

El graf de l'icosàedre truncat i la darrera carta de Galois*

BERTRAM KOSTANT

1 Introducció

La utilització de la teoria de grups per part dels químics per determinar certes propietats d'algunes molècules és un fet ben establert i sobre el qual es pot trobar una extensa literatura. Per a una molècula individual, podem fer intervenir el grup de simetria de la molècula que es pot identificar, a menys de conjugació, a un subgrup de $O(3)$ (necessàriament finit si la molècula no és trivial). La part més significativament del grup de simetria és la seva intersecció G amb $SO(3)$ i ens referirem a

$$G \subset SO(3)$$

com al grup de simetria pròpia de la molècula. Aquest ús del terme *propri* en relació a subgrups de $O(3)$ el mantindrem al llarg de tot l'article.

Des del punt de vista de les matemàtiques els grups G en qüestió —amb exactament una excepció (a menys de conjugació)— no són massa interessants ja que són grups resolubles fàcils de construir. L'excepció és un grup que és isomorf al grup alternat A_5 . Com a subgrup de $SO(3)$ és el grup de simetria pròpia de l'icosàedre (i del dodecàedre). És l'únic subgrup finit de $SO(3)$ que coincideix amb el seu propi commutador —de fet, és l'únic subgrup finit no abelià i simple de $SO(3)$. Pot ser considerat com l'iniciador, o el membre més petit, de la família dels grups finits no abelians i simples. Des del punt de vista de la correspondència de McKay, aquest grup (més precisament el seu «revestiment doble») es correspon amb el grup de Lie excepcional E_8 .

Parlarem de grup icosaèdric per referir-nos a un grup isomorf al grup alternat A_5 , i qualsevol estructura que admeti aquest grup com a grup de simetria direm que té *simetria icosaèdrica*. Atès el paper singular del grup icosaèdric a la teoria de grups, qualsevol estructura natural que tingui simetria icosaèdrica ben segur que mereix una atenció especial. En aquest article ens ocuparem d'una estructura amb

*Versió catalana d'un article aparegut a *Notices of the Amer. Math. Soc.* 42, 9 (1995), 959-968. Traducció d'ENRIC NART.

aquesta característica —una estructura que sembla que està apareixent a la literatura científica amb freqüència creixent.

Abans del descobriment de les fullerenes, fa uns deu anys, les úniques formes sòlides conegudes de carboni pur eren el grafit i els diamants. Aquestes dues formes són matèries cristal·lines on els enllaços entre els àtoms de carboni presenten estructures tetraedrals i hexagonals, respectivament. No obstant això, a cap d'aquestes substàncies hi ha molècules aïllades de carboni pur. D'altra banda, al fullerene trobem per primera vegada un cristall sòlid de carboni pur, amb molècules de carboni ben definides. Vegeu, per exemple, l'encapçalament de la pàg. 58 de [6]. Matemàticament, aquestes molècules es poden descriure com a poliedres convexos on les cares són hexàgons o pentàgons i cada vèrtex (àtom de carboni) és l'extrem de tres arestes (enllaços de carboni). El fet que la característica d'Euler de la 2-esfera és 2 comporta que el nombre de cares pentagonals és forçosament 12. Indicació: expresseu el nombre de vèrtexs, arestes i cares en termes del nombre de pentàgons i d'hexàgons. Vegeu, per exemple, [8] pàg. 16.

Les fullerenes presenten propietats físiques i químiques remarcables (per exemple, superconductivitat, ferromagnetisme, una estabilitat tremenda) i són l'objecte d'una ingent quantitat de recerca arreu del món. La forma de les molècules fa que puguin actuar com unes gàbies que contenen altres àtoms o molècules. Per un report posat al dia de les fullerenes vegeu [7]. Al capítol 20 de [7] i a la part III de [11] es pot trobar un catàleg de les possibles aplicacions de la fullerene.

Entre les moltes molècules de fullerene, la més prominent i la més estudiada és C_{60} . (El terme fullerene s'utilitza a vegades per referir-se específicament a aquesta molècula.) En el cas de C_{60} el corresponent poliedre és l'icosàedre truncat (vegeu el capítol 8, §4, de [5]). La superfície d'aquest poliedre sembla una pilota de futbol. Té trenta-dues cares. És a dir, a més dels dotze pentàgons hi ha vint hexàgons. Cal destacar que els dotze pentàgons estan separats els uns dels altres. Els químics creuen que l'aïllament dels pentàgons en una molècula de fullerene és un requeriment per a l'estabilitat. Vegeu, per exemple, la fi de la pàg. 4 de [8]. C_{60} és la molècula de fullerene més petita on es dona aquest aïllament.

L'icosàedre truncat també es troba a l'embolcall polièdric de nombrosos virus. Per a un *survey* de l'estructura polièdrica dels virus, amb imatges extreïdes del microscopi electrònic, vegeu [9]. L'estructura icosaèdrica truncada també apareix en una substància, la clatrina, relacionada amb la descàrrega de neurotransmissors a les sinapsis de xarxes neuronals. Vegeu la pàg. 365 de [15] (agraïxo a S. Sternberg aquesta referència) i, amb més detall, el capítol 5 de [11].

Hi ha noranta arestes a l'icosàedre truncat, seixanta de les quals enllaçen els dotze pentàgons i separen els hexàgons dels pentàgons. Aquestes seixanta arestes les anomenarem arestes *pentagonals*. Les altres trenta arestes separen hexàgons d'hexàgons i les anomenarem arestes *hexagonals*. Segons les pàgs. 46–47 de [8] les arestes pentagonals de C_{60} són enllaços simples de carboni i les arestes hexagonals són enllaços dobles de carboni. Així, cada hexàgon, com en un anell de benzè, té alternativament enllaços simples i dobles. No obstant això, al contrari del que passa al benzè, els enllaços simples i dobles dels hexàgons del C_{60} són fixos.

L'icosàedre truncat té seixanta vèrtexs. A causa de l'aïllament de les cares pentagonals cada vèrtex pertany a un sol pentàgon. D'aquesta manera, els pentàgons defineixen una relació d'equivalència natural en el conjunt dels vèrtexs —partint el conjunt dels vèrtexs en dotze classes d'equivalència, cadascuna formada pel conjunt

dels 5 vèrtexs d'un dels pentàgons. Abusant de la terminologia ens referirem a aquests conjunts de 5 vèrtexs també com a *pentàgons*.

També s'observa que cada vèrtex pertany a tres arestes, dues de pentagonals i una d'hexagonal. L'estructura de l'icosàedre truncat està completament determinada pel graf Γ dels seus vèrtexs i arestes. El grup de simetria pròpia del C_{60} , o de l'icosàedre truncat, és un grup icosaèdric (de 60 elements). El grup G opera simplement transitivament sobre el conjunt dels vèrtexs. Així, donat un parell ordenat de vèrtexs hi ha una única simetria pròpia que envia el primer vèrtex al segon. És a dir, l'acció de G sobre V és equivalent a l'acció de G sobre ell mateix via trasllació per l'esquerra. En particular, l'acció de G sobre V no «veu» l'estructura de les arestes de Γ . Això, en la nostra opinió, apunta a la poca idoneïtat de G per tractar moltes qüestions sobre la naturalesa de C_{60} . Amb l'expectativa que una anàlisi basada en la teoria de grups ens portarà eventualment a una profunda comprensió de la remarcable mol·lecúla C_{60} , sembla altament desitjable ser capaç d'expressar tota l'estructura de Γ en el context de la teoria de grups. L'estructura de les arestes de Γ determina una matriu d'adjacència H de tamany 60×60 que caldria interpretar amb la teoria de grups. En connexió amb això val la pena ressaltar que els valors propis de H , via el que es coneix com a aproximació de Huckel, intervenen en la determinació dels nivells d'energia mol·lecular del C_{60} . Vegeu, per exemple, [8], pàg. 44 i el §9 de [2].

Si p és un nombre primer, sigui \mathbb{F}_p el cos finit de p elements. El grup $Sl(2, p)$ és el grup de matrius 2×2 amb entrades de \mathbb{F}_p i determinant 1 i $PSl(2, p)$ és $Sl(2, p)$ mòdul el seu centre (de dos elements si p és senar). El grup $PSl(2, p)$ és simple si $p \geq 5$ i $PSl(2, 5)$ és un grup icosaèdric. El grup icosaèdric $PSl(2, 5)$ admet una immersió dins $PSl(2, 11)$ i la relació (vegeu la secció 3) entre aquests dos grups és força remarcable. Aquesta relació té molt a veure amb una afirmació (vegeu la secció 3) feta per Galois en la seva famosa carta a Chevalier escrita la nit abans del duel que li costaria la vida. El conjunt d'elements d'ordre 11 de $PSl(2, 11)$ descompon en dues classes de conjugació, cadascuna de les quals té seixanta elements. L'elecció de la immersió (hi ha dues tals immersions, que són inequivalents) de $PSl(2, 5)$ en $PSl(2, 11)$ afaforeix una de les dues classes de conjugació, diguem-ne M . Provarem que la classe de conjugació M té una estructura natural de graf d'un icosaèdre truncat. En efecte, el model que estem proposant per a C_{60} té la propietat que cada àtom de carboni es pot etiquetar amb un element d'ordre 11 de $PSl(2, 5)$ de tal manera que els enllaços de carboni es poden expressar en termes de l'estructura de grup de $PSl(2, 5)$. Veurem que els dotze pentàgons són exactament les interseccions de M amb els dotze subgrups de Borel de $PSl(2, 11)$. (Un subgrup de Borel és qualsevol subgrup conjugat al grup B definit a (2).) En particular, els pentàgons són els conjunts maximals d'elements de M que commuten. El punt més subtil és l'existència natural dels enllaços hexagonals. Això serà conseqüència d'un lligam grupteorètic de cada element d'ordre 11 d'un subgrup de Borel amb un element d'ordre 11, unívocament determinat, d'un altre subgrup de Borel.

2 El graf de l'icosàedre i una classe de conjugació de A_5

Sigui $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la raó àuria. Titllarem un rectangle d'auri quan la raó del costat llarg al costat curt sigui la raó àuria. A \mathbb{R}^2 el rectangle amb vèrtexs $\{(\pm 1, \pm \tau)\}$ és un rectangle auri. Sigui V el conjunt dels 12 punts de \mathbb{R}^3 que són els vèrtexs dels

rectangles auris mútuament perpendiculars:

$$V = \{(\pm 1, \pm \tau, 0), (0, \pm 1, \pm \tau), (\pm \tau, 0, \pm 1)\}. \quad (1)$$

Doncs bé, V és el conjunt de vèrtexs d'un icosaèdre P , les arestes del qual uneixen les parelles $c, d \in V$ amb producte escalar: $\langle c|d \rangle = \tau$. Vegeu 3 · 75 a [5]. Posant-nos en la pell d'un poeta, som temptats de descriure l'icosaèdre P com una simfonia en la raó àuria.

Sigui $A \subset SO(3)$ el grup dels girs que deixen invariant el conjunt V de cardinal 12. El grup A és icosaèdric. Per a qualsevol enter $j > 1$, denotem per $A(j) \subset A$ el conjunt dels elements de A d'ordre j . Es té $A(j) \neq \emptyset$ només per a $j = 2, 3$ o 5 , amb:

$$|A(2)| = 15, \quad |A(3)| = 20, \quad |A(5)| = 24,$$

on $|\cdot|$ denota el cardinal d'un conjunt.

Per a qualsevol nombre primer p (de fet per a qualsevol potència d'un nombre primer), el grup $PSL(2, p)$ opera naturalment (i transitivament) sobre $p + 1$ punts. Més precisament, opera sobre la recta projectiva $\mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ definida sobre \mathbb{F}_p , com el grup de transformacions fraccionàries: $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$. El grup d'isotropia és el subgrup de Borel:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p \right\} \text{ mòdul el centre,} \quad (2)$$

on \mathbb{F}_p^* és el grup multiplicatiu dels elements invertibles de \mathbb{F}_p . Així, en el nostre cas, la recta projectiva és la «varietat bandera» per $PSL(2, p)$ —el conjunt de tots els conjugats del subgrup de Borel. Com que $A \simeq PSL(2, 5)$, aquest grup A opera sobre sis punts. Geomètricament, això es veu de seguida sobre l'icosaèdre P , on podem considerar que els sis punts són sis parells de vèrtexs antipodals. Però, és clar, $A \simeq A_5$, de manera que A opera sobre un conjunt \mathcal{F} de cinc «objectes». Mirant l'icosaèdre, això no és tan obvi. Cada aresta i la seva aresta antipodal són els costats d'un rectangle auri i determinen d'aquesta manera quinze rectangles auris dins de P . Aquests quinze rectangles auris es parteixen de manera única en cinc conjunts de tres rectangles auris mútuament ortogonals (un d'aquests conjunts és el que s'explicita a (1)). Aquesta és una manera geomètrica de visualitzar els cinc objectes. Algebraicament és més senzill. Definim una relació al conjunt $A(2)$ de 15 elements, entenent que dos elements de $A(2)$ estan relacionats si commuten. Per a la nostra meravella, aquesta relació és d'equivalència i hi ha cinc classes d'equivalència, cadascuna amb tres elements. Per tant, algebraicament podem considerar:

$$\mathcal{F} = \text{el conjunt dels subconjunts maximals de } A(2) \quad (3)$$

amb la propietat que els seus elements commuten.

Per descomptat, hi ha una correspondència bijectiva entre $A(2)$ i el conjunt dels quinze rectangles auris. Cada element de $A(2)$ defineix un gir de 180 graus en el pla del corresponent rectangle auri.

Fins a quin punt «veu» A l'icosaèdre? Volem dir, més precisament: on podem trobar dins A el graf dels vèrtexs i arestes d'un icosaèdre? La nostra solució a aquesta qüestió, el teorema 1 que donarem a continuació, fou el que ens va portar al resultat principal d'aquest article, que es pot trobar a la secció 4, —la solució a una qüestió

similar substituïnt l'icosàedre per l'icosàedre truncat. Els conjunts $A(2)$ i $A(3)$ són classes de conjugació de A . D'altra banda, el conjunt $A(5)$ descompon en una unió de dues classes de conjugació, diguem C, C' , cadascuna amb dotze elements. Tractant-se de classes de conjugació, són, és clar, A -conjunts respecte de l'acció de conjuguar i són tancades per inversió. L'aplicació, $C \rightarrow C', \sigma \rightarrow \sigma^2$ és una A -bijecció.

Fixem una de les dues classes de conjugació d'elements d'ordre 5 de A , diguem la classe C . Definirem un graf Δ amb C com a conjunt dels vèrtexs. No acostuma a ser una pràctica habitual de la teoria de grups preguntar-se si el producte de dos elements d'una classe de conjugació torna a caure en la mateixa classe de conjugació. No obstant, aquesta consideració resulta ser força productiva en el nostre cas. Per a $u, v \in C$ definim:

$$\{u, v\} \text{ és una aresta de } \Delta \text{ si } uv \in C. \quad (4)$$

Noteu que això està ben definit ja que, tractant-se d'elements conjugats, $uv \in C$ si i només si $vu \in C$. Noteu també que, sigui quin sigui el graf que haguem obtingut, és necessàriament invariant sota l'acció del grup icosaèdric A . De fet, hi ha exactament trenta arestes i obtenim, efectivament, l'icosàedre. El següent teorema ha estat provat a [13].

1 TEOREMA *El graf Δ és isomorf al graf de vèrtexs i arestes d'un icosaèdre. Respecte de qualsevol isomorfisme entre aquests dos grafs, per a qualsevol $u \in C$ el vèrtex corresponent a u^{-1} és antipodal al vèrtex corresponent a u .*

Si c i d són vèrtexs d'un icosaèdre i $\{c, d\}$ és una aresta, direm que d és un veí de c . Cada vèrtex c té, és clar, cinc veïns. Els cinc veïns del vèrtex antipodal de c els anomenarem els *coveïns* de c . Qualsevol vèrtex d que no és ni c ni el seu antipodal serà bé veí, bé coveí de c , però mai les dues coses. En conseqüència, ens podem referir al parell $\{c, d\}$ com a veïns o coveïns sense ambigüitats. La mateixa terminologia de veïns i coveïns serà utilitzada per a la classe de conjugació C de A .

Amb un exemple podem il·lustrar el teorema 1 per al grup icosaèdric A_5 . Sigui C la classe de conjugació de la permutació cíclica $u = (1, 2, 3, 4, 5) \in A_5$. Si $w = (1, 5, 2, 4, 3)$ comprovem ràpidament que $w \in C$. No obstant,

$$(1, 2, 3, 4, 5)(1, 5, 2, 4, 3) = (1, 4, 2),$$

de manera que a la força $\{u, w\}$ són coveïns. Però aleshores u i v han de ser veïns, on $v = w^{-1}$. En efecte, $v = (1, 3, 4, 2, 5)$ i:

$$uv = (1, 2, 3, 4, 5)(1, 3, 4, 2, 5) = (1, 5, 3, 2, 4),$$

i $(1, 5, 3, 2, 4) \in C$.

OBSERVACIÓ S'infereix fàcilment de l'exemple anterior que dos elements arbitraris $u, w \in C$, són coveïns si i només si uw té ordre 3.

Tractant-se d'un políedre, qualsevol aresta de l'icosàedre és la frontera de dues cares. Per a l'icosàedre les cares són triangles. Per tant, si $\{u, v\} \subset C$ són veïns, hi ha exactament uns altres dos elements $w \in C$ que són veïns simultàniament de u i de v . Com que $(vu)^{-1} = u^{-1}v^{-1}$ i $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$ satisfan aquestes condicions, han de ser aquests dos elements, com s'indica a la figura 1.

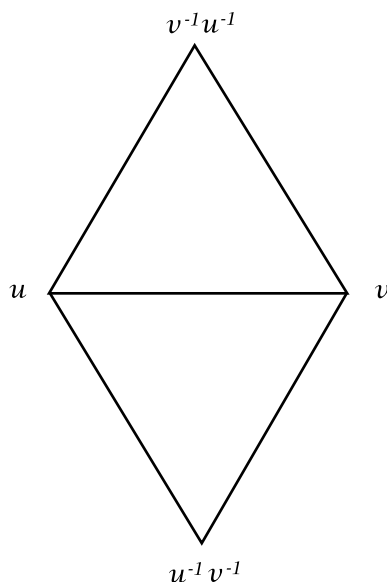


FIGURA 1

Començant amb l'aresta definida per u i v i escollint l'orientació de l'icosàedre de manera que l'aresta $\{u, v^{-1}u^{-1}\}$ s'obtingui de $\{u, v\}$ per rotació en sentit contrari de les busques del rellotge, els cinc veïns de u es poden expressar en termes de u i v com s'indica a la figura 2, que exhibeix les cinc cares de l'icosàedre que tenen u per vèrtex.

Naturalment, els cinc coveïns de u són els inversos dels cinc veïns.

OBSERVACIÓ Noteu que una comparació de les figures 1 i 2 ens duu a l'equació:

$$u^2 v u^{-2} = u^{-1} v^{-1}. \quad (5)$$

Com que u té ordre 5 l'equació (5) és equivalent a la condició que $x = u^{-2}v$ tingui ordre 2. Per l'observació 2, l'element $ux = u^{-1}v$ té ordre 3. Aquestes tres relacions que involucren u i x són una presentació (que a (12) anomenem presentació *estàndard*) del grup icosaèdric i més endavant veurem (teorema 3) que una presentació com aquesta defineix el graf de l'icosàedre truncat com un graf de Cayley.

Per a grups no resolubles, és difícil seguir la pista dels commutadors de parelles d'elements. El grup icosaèdric és el grup d'ordre més petit que coincideix amb el seu subgrup commutador, de manera que té un cert interès veure com es distribueixen els commutadors de A . Per a la classe de conjugació C veurem a continuació que aquesta distribució s'expressa clarament en termes dels tres rectangles auris ortogonals. Suposem que $u, v \in C$ són veïns. Aleshores, $\{u, v, u^{-1}, v^{-1}\}$ són els vèrtexs d'un dels quinze rectangles auris. D'altra banda, donats dos elements d'un grup arbitrari, hi ha vuit maneres de formar un commutador, que descomponen de manera natural en dos conjunts de quatre expressions cadascun. Per als elements

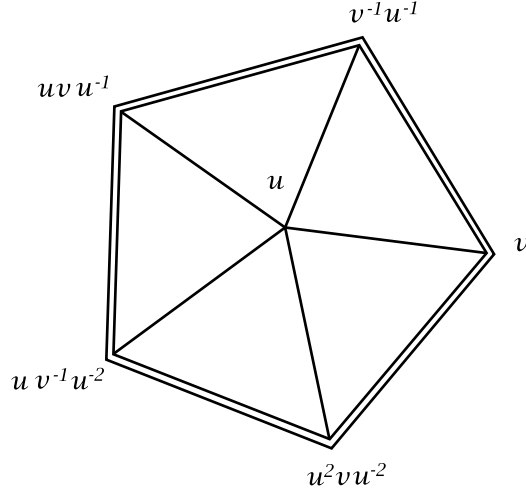


FIGURA 2

u, v fem explícites aquestes expressions en la segona i tercera columna de la matriu:

$$\begin{array}{ccc}
 u & uvu^{-1}v^{-1} & uv^{-1}u^{-1}v \\
 v & v^{-1}u^{-1}vu & vu^{-1}v^{-1}u \\
 u^{-1} & vuv^{-1}u^{-1} & v^{-1}uvu^{-1} \\
 v^{-1} & u^{-1}v^{-1}uv & u^{-1}vuv^{-1}
 \end{array} \quad (6)$$

2 TEOREMA Els elements de A definits per les 12 expressions de (6) són diferents i pertanyen a C —i per tant, de fet, són tots els elements de C . A més, els elements d'una qualsevol de les 3 columnes són els vèrtexs d'un rectangle auri i els tres rectangles auris són ortogonals (és a dir corresponen a rectangles auris ortogonals de l'icosàedre $P \subset \mathbb{R}^3$). En particular, el segon i el tercer rectangles auris són els únics (d'entre els quinze rectangles auris) que són ortogonals al primer.

Aquest teorema és el teorema 1.18 de [13].

El diagrama de la figura 3 il·lustra el teorema 2 i dona expressions addicionals (vegeu §1 de [13]) per a alguns dels vèrtexs de l'icosàedre en termes d'un parell de veïns $\{u, v\} \subset C$.

3 La immersió de $PSL(2, 5)$ dins $PSL(2, 11)$ i la carta de Galois a Chevalier

Un tema central en el que segueix és la relació entre el grup icosaèdric $PSL(2, 5)$ de 60 elements i el grup $PSL(2, 11)$ de 660 elements. A menys de conjugació, el grup $PSL(2, 5)$ s'identifica a un subgrup de $PSL(2, 11)$ de dues maneres diferents (intercanviades, no obstant això, per automorfismes externs de $PSL(2, 11)$). L'observació que la relació entre $PSL(2, 11)$ i el seu subgrup $PSL(2, 5)$ és remarcable i extraordinària es remunta a Galois. La discutirem ara ben aviat. El fet que aquesta relació té a veure amb l'icosàedre es discuteix a [2] i es desenvolupa amb més detall a [13].

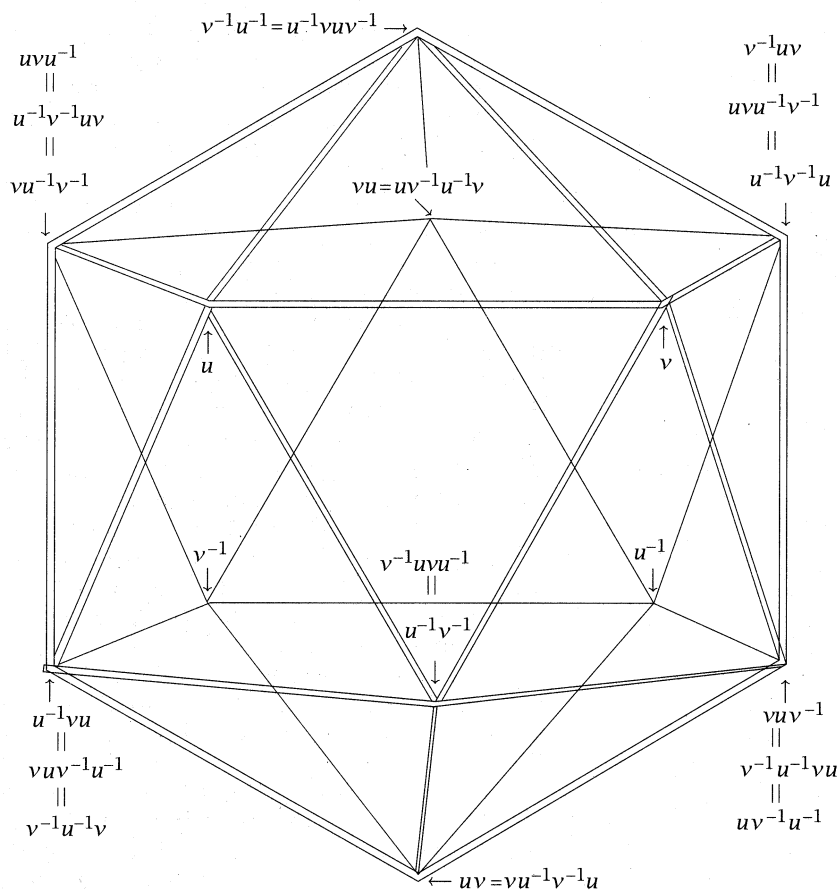


FIGURA 3

Com hem observat abans, la recta projectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ té 6 elements i es pot identificar, com a $PSL(2, 5)$ -conjunt, amb els sis parells de vèrtexs antipodals de l'icosàedre. El punt clau rau en el fet que la recta projectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{11})$ té 12 elements i, com a $PSL(2, 11)$ -conjunt, es pot identificar amb tot el conjunt V de vèrtexs de l'icosàedre, de tal manera que hi ha una partició de $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{11})$ en sis parells d'elements, el grup estabilitzador de la qual és $PSL(2, 5)$; d'aquesta manera es recupera l'acció de $PSL(2, 5)$ sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$. De fet, hi ha dues particions no equivalents, corresponents a les dues immersions de $PSL(2, 5)$ dins $PSL(2, 11)$. Com a evidència que la correspondència bijectiva entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{11})$ i V és més que una simple coincidència es va provar a [2] que el graf dels vèrtexs i les arestes de l'icosàedre es pot expressar clarament en termes de la raó doble de $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{11})$. Vegeu el teorema 1 de [2].

Ara concentrem la nostra atenció, no pas en el graf de l'icosàedre, sinó en el graf més sofisticat associat a l'icosàedre truncat. Una primera passa en aquesta direcció serà conseqüència d'una idea inherent a un resultat de Galois. Els tres grups A_4 , S_4 i A_5 són, a menys de conjugació, els únics subgrups finits de $SO(3)$ que operen

irreductiblement sobre \mathbb{R}^3 . Són, és clar, els grups de simetria pròpia dels cinc sòlids platònics. Per al tetràedre és A_4 , per a l'octàedre i el cub és S_4 i per a l'icosàedre i dodecàedre és A_5 . Des del punt de vista de la correspondència de McKay, els grups A_4 , S_4 i A_5 es corresponen, respectivament, als grups de Lie simples E_6 , E_7 i E_8 .

Ara, si p és un nombre primer, el grup $PSL(2, p)$ és simple si $p \geq 5$ i, tanmateix, opera sobre la recta projectiva de $p + 1$ elements sobre el cos \mathbb{F}_p . El resultat de Galois, inclòs en la seva carta a Chevalier (vegeu la p. 268 de [4] i la p. 214 de [10]), és que si $p > 11$ aleshores $PSL(2, p)$ no pot operar de manera no trivial sobre un conjunt de menys de $p + 1$ elements. En particular, no pot operar de manera no trivial sobre un conjunt de p elements si $p > 11$. Això es pot expressar de la manera següent: El grup cíclic \mathbb{Z}_p d'ordre p s'inclou dins $PSL(2, p)$ de manera única, a menys de conjugació, com el p -subgrup de Sylow. És el radical unipotent d'un subgrup de Borel i la seva antiimatge a $SL(2, p)$ es pot considerar que sigui:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{F}_p \right\}. \quad (7)$$

El resultat de Galois és que, si $p > 11$,

No hi ha cap subgrup de $PSL(2, p)$ complementari a \mathbb{Z}_p .

Amb això volem dir que no hi ha cap subgrup F que conjuntísticament satisfaci $PSL(2, p) = F \times \mathbb{Z}_p$. La notació, per descomptat, no indica producte cartesià de grups. Significa que tot element g es pot escriure de manera única $g = fz$ amb $f \in F$ i $z \in \mathbb{Z}_p$. A l'afirmació de Galois hi ha certament implícit el coneixement que el seu resultat no és cert pels tres casos en què $p \leq 11$ i $PSL(2, p)$ és simple —és a dir $p = 5, 7, 11$. No hi ha dubte que és prodigiós el fet que en els tres casos excepcionals, els grups F que contradueixen l'afirmació de Galois són precisament els grups de simetria dels sòlids platònics. És a dir que tenim:

$$\begin{aligned} PSL(2, 5) &= A_4 \times \mathbb{Z}_5, \\ PSL(2, 7) &= S_4 \times \mathbb{Z}_7, \\ PSL(2, 11) &= A_5 \times \mathbb{Z}_{11}. \end{aligned} \quad (8)$$

Aquests casos especials mereixen una anàlisi més acurada. El fet que $PSL(2, 5)$ opera sobre cinc punts el varem discutir a la secció 2 en connexió amb la relació d'equivalència de commutativitat en el conjunt d'elements d'ordre 2 de $PSL(2, 5)$. Aquesta acció estableix l'isomorfisme de $PSL(2, 5)$ amb A_5 . El grup $PSL(2, 7)$ és isomorf a $PSL(3, 2)$. El 3 aquí indica que $PSL(3, 2)$ opera sobre un pla projectiu i el 2 indica que el pla està definit sobre el cos de 2 elements. Aquest pla té $1 + 2 + 2^2 = 7$ rectes i 7 punts, i ens proporciona, doncs, set objectes sobre els quals opera $PSL(2, 7)$. El pla es representa clàssicament pel diagrama de la figura 4.

Per descomptat, el nostre interès se centra en el darrer i més sofisticat cas, el de $PSL(2, 11)$. La seva acció sobre onze punts prové de la simetria d'una geometria especial i remarcable. Els onze punts seran el propi cos \mathbb{F}_{11} —representat pels enters de 1 a 11 amb $11=0$. El conjunt dels quadrats no nuls de \mathbb{F}_{11} és el conjunt $\{1, 3, 4, 5, 9\}$. Ara, utilitzant l'estructura additiva de \mathbb{F}_{11} , traslladem aquest conjunt de cinc elements per tots els elements de \mathbb{F}_{11} . Obtenim aleshores els següents onze

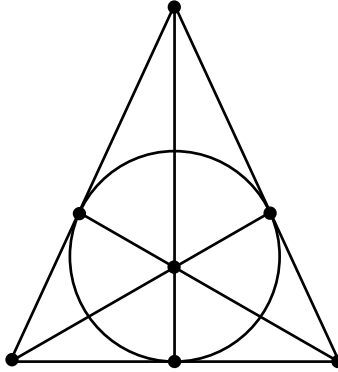


FIGURA 4

conjunts de cinc elements:

$$\begin{array}{cc}
 1, 3, 4, 5, 9 & 4, 7, 9, 10, 11 \\
 2, 4, 5, 6, 10 & 1, 5, 8, 10, 11 \\
 3, 5, 6, 7, 11 & 1, 2, 6, 9, 11 \\
 1, 4, 6, 7, 8 & 1, 2, 3, 7, 10 \\
 2, 5, 7, 8, 9 & 2, 3, 4, 8, 11 \\
 3, 6, 8, 9, 10 &
 \end{array} \tag{9}$$

Si pensem aquests conjunts com a rectes, observem que qualsevol parella de rectes diferents s'intersecten en exactament dos punts i qualsevol parella de punts diferents pertanyen a exactament dues rectes. En altres paraules, la intersecció estableix una bijecció entre el conjunt de 55 elements de totes les parelles de punts diferents i el conjunt de 55 elements de totes les parelles de rectes diferents. A la pàgina 7 de [2] aquesta configuració és anomenada una *geometria biplana*. Si identifiquem el grup simètric S_{11} amb el grup de permutacions del conjunt \mathbb{F}_{11} , el subgrup de S_{11} que deixa invariant el conjunt d'aquestes onze rectes és isomorf a $PSL(2, 11)$. El subgrup d'isotropia de $PSL(2, 11)$ a un punt de \mathbb{F}_{11} és isomorf a $PSL(2, 5)$. La segona immersió de $PSL(2, 5)$ dins $PSL(2, 11)$ s'obté considerant el subgrup d'isotropia d'una recta en comptes d'un punt.

La geometria biplana sobre onze elements està directament relacionada amb l'existència de matrius d'Hadamard 12×12 . Una matriu d'Hadamard és una matriu quadrada amb entrades 1 o -1 i tal que les columnes són ortogonals (i per tant les files són ortogonals). El conjunt \mathcal{H}_n de totes les matrius d'Hadamard $n \times n$ és clarament estable sota l'acció del grup G_n de totes les permutacions de files i columnes i canvis de signe. Si $R \in \mathcal{H}_{12}$, podem suposar, fent canvis de signe a files i columnes, que la darrera fila i la darrera columna contenen només uns. Si R' és el menor principal 11×11 complementari, aleshores, com que les primeres 11 columnes de R són ortogonals a l'última, cada columna de R' ha de tenir exactament cinc uns. Els índexs de les files que contenen aquests uns determinen un subconjunt de cinc elements de $\{1, \dots, 11\}$. Els onze conjunts de cinc elements que obtenim d'aquesta manera han de configurar una geometria biplana pel fet que les columnes de R són ortogonals —i viceversa. En particular, (9) ens proporciona la matriu d'Hadamard

següent:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

OBSERVACIÓ Andrew Gleason m'ha informat que és fàcil veure que \mathcal{H}_{12} és una única òrbita de G_{12} . És a dir que es poden obtenir tots els elements de \mathcal{H}_{12} aplicant G_{12} a la matriu (10). Ell conjectura també que $n = 12$ és el valor més gran amb la propietat que \mathcal{H}_n és una única G_n -òrbita, suposant, és clar, que n és tal que \mathcal{H}_n no és buit.

4 El graf de l'icosàedre truncat i la classe de conjugació M de $PSL(2, 11)$

Tornant a (8), en comptes de considerar, com fèiem abans, el $PSL(2, 11)$ -conjunt de 11 elements $PSL(2, 11)/H$, on H és el subgrup A_5 , considerem el $PSL(2, 11)$ -conjunt de 60 elements $PSL(2, 11)/H$, escollint ara $H = \mathbb{Z}_{11}$. Ens preguntem ara per la possibilitat que $X = PSL(2, 11)/\mathbb{Z}_{11}$ tingui una estructura natural de graf de l'icosàedre truncat. Ens adonem immediatament d'una descomposició $PSL(2, 11)$ -invariant canònica de X en unió de dotze pentàgons que aporta evidència a favor d'aquesta possibilitat. En efecte, si B és el normalitzador de \mathbb{Z}_{11} dins de $PSL(2, 11)$, per un principi general, el grup B/\mathbb{Z}_{11} opera (per la dreta) fidelment sobre X i l'acció no només commuta amb l'acció de $PSL(2, 11)$ sinó que representa el centralitzador del grup de totes les permutacions de X . Però B és precisament el subgrup de Borel de $PSL(2, 11)$ amb radical unipotent \mathbb{Z}_{11} . Per tant:

$$B/\mathbb{Z}_{11} \simeq \mathbb{Z}_5.$$

Les òrbites de B/\mathbb{Z}_{11} són els dotze pentàgons. A més, per (8), X és un espai principal homogeni per A_5 que reflecteix exactament com opera A_5 sobre els vèrtexs d'un icosàedre truncat. El que ens falta, és clar, és la part més sofisticada del graf de l'icosàedre truncat —és a dir, les arestes hexagonals—, les arestes que enllaçen els diversos pentàgons (els enllaços dobles de carboni del C_{60}).

Un grup determina un graf, anomenat *graf de Cayley*, via l'elecció de generadors. Si es tracta d'un grup icosaèdric hi ha una elecció clàssica d'un parell de generadors. De fet hi ha tres possibles eleccions (clarament relacionades les unes amb les altres) depenent de si volem generadors d'ordres 2 i 5, o 2 i 3 o bé 3 i 5. Nosaltres fem la primera elecció. Una presentació del grup icosaèdric, que anomenarem presentació *estàndard*, és donada per un parell d'elements no trivials ϕ i τ del grup, que compleixen les relacions:

$$\phi^5 = 1, \quad \tau^2 = 1, \quad (\phi\tau)^3 = 1. \quad (11)$$

Vegeu, per exemple, el lema 13.6, p. 120 de [14]. Dos elements no trivials ϕ , τ d'un grup icosaèdric A' defineixen un graf de Cayley dins de A' . El següent teorema afirma que aquest graf de Cayley és el graf d'un icosaèdre truncat. De fet, ens resulta més convenient expressar el resultat en termes d'un espai principal homogeni (és a dir, amb subgrups d'isotropia trivials) més que treballant amb el propi grup.

El teorema 3 no és més que una versió més detallada del teorema 1 de [2]. En trobem una prova a [2] i a [13], on apareix com a teorema 2.10.

3 TEOREMA *Sigui M un conjunt arbitrari de cardinal 60 i sigui S_{60} el grup de totes les permutacions de M . Suposem que $\phi, \tau \in S_{60}$ compleixen les relacions (12) i que ϕ, τ i $\phi\tau$ no tenen punts fixos a M . Aleshores, el subgrup $A' \subset S_{60}$ generat per ϕ i τ és un grup icosaèdric i M és un espai principal homogeni sobre A' . Sigui A el centralitzador de A' dins de S_{60} , de manera que A és també un grup icosaèdric (A i A' són el centralitzador l'un de l'altre) i M és també un espai principal homogeni respecte de A .*

Sigui Γ el graf de M obtingut considerant que per a cada $x \in M$ les arestes (tres) que contenen x són $\{x, \phi x\}$, $\{x, \phi^{-1}x\}$ i $\{x, \tau x\}$. Aleshores, Γ és isomorf al graf de l'icosaèdre truncat, on les arestes pentagonals que contenen x són $\{x, \phi x\}$ i $\{x, \phi^{-1}x\}$ i l'única aresta hexagonal que conté x és $\{x, \tau x\}$.

Finalment, A és el grup de simetria pròpia de Γ .

Si apliquem el teorema 3 a l'espai $X = \text{PSL}(2, 11)/\mathbb{Z}_{11}$ ens adonem que, essencialment, l'element ϕ ja ens és donat. És un generador del «tor» B/\mathbb{Z}_{11} operant per la dreta sobre X . Explícitament, el que ens falta és la permutació τ que juntament amb ϕ defineix una presentació standard del centralitzador de A_5 dins del grup de permutacions de X . Per trobar τ busquem una descripció més natural del conjunt X que permeti detectar més estructura subjacent i el trobarem com una classe de conjugació M d'elements d'ordre 11 de $\text{PSL}(2, 11)$.

Sigui A una elecció fixada d'un subgrup icosaèdric de $\text{PSL}(2, 11)$. (Recordem que hi ha dos d'aquests subgrups a menys de conjugació.) Aleshores, si \mathbb{Z}_{11} és el radical unipotent de qualsevol subgrup de Borel, podem considerar, utilitzant la multiplicació, el producte cartesià de conjunts (no pas de grups):

$$\text{PSL}(2, 11) = A \times \mathbb{Z}_{11}. \quad (12)$$

Si \mathbb{Z}_{11}^* és el conjunt d'elements d'ordre 11 de \mathbb{Z}_{11} tenim, és clar, $|\mathbb{Z}_{11}^*| = 10$. Com que hi ha dotze subgrups de Borel, deduïm que hi ha 120 elements d'ordre 11 a $\text{PSL}(2, 11)$. Com que B té dues òrbites de 5 elements a \mathbb{Z}_{11}^* se segueix que hi ha dues classes de conjugació M, M' d'elements d'ordre 11, cadascuna amb 60 elements. Sigui M una qualsevol d'aquestes dues classes.

OBSERVACIÓ. De fet, com es veurà en el teorema 4, l'elecció de A afavoreix l'elecció d'una concreta d'aquestes dues classes. Qualsevol automorfisme extern no trivial de $\text{PSL}(2, 11)$ intercanvia les dues eleccions de A i també intercanvia les dues eleccions de M .

Com que el centralitzador de qualsevol element de M és el radical unipotent de l'únic subgrup de Borel B que el conté, tenim un isomorfisme:

$$M \simeq X = \text{PSL}(2, 11)/\mathbb{Z}_{11}, \quad (13)$$

de $PSL(2, 11)$ -conjunts. Els dotze «pentàgons» $P \subset M$ resulten ser els subconjunts de la forma:

$$P = B' \cap M, \quad (14)$$

on B' és un subgrup de Borel de $PSL(2, 11)$.

OBSERVACIÓ. En termes de teoria de grups s'infereix de (15) que els pentàgons es poden caracteritzar com els subconjunts commutatius maximals de M . En aquesta afirmació hi ha implícit el fet que —com en el cas de $A(2)$ (vegeu la secció 2)— la commutativitat a M és una relació d'equivalència i els pentàgons són les classes d'equivalència.

Si p és un nombre primer i M_p és una classe de conjugació d'elements d'ordre p de $PSL(2, p)$, observeu que el resultat de Galois es pot interpretar com la impossibilitat de que M_p sigui un espai principal homogeni respecte de l'acció de conjugació d'un subgrup de $PSL(2, p)$, quan $p > 11$. En particular, l'estructura del graf de Cayley de M que construïrem a continuació no pot tenir una generalització anàloga per a M_p quan $p > 11$.

L'ús del terme pentàgon indica que hi ha una estructura implícita de graf a les òrbites del tor B/\mathbb{Z}_{11} . Fins ara això no ha estat explícitament esclarit. Però, en efecte, hi ha dos grafs de Cayley poligonals en el grup cíclic $B/\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}_5$ —cadascun definint una estructura pentagonal en aquest grup i, per tant, a les seves òrbites. Aquests grafs s'il·lustren a la figura 5, on es distingeixen per les arestes simples i dobles. Observeu que $n = 5$ és el valor mínim de n pel qual \mathbb{Z}_n té més d'un graf de Cayley poligonal.

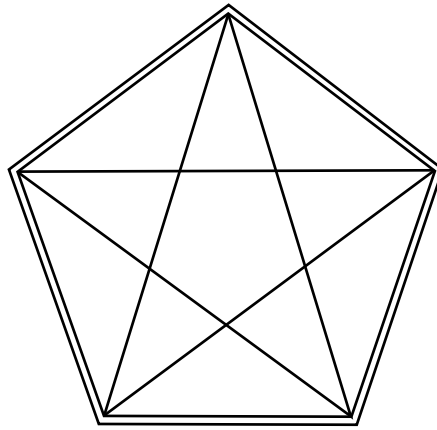


FIGURA 5

L'acció d'aquest \mathbb{Z}_5 es pot expressar en termes de l'operació de grup de $PSL(2, 11)$. Per a una de les estructures pentagonals, les dues arestes pentagonals que contenen un $x \in M$ qualsevol són $\{x, x^3\}$ i $\{x, x^4\}$. Per a l'altra estructura pentagonal, les arestes són $\{x, x^9\}$ i $\{x, x^5\}$ —noteu que $\{x^4\}^3 = x$ i $\{x^5\}^9 = x$. La tria d'una d'aquestes dues situacions determina ϕ (vegeu el teorema 11) a menys d'inversió.

La possibilitat d'expressar el graf de l'icosàedre truncat mitjançant propietats de teoria de grups de la classe de conjugació M és clarament anàloga, i fou motivada,

per la troballa, com al teorema 1, del graf de l'icosàedre com una estructura d'una classe de conjugació C d'elements d'ordre 5 del grup icosaèdric A . Hi ha una altra raó heurística per prendre M com a conjunt dels vèrtexs de l'icosàedre truncat. Seria més o menys aquesta: els dotze vèrtexs de l'icosàedre han estat identificats, com es feia a [2], amb els punts de la «varietat bandera» de $PSI(2, 11)$ —els dotze subgrups de Borel de $PSI(2, 11)$. Truncar un políedre es pot pensar com un anàleg finit del procés d'explosió de punts a les varietats algebraïques. En aquest procés, un punt és substituït per certs objectes de l'espai tangent en el punt. Si canviem espai tangent per espai cotangent, és ben sabut que una òrbita dels elements unipotents principals d'un grup de Lie semisimple s'immergeix de manera natural en l'espai cotangent de la varietat bandera. Així doncs, pensar el truncament de l'icosàedre com l'operació de substituir un subgrup de Borel B' , pensat com un element (de la varietat bandera), pels elements del pentagon $B' \cap M$, no deixa de tenir una certa motivació.

El punt subtil en la construcció del graf de l'icosàedre truncat a partir de la classe de conjugació M és la determinació de la permutació τ de M d'ordre 2 que, juntament amb ϕ , defineix una presentació estàndard del centralitzador de l'acció de conjugació de A sobre M . Donat qualsevol $x \in M$, el parell $\{x, \tau x\}$ definiria l'aresta hexagonal que conté x . Així doncs, el que hauria de fer τ és assignar a cada $x \in M$ (pensat com a element unipotent que pertany a un únic subgrup de Borel B), no només un altre subgrup de Borel B' , sinó un element unipotent distingit, τx , en aquest subgrup. No conec cap operació per a grups en general que acompleixi una cosa com aquesta. Geomètricament, aquest enllaç dels pentàgons es representa localment amb les línies puntejades del diagrama (figura 6).

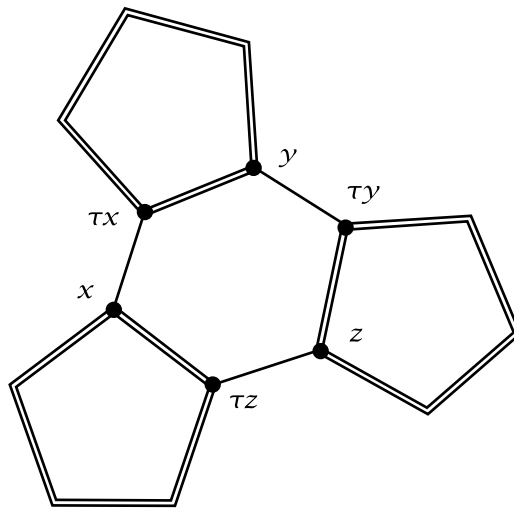


FIGURA 6

(Per descomptat, per representar els enllaços del C_{60} les línies simples i dobles de la figura 6 s'haurien de capgirar.)

En la notació del següent teorema, l'aplicació τ s'obté per la relació: $\tau x = \rho_x x$. El teorema 4 és el resultat principal de [13], on és provat com a teorema 3.30. Encara que la seva prova no utilitza l'ordinador, fou descobert després d'una llarga sèrie de

càlculs dins de $PSL(2, 11)$ realitzats amb Maple.

4 TEOREMA *Sigui A un grup icosaèdric arbitrari de $PSL(2, 11)$. Sigui $A(2)$ el conjunt dels elements d'ordre 2 de A . Aleshores, per a qualsevol $x \in PSL(2, 11)$ d'ordre 11, hi ha un únic element $\sigma_x \in A(2)$ tal que el commutador $\rho_x = x^{-1}\sigma_x x \sigma_x$ torna a pertànyer a $A(2)$. A més, existeix una única elecció C_A d'una classe de conjugació (de 12 elements) d'elements d'ordre 5 de A i una única elecció M d'una classe de conjugació (de 60 elements) d'elements d'ordre 11 de $PSL(2, 11)$ de manera que, si $x \in M$, existeix un $u \in C_A$ que normalitza els grups cíclics generats per x i per $\sigma_x x \sigma_x$ i és tal que el parell u, ρ_x defineix una presentació est'andard de A . (És a dir, $u \rho_x$ té ordre 3.) A més, si $x \in M$ aleshores $\rho_x x \in M$ i es defineix una estructura d'icosàedre truncat Γ dins M , on les dues arestes pentagonals que contenen x són $\{x, x^3\}$ i $\{x, x^4\}$ i l'única aresta hexagonal que conté x és $\{x, \rho_x x\}$.*

També, donat $x \in M$, l'element $u \in C_A$ satisfent la condició que acabem d'exposar és únic a menys d'inversió i es pot fixar per la condició: $uxu^{-1} = x^5$. Denotem $u = u(x)$ aquest element fixat. L'espai \mathcal{P} dels dotze pentàgons és parametritzat per C_A de manera que per a $u \in C_A$ es té $P_u \in \mathcal{P}$ on $P_u = \{x \in M / u = u(x)\}$. A més, l'estructura icosaèdrica Δ induïda sobre \mathcal{P} per Γ és tal que $\{P_u, P_v\}$ és una aresta si i només si $uv \in C_A$.

A [12] i a [13] es donen taules que, entre d'altres coses, etiqueten els vèrtexs de l'icosàedre truncat i els seus veïns per elements de M .

Referències

- [1] CHUNG, F., STERNBERG, S. «Mathematics and the buckyball», *Amer. Scientist*, 81(1993), 56-71.
- [2] CHUNG, F., KOSTANT, B., STERNBERG, S. «Groups and the buckyball», *Lie theory and geometry*, editat per J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin i V. Kac, Birkhäuser, 1994.
- [3] CONWAY, J. H. *et al Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [4] CONWAY, J. H., SLOANE, N. J. A. *Sphere packings, lattices and groups*, Grundle Math. Wissen. 290, Springer, New York, 1988.
- [5] COXETER, H. M. S. *Regular polytopes*, Dover, 1973.
- [6] CURL, R. F., SMALLEY, R. E. «Fullerenes», *Scientific American*, octubre de 1991, 54-63.
- [7] DRESSELHAUS, M. S., DRESSELHAUS, G., EKLUND, P. C. *Physical properties of Fullerenes*, Academic Press, New York, 1995.
- [8] FOWLER, P. W., MANOLOPOULOS, D. E. *An atlas of Fullerenes*, Oxford, 1995.
- [9] HORNE, R. W. *Virus structure*, Academic Press, New York, 1974.
- [10] HUPPERT, B. *Endliche Gruppen I*, Springer, 1967.
- [11] KORUGA, D., HAMEROFF, S., WITHERS, J., LOUTIFY, R., SUNDARESHAM, M. *Fullerene C₆₀*, North Holland, Amsterdam, 1993.
- [12] KOSTANT, B. «Structure of the truncated icosahedron (such as Fullerene or viral coatings) and a 60-element conjugacy class in $PSL(2, 11)$ », *Proc. Natl. Acad. Sci.* 91 (1994), 11714-11717.

- [13] KOSTANT, B. «Structure of the truncated icosahedron (e.g. Fullerene or C_{60} , viral coatings) and a 60-element conjugacy class in $PSL(2, 11)$ », *Selecta Math.*, New Series, 1 (1995), 163-195.
- [14] PASSMAN, D. S. *Permutation groups*, Benjamin, New York, 1968.
- [15] PENROSE, R. *Shadows of the mind*, Oxford, 1994.

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
5 MERRIL RD.
NEWTON MA 02159-1320
USA
kostant@math.mit.edu