat de la solució, i també amb l'estabilitat de la trajectòria escollida.

En un altre exemple paradigmàtic podem trobar-nos davant d'un fenomen sobre el qual ja renunciem d'entrada a obtenir un model matemàtic que ens permeti una predicció acurada. Tal podria ser el cas, per exemple, del fenomen de la morfogènesi en biologia i, més precisament, en embriologia. No hi ha dubte que estem molt lluny de poder fer un model matemàtic que expliqui quin és el desenvolupament embrionari d'un ésser viu a partir d'un òvul fecundat, per exemple. I encara més si volem

saber quina relació hi ha entre aquest desenvolupament i el material genètic heretat. Ara bé, no deixa de ser objecte de curiositat el fet de poder explicar el dispositiu, el mecanisme que determina l'aparició de formes noves, encara que d'una manera tan esquemàtica que no serveixi per a res, fora de proporcionar una visió més racional del món. En aquest sentit, són importants els sistemes d'equacions de reacció i difusió que proporcionen el lligam, el pont diríem, entre els components químics en un medi i les solucions estacionàries estables que corresponen a la morfologia. I encara més, es pot intentar explicar com l'evolució de certs paràmetres pot afectar la distribució estable dels reactants. Aquest estudi, també en fase embrionària a causa de les dificultats que es troben, no serveix certament per a res pràctic, però ens pot ser útil (no pas utilitari) per entendre la naturalesa dels fenòmens que observem. Una cosa semblant es pot dir d'alguns models matemàtics en què hem treballat i que expliquen certs aspectes de l'evolució darwiniana.

Potser resultarà il·lustratiu aquí esmentar que va ser Alan Turing el primer que va utilitzar les equacions de reacció i difusió per intentar modelitzar la morfogènesi. Aquesta inquietud, curiosament, li havia sorgit juntament amb la de com es forma i funciona el cervell humà. D'aquesta darrera inquietud, n'havia sorgit ni més ni menys que la idea de l'ordinador digital programable, a més d'una sèrie de resultats que, junt amb els de Gödel, van produir un terratrèmol a la fonamentació formal de la matemàtica. Permeteu-me la llibertat, però, de dir-vos que Turing, a més de mestre de l'algorísmica i analista inspirat, també era un home pràctic: durant la Segona Guerra Mundial, va aconseguir trencar l'encriptació de les màquines Enigma dels alemanys, i es va ocupar del disseny i la construcció dels primers ordinadors digitals.

Ara voldria entrar al cor mateix del títol d'aquesta xerrada: quin paper té la matemàtica en la ciència. Pel que sabem i pel que he dit fins ara, sembla un instrument de la ciència, un estri per respondre qüestions. Fixem-nos, però, que la mateixa matemàtica s'utilitza en totes les ciències (vaja, més o menys), es a dir, no hi ha una matemàtica per a la biologia i una altra per a la física, per exemple. I, encara que hi ha hagut una escalada mútua entre ciència i tècnica i matemàtica, moltes, moltíssimes vegades, els resultats matemàtics que s'han fet servir s'han trobat independentment de cap aplicació específica: geometria diferencial, teoria de la integració, teoria de nombres, teoria de la probabilitat, etc. No tinc cap dubte que això respon al fet que les estructures matemàtiques es troben realment al cor de les nostres experiències, és a dir, al cor del món. La seva expressió en el simbolisme podria ser diferent, però l'estructura mateixa es troba en l'observació mateixa que fem del món. Això, i més, ja ho deia Plató en el seu *Timeu*. El que fa, doncs, la matemàtica és mostrar aquest ordre racional que es troba en la nostra experiència. Entre parèntesis, això també ho fa el llenguatge, però és més difícil de veure-li la racionalitat, almenys en el sentit algorísmic.

I encara hi ha un altre aspecte, relacionat amb l'anterior, que ha estat poc considerat. Tots som ben conscients del paper fonamental que té la matemàtica en l'expressió de les ciències; però semblaria que les lleis dels comportaments físics, químics, biològics, econòmics, etc., són donades per aquestes ciències, potser en llenguatge matemàtic, però pertanyent a aquestes. Això és cert pel que fa a la formulació i observació del procés constituent de les ciències. Però ja no és tan cert pel que fa a les conseqüències d'aquestes lleis, i en particular per fer les prediccions i també per aconseguir nous principis de tipus global. I és que les ciències donen les lleis, i en

el marc de les ciències es fan les observacions i constatacions, però ha correspost a la matemàtica el fet de trobar les solucions i els resultats que interessin. És com si les lleis i els principis estiguessin determinats per les ciències, però la realització, la concreció de la situació està determinada per la matemàtica. Quan obtenim resultats mitjançant un model matemàtic, ho fem al marge de la ciència particular a la qual pertany aquest model. La interpretació dels resultats torna a recaure en el domini d'on ha sorgit el problema.

Les equacions del model, expressió del principi, són en certa manera immòbils, generals, hieràtiques. Alguns principis globals, com el de mínima acció, es poden veure com el resultat de l'aplicació de la matemàtica sobre les lleis locals. Tot això és una realitat potencial. Les solucions, que són les que proporciona la matemàtica i queden definides en concretar les condicions precises del problema, retraten la realitat.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
carpe@mat.uab.es