Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 13, núm. 1, 1998. Pàg. 7–26.

Models matemàtics durs i models matemàtics tous*

Vladimir Igorevich Arnold

Resum

Un exemple de model dur és la taula de multiplicar. Un exemple molt senzill de model tou és el principi «quant més dens és el bosc més llenya té». L'existència d'una teoria matemàtica útil dels models tous ha estat descoberta fa relativament poc temps. En la present xerrada es mostrarà, amb exemples simples, com aquesta teoria pot aplicar-se a models econòmics, ecològics i sociològics.

1 Model de guerra o combat

En el model més simple de lluita entre dos rivals (per exemple dos exèrcits), proposat per Lancaster, l'estat del sistema es descriu per un punt (x, y) del primer quadrant del pla. Les coordenades d'aquest punt, x i y, són els efectius dels exèrcits contrincants. El model matemàtic té la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -by, \\ \dot{y} = -ax, \end{cases}$$

on a és la potència de l'armament de l'exèrcit x i b és la de l'exèrcit y.

D'una manera simplista, es suposa que cada soldat de l'exèrcit x mata a soldats de l'exèrcit y i cada soldat de l'exèrcit y mata b soldats de l'exèrcit x, en una unitat de temps. Els punts sobre les lletres en aquesta fórmula indiquen, i indicaran més endavant, la derivada respecte a t, és a dir, la velocitat de canvi de la quantitat designada per la lletra.

Aquest és un model dur que admet una solució exacta:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad ax\,dx = by\,dy, \quad ax^2 - by^2 = \text{const.}$$

L'evolució dels efectius del exèrcits x i y es mou sobre la hipèrbola definida per aquesta equació (figura 1).

*Conferència pronunciada el 25 de setembre de 1997 al seminari analític de l'Administració del President de la Federació Russa. Traduida del rus al castellà per Rafael Ramirez i Natalia Sadowskaia i del castellà al català per Llorenç Roselló.

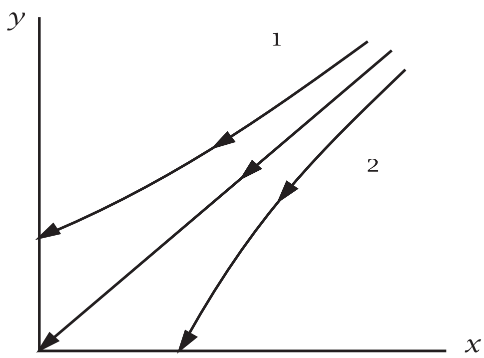

FIGURA 1: Model dur de guerra.

Al llarg d'exactament quina hipèrbola transcorrerà el combat, depèn del punt inicial. Aquestes hipèrboles estan dividides per la recta $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$. Si aquest punt inicial es troba per sobre de la recta (cas 1, fig. 1), aleshores la hipèrbola arriba fins l'eix de les y, i això significa que, en el transcurs del combat, els efectius de l'exèrcit x disminueixen fins a zero (en un temps finit); l'exèrcit y venç i el seu rival és exterminat. Si el punt inicial es troba per sota de la recta (cas 2, fig. 1), aleshores el vencedor és l'exèrcit x.

En l'estat que divideix aquests casos (sobre la recta) la guerra finalitza amb la destrucció dels dos exèrcits, per a l'alegria general, però per això es requereix un temps infinit: el conflicte segueix cremant somortament mentre els contrincants ja han defallit.

La conclusió del model és la següent: per lluitar contra un enemic que és doblement més nombrós, és necessari un armament quatre vegades més potent i contra un altre que és triplement més nombrós es requereix un armament nou cops més potent, etc. (Això ho indiquen les arrels quadrades a l'equació de la recta.)

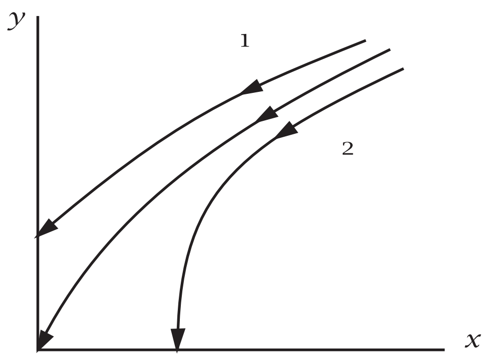

FIGURA 2: Model tou de guerra.

És clar que el nostre model caníbal està fortament idealitzat i seria perillós aplicar-lo directament a una situació real. Arran d'això podem plantejar-nos la pregunta següent: com canviarà la conclusió en front d'una petita variació del model?

Per exemple, si els coeficients a i b no són rigorosament constants, sinó que depenen de x i y i aquesta dependència és desconeguda. En aquest cas es tracta del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x,y)y, \\ \dot{y} = -a(x,y)x \end{cases} \tag{1}$$

que, evidentment, ja no es resol de forma explícita. A les matemàtiques actuals s'han desenvolupat mètodes que permeten fer deduccions de caràcter general sense conèixer amb exactitud la forma explícita de les funcions a i b. En aquesta situació s'acostuma a parlar de model «tou», com a model subjecte a canvis (en el nostre exemple aquests canvis es basen en l'elecció de les funcions a i b).

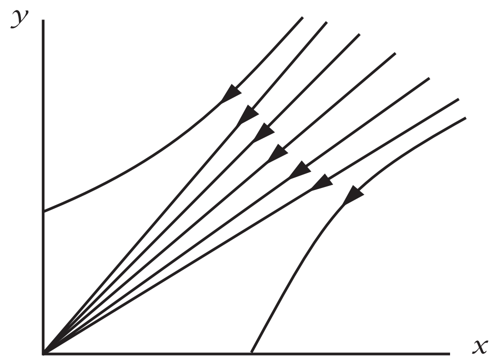

FIGURA 3: Model de guerra no realitzable.

La conclusió general en aquest cas és l'afirmació sobre l'estabilitat estructural del model inicial, és a dir: la modificació de les funcions a i b fa variar les corbes en el pla que descriuen el curs de les accions bèl·liques (les corbes ja no són hipèrboles amb la recta que les divideix), però aquestes modificacions no fan variar la conclusió qualitativa fonamental de què els estats «x venç» i «y venç» estan dividits per una línia neutral que correspon a l'estat «els dos exèrcits es destrueixen mútuament en un temps infinit».

En aquesta situació els matemàtics diuen que el tipus topològic dels sistemes en el pla x i y, és invariant en front de modificacions de les funcions a i b, les quals condueixen només a un encorbament de la línia neutral (fig. 2). Aquesta conclusió matemàtica no és del tot evident. És possible imaginar-se una altra situació, com per exemple la representada en la figura 3, per a la qual la teoria matemàtica de l'estabilitat estructural afirma que no és realitzable, almenys per a funcions a i b que no són massa patològiques (en particular no és realitzable si a i b són polinomis positius a l'origen).

Podem arribar a conclusions sobre l'aplicació qualitativa del model simplificat de guerra per a la descripció aproximada dels estats de tota una classe de models, desconeixent la forma exacta del model dur: les conclusions són vàlides per al model tou. El model simplificat, de fet, dóna fins i tot prediccions quantitatives útils: el pendent de la línia divisòria neutral a l'origen es defineix segons la fórmula $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$, on a i b són els valors dels coeficients a l'origen.

En altres paraules, el principi «contra un enemic el doble de gran és necessari un armament quatre cops més potent» és vàlid en una fase final del procés de destrucció mútua, mentre que en la fase inicial de la guerra el nombre quatre podria necessitar una correcció (en funció de la forma dels coeficients a i b). Per realitzar aquesta correcció s'han desenvolupat mètodes efectius dins de la teoria matemàtica dels models tous (malgrat que la fórmula explícita per a la solució de les equacions d'aquest model no és només desconeguda sinó que, com s'ha demostrat rigorosament, no existeix en absolut).

Pot pensar-se que el model descrit explica, parcialment, els fracasos de Napoleó i Hitler, així com també els èxits de Batia i les esperances dels fonamentalistes musulmans.

2 L'optimització com a camí cap a la catàstrofe

El model simplificat de creixement $\dot{x} = kx$ fou proposat per Maltus (creixement de la població de la Terra). Com és ben sabut, aquest model condueix a un creixement exponencial (és a dir, molt ràpid) de la població x en el transcurs del temps. Aquest model dur és aplicable (evidentment sota certes condicions), per exemple, a l'estudi del desenvolupament de la ciència entre els anys 1700–1950, mesurat, per exemple, per la quantitat d'articles científics publicats (figura 4).

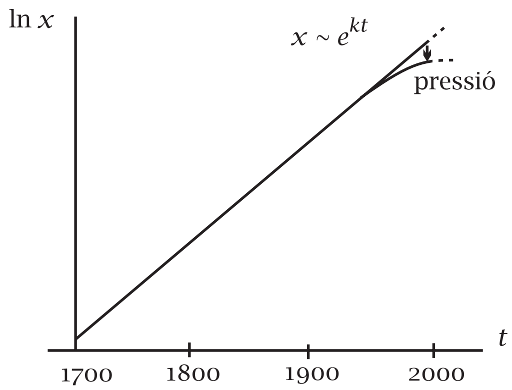

FIGURA 4: Creixement de la ciència.

La continuació del desenvolupament exponencial de la ciència en el segle següent duria ràpidament a l'esgotament del paper i de la tinta i, és més, els científics arribarien a constituir la meitat de la població del globus terraqui. És clar que la societat (en tots els països) no pot permetre això i, en conseqüència, el desenvolupament de la ciència ha de ser aturat (això ho observem en molts països: a Rússia la ciència acadèmica està reformant-se justament ara).

Fenòmens anàlegs de saturació tenen lloc en qualsevol població (possiblement, en un futur no molt llunyà, succeirà en tota la humanitat). Quan la població és massa gran el model dur de Maltus amb coeficient de creixement constant perd la seva aplicabilitat. Naturalment, quan x és massa gran la competència pels recursos condueix a la reducció de k i el model dur de Maltus ha d'ésser substituït pel model tou

$$\dot{x} = k(x)x,$$

amb coeficient de reproducció depenent de la població. Un exemple senzill és quan $k(x) = a - bx$. En tal cas obtenim el model conegut com model logístic (figura 5):

$$\dot{x} = ax - bx^2, \text{ per exemple } \dot{x} = x - x^2.$$

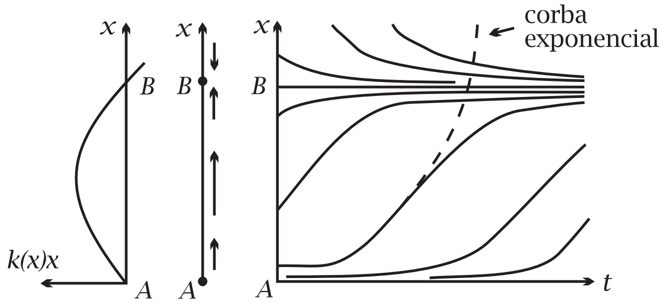

FIGURA 5: Model logístic.

Per mitjà d'una elecció addient de l'escala de x i t, sempre es pot aconseguir que els coeficients a i b siguin iguals a 1. Tot i això, vull subratllar que les conclusions que es faran més endavant són vàlides (amb una exactitud de valors numèrics de les constants) per a tots els valors dels coeficients a i b i fins i tot són vàlides per a una àmplia classe de models amb diverses funcions $k(x)$ (que decreixen amb x). En altres paraules, les conclusions futures fan referència a tot model tou i no tenen res a veure amb cap model logístic dur en especial.

A la part esquerra de la figura 5 es representa la gràfica de la funció $k(x)x$, que és positiva entre els punts A i B. En el centre es dibuixa el camp vectorial a l'eix x que representa tots els possibles estats del sistema,[1] el qual indica la velocitat d'evolució del sistema. En els punts A i B la velocitat és igual a zero: són els estats estacionaris. Entre els punts A i B la velocitat és positiva (la població creix). Després del punt B, és negativa (la població decreix). A la dreta de la figura es representa la dependència temporal resultant de la població, sota diferents condicions inicials.

El mètode prediu que amb el transcurs del temps s'arriba al règim estacionari B, el qual és estable: la població més gran disminueix i la més petita augmenta.

El model logístic descriu satisfactòriament múltiples fenòmens de saturació. A prop de A, quan la població és petita, el model indicat és molt proper al de Maltus. Tot i així, per a valors de x prou grans (per als coeficients escollits anteriorment, de l'ordre de $1/2$), s'observa una diferència ostensible amb el creixement maltusià (indicat per la línia puntejada en la figura 5): en lloc d'una tendència de x cap a infinit, la població tendeix cap al règim estacionari B. La població de la Terra s'aproxima actualment als sis mil milions, mentre que el valor estacionari (segons diferents valoracions) és de 16–20 mil milions de persones.

El model logístic és un model habitual a l'ecologia. Podem imaginar-nos, per exemple, que x és la quantitat de peixos en un llac o a l'oceà mundial. Analitzem ara com la pesca amb intensitat c influeix en el destí d'aquests peixos:

$$\dot{x} = x - x^2 - c.$$

1 Precisament, en cada punt, que correspon a un estat del sistema, s'aplica un vector de velocitat de canvi d'aquest estat, és a dir $\dot{x}$; vegeu per exemple [10], p. 32.

Els càlculs demostren que la resposta varia fortament per a cert valor crític de la quota de pesca c. Per al nostre model dur el valor crític és $c = 1/4$. Fenòmens anàlegs tenen lloc per al model tou

$$\dot{x} = k(x)x - c,$$

(el valor crític de c en aquest cas correspon al màxim de la funció $k(x)x$).

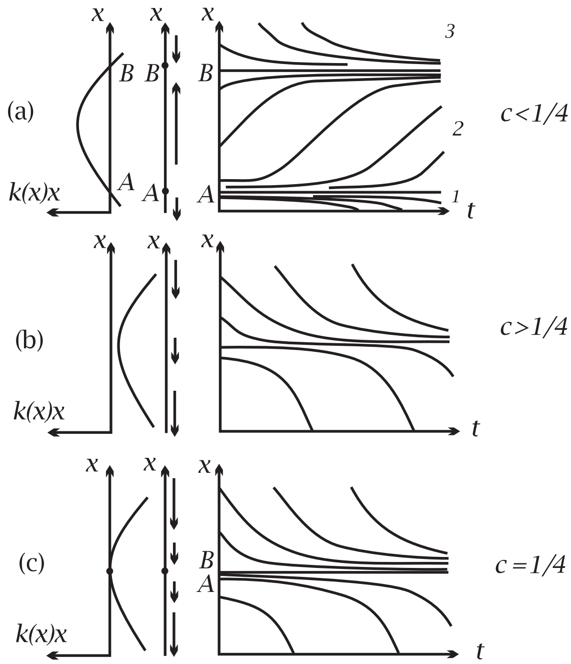

FIGURA 6: Dèficit (a), superàvit (b) i optimització (c) de la pesca.

El curs de l'evolució del nombre de peixos x en el transcurs del temps es representa en la figura 6. Si la quota c és petita aleshores els canvis (comparats amb la població lliure per a la qual $c = 0$) consisteixen en el següent: El sistema té dos estats d'equilibri A i B. L'estat B és estable, la població en aquest cas és una mica menor que la població sense explotar, però es recupera per a pertorbacions petites de x respecte de l'estat B. L'estat A és inestable: si per qualsevol causa (diguem per pesca furtiva o pesta) el tamany de la població cau ni que sigui una mica per sota del nivell A, aleshores la població serà aniquilada completament en un temps finit (encara que sigui lentament, si la diferència amb A és molt petita).

Al meu parer, l'estat actual de la ciència a Rússia es descriu aproximadament pel punt A: l'estat és estacionari o, com diuen els físics, quasiestacionari, en el sentit que petites pertorbacions poden fàcilment conduir a un procés d'aniquilació irreversible.

Per a les quotes crítiques de pesca més grans, la població x és aniquilada en un temps finit, independentment de la quantitat inicial. Aquest és el destí dels elefants, mamut: proboscidi extingit semblant a l'elefant, per· d'ullals molt m,s llargs que visquŠ a Europa durant el plioscŠ. els bisons i moltes balenes. Els ecologistes han calculat quantes espècies moren **diàriament** per la influència de l'activitat humana.

Aquestes xifres són aterradores. Models d'aquest tipus descriuen també la caiguda d'empreses, consorcis i estats. En el nostre model, el perill d'aniquilació apareix quan l'estat A s'aproxima a l'estat estable B, és a dir, quan la quantitat x descendeix aproximadamanet fins a la meitat de la quantitat estacionària inicial de la població sense explotació.

Segons el meu parer, la població de Rússia encara no ha baixat fins aquest nivell de perill mortal, encara que, possiblement, tendeixi cap a ell. La ciència a Rússia es troba a l'actualitat exactament en les condicions d'excés de pesca. Per posar un exemple, diguem que el sou de l'investigador científic principal de l'Institut Matemàtic Steklov de l'Acadèmia de Ciència Russa (càrrec que ocupo) és de 500.000 rubles al mes —és a dir, menys de 100 dòlars— i és, per tant, cent vegades menor que el sou dels meus col·legues als Estats Units (i cinquanta vegades menor que a França). És comprensible que en aquestes condicions la quantitat $\dot{x}$ (velocitat de disminució de la quantitat de científics a Rússia) estigui restringida fonamentalment per mesures discriminatòries d'Occident (per exemple dels Estats Units) dirigides a la defensa dels seus llocs de treball contra el flux d'aspirants i doctorands estrangers més ben preparats (la majoria són de la Xina i Rússia).

De tot això es dedueix que l'elecció dels valors del paràmetre c és un punt d'extraordinària importància per controlar l'explotació d'una població. Una organització que planifica de forma raonable la seva producció, al tractar d'augmentar la quota d'explotació c, no ha de sobrepassar el nivell crític (en el nostre cas $c \leq 1/4$). L'optimització condueix exactament a l'elecció del valor crític $c = 1/4$ sota del qual la població explotada no és exterminada del tot, però el rendiment de l'explotació en una unitat de temps arriba al valor màxim possible $c = 1/4$ (a la població donada és impossible obtenir un rendiment major *en un interval llarg de temps* ja que la velocitat màxima de creixement, fins i tot per a una població no explotada, és igual a $1/4$).

A la part inferior de la figura 6 s'observa el que succeix per a aquesta elecció «òptima» $c = 1/4$. Per a una població inicial arbitrària $x \geq 1/2$, amb el transcurs del temps sempre s'arriba al règim estacionari $A = B = 1/2$. No obstant això, aquesta població estacionària és inestable. Una disminució aleatòria petita de x condueix a l'extermini total de la població en un temps finit.

Per tant *l'optimització dels paràmetres del pla pot conduir* —i condueix en la majoria dels casos, dels quals el nostre model n'és un exemple senzill— *a l'extermini total del sistema planejat, com a conseqüència de la inestabilitat que apareix a causa de la optimització.*

El nostre model tou, malgrat la seva simplicitat evident, permet donar un mètode de lluita contra el mal indicat. Resulta que l'estabilitat es recupera si canviem la planificació dura per un *enllaç invers.* En altres paraules, la resolució sobre la quantitat d'explotació (quota de pesca, pressió fiscal, etc.) cal prendre-la no pas mitjançant directives (c = const.) sinó prendre-la en dependència de l'estat on ha arribat el sistema, és a dir

$$c = kx,$$

on k és un paràmetre («quota diferencial») que està subjecte a elecció.

En aquest cas el model pren la forma (figura 7)

$$\dot{x} = x - x^2 - kx.$$

Amb el transcurs del temps, per a $k < 1$ el sistema es situa en l'estat estacionari

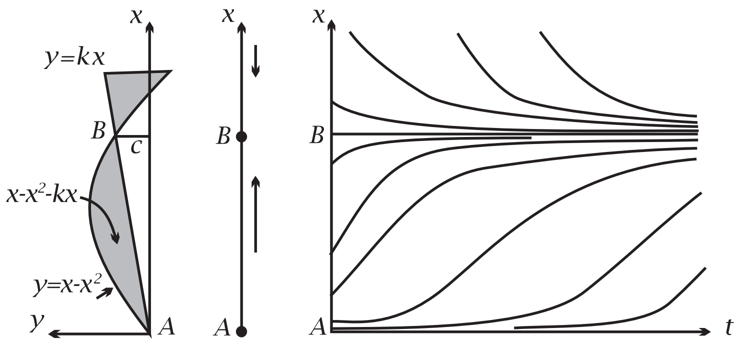

FIGURA 7: Sistema estable amb enllaç invers.

estable B. En aquest estat el «benefici» mig perenne $c = kx$ és òptim quan la recta $y = kx$ passa pel vèrtex de la paràbola $y = x - x^2$, és a dir, per a $k = 1/2$. Per a aquest valor de la quota diferencial k el «benefici» mig al nostre sistema arriba al valor màxim possible $c = 1/4$. Tot i així, a diferència del sistema planificat dur, el sistema amb enllaç invers és estable inclús per al valor òptim del coeficient k (una petita disminució aleatòria respecte de l'estat estacionari $x = B$ condueix al reestabliment automàtic del nivell estacionari per mitjà dels recursos del mateix sistema). És més, petites variacions del valor òptim del coeficient $k = 1/2$ no duen a l'autodestrucció del sistema (com succeïa en el cas de lleugers canvis del pla dur òptim C), sinó que condueixen només a una petita reducció del «benefici».

D'aquesta manera *la introducció de l'enllaç invers (és a dir, de la dependència de les resolucions preses de l'estat real del sistema i no només dels plans) estabilitza el sistema, el qual, sense aqest, es destruiria en optimitzar els paràmetres.*

Tot el que s'ha dit anteriorment segueix essent vàlid per al model tou (amb el recompte corresponent dels coeficients). Val la pena subratllar que precisament aquesta independència dels detalls del model dur (els quals, normalment, no són del tot ben coneguts) fa útils les conclusions de la modelització tova.

Els esforços per canviar un model tou per un model dur generalment condueixen a jerarquies de construccions matemàtiques cada cop més complicades i voluminoses, l'estudi de les quals permet obtenir un material perfecte per a una gran quantitat de tesis doctorals; en realitat, però, el seu veritable valor sovint no sobrepassa el de deduccions simples (encara que no evidents sense els matemàtics), basades en l'estudi de models simples anàlegs als estudiats anteriorment.

3 Models durs com a camí cap a prediccions equívoques

És important que els models simples siguin estructuralment estables, és a dir, que les conclusions segueixin essent vàlides en front de petites variacions dels paràmetres i les funcions que els descriuen. El model descrit anteriorment té la propietat de ser estructuralment estable. Un exemple de model que no té aquesta propietat és el famós model de lluita per la supervivència de Lotka-Volterra (figura 8):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - cxy, \\ \dot{y} = -by + dxy. \end{cases} \tag{2}$$

En aquest model x representa el nombre de caràcids i y el nombre de lluços de riu (els qui ho desitgin poden considerar que x és la quantitat de treballadors i y és la quantitat de màfies organitzades). El coeficient a descriu la velocitat del creixement natural del nombre de caràcids en absència de lluços, b és la velocitat de mort natural dels lluços sense la presència dels caràcids. La probabilitat d'interacció entre caràcids i lluços es considera proporcional tant a la quantitat de caràcids com a la quantitat de lluços (xy). Cada interacció fa disminuir la població de caràcids i afavoreix l'augment de la població de lluços (que corresponen respectivament als membres $-cxy$ i dxy en la part dreta de les equacions).

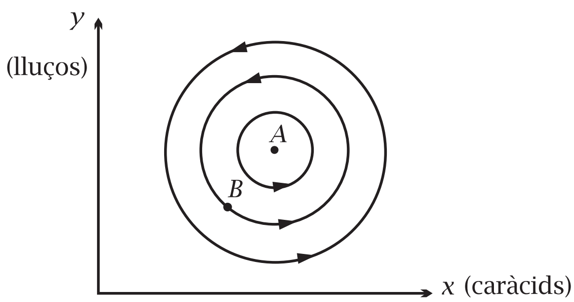

FIGURA 8: Evolució de la població en el model de Lotka-Volterra.

Les anàlisis matemàtiques d'aquest model (dur) mostren que existeix un estat estacionari (A en la figura 8) i que qualsevol altre estat inicial (B) condueix a oscil·lacions periòdiques tant de la població dels caràcids com dels lluços, de tal manera que després del transcurs d'un cert període de temps el sistema torna a l'estat inicial B.

Lleugeres modificacions del model condueixen al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - cxy + \epsilon f(x,y), \\ \dot{y} = -by + dxy + \epsilon g(x,y), \quad \epsilon \ll 1, \end{cases} \tag{3}$$

on, com s'observa, s'han afegit a la part dreta de les equacions petites correccions (que consideren, per exemple, la competència dels caràcids pels aliments i la lluita dels lluços pels caràcids). Com a conseqüència, obtenim que la conclusió sobre la periodicitat (retorn del sistema a l'estat inicial B), vàlida per al model dur de Lotka-Volterra, perd la seva validesa. En funció del tipus de les petites correccions f i g, són factibles, per exemple, les configuracions 1–3 de la figura 9 (que són ja estructuralment estables).

En el cas 1 l'estat d'equilibri A és estable. Precisament aquest estat es reestableix per a altres condicions inicials qualsevol, dins d'un període llarg de temps.

En el cas 2 el sistema «s'encamina a la destrucció». L'estat estacionari és inestable. L'evolució condueix a un augment brusc de la quantitat de bandolers o a la seva

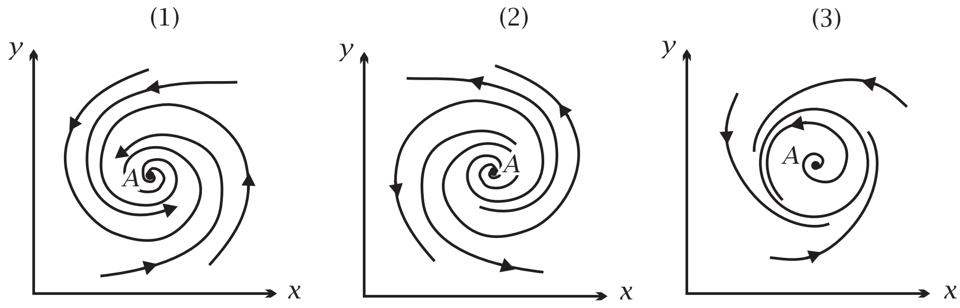

FIGURA 9: Model tou estructuralment estable de lluita per la supervivència.

completa extinció (com a conseqüència que han espoliat tant els treballadors que ja no queda res per expoliar). El sistema cau finalment a la regió on x i y prenen valors tan grans o tan petits que el model perd la seva validesa: té lloc el canvi de les lleis d'evoluci ó, és a dir, té lloc la revolució.

En el cas 3, al sistema en estat estacionari s'hi instaura, en el transcurs del temps, el règim periòdic c (en aquest estat, popularment parlant, té lloc l'alternància en el poder dels radicals i conservadors). A diferència del model dur inicial de Lotka–Volterra, en el model descrit el règim periòdic establert no depèn de les condicions inicials, però una lleugera desviació de l'estat estacionari A no condueix, en aquest cas, a petites oscil·lacions al voltant del punt A (com succeeix en el model de Lotka–Volterra), sinó que condueix a oscil·lacions d'amplitud completament determinada (independentment de la menudesa de la desviació).

Són possibles, també, altres casos estructuralment estables (per exemple amb diversos règims periòdics).

Conclusió: El model rígid sempre ha d'ésser analitzat des del punt de vista de l'estabilitat estructural dels resultats obtinguts durant l'anàlisi relacionada amb petites modificacions del model (que el transforma en tou).

Per determinar quin dels casos 1–3 (o altres possibles) té lloc en el model de Lotka–Volterra, és de primordial importància el tenir una certa informació complementària sobre el sistema (a la nostra fórmula, es requereix informació complementària sobre el tipus de les petites correccions f i g). La teoria matemàtica dels models tous indica exactament quin tipus d'informació és necessària en aquests casos, sense la qual el model donat pot conduir a prediccions qualitativament errònies.

Les conclusions obtingudes d'acord amb l'estudi de models tous, són fiables només després d'haver estat sotmeses a una anàlisi des del punt de vista de la seva estabilitat estructural.

4 Perill del control multiescalonat

El fenomen que es descriu en aquest apartat, que és ben conegut en la teoria de control de sistemes tècnics, s'observa en situacions extremadament generals. Jo, en aquest apartat, el descriuré mitjançant un model simple, canviant només els termes tècnics per termes més quotidians.

Suposem que la producció d'algun producte x és controlada per un cert gerent, el qual té poder sobre la velocitat de producció:

$$\dot{x} = y.$$

A la vegada, el comportament del gerent, y, és controlat pel gerent de segon nivell, el qual decideix com cal modificar la velocitat de la producció:

$$\dot{y} = z.$$

A la vegada, el comportament del gerent de segon nivell, z, és controlat pel gerent de tercer nivell, i així successivament, fins arribar al gerent principal (gerent de nivell n), el qual realitza un enllaç invers al nostre model. Les seves resolucions es basen no en el desig de complir ordres dels superiors (com és el cas dels gerents de rangs inferiors), sinó en els interessos de l'empresa. Per exemple, ell pot desitjar que la quantitat x arribi al valor X i amb aquest objectiu ell influirà en el gerent de nivell anterior en sentit positiu si no s'ha arribat al valor X, i en sentit negatiu si el valor X ha estat superat.

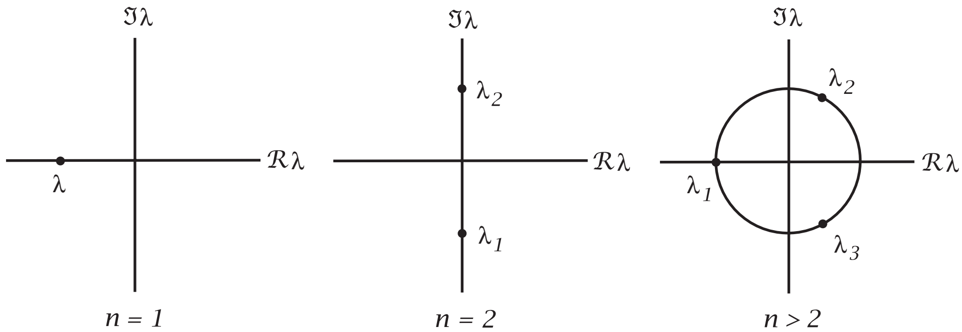

FIGURA 10: Inestabilitat del control multiescalonat.

En particular, per a $n = 3$ el model simple d'aquest gènere pren la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -k(x - X), \quad k > 0. \end{cases} \tag{4}$$

L'equació d'aquest model dur es pot representar, en el cas general, com una equació diferencial d'ordre n:

$$x^{(n)} = -k(x - X),$$

la qual es resol fàcilment de manera explícita. L'estabilitat de l'estat estacionari desitjat ($x = X, y = z = \ldots = 0$) es determina en funció de si són negatives les parts reals de les arrels de l'equació característica

$$\lambda^n = -k,$$

que són complexes i estan representades en la figura 10.

En el pla complex, les arrels de l'equació característica indicada es troben en els n vèrtexs d'un polígon regular. Per a $n \geq 3$, algun d'aquests vèrtexs està, necessàriament, a la part dreta (inestable) del semiplà (Re$\lambda > 0$). Per a $n = 1$, l'arrel $\lambda = -k$

està en el semiplà estable i per a $n = 2$ les arrels $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ es troben a la frontera d'estabilitat.

Conclusió: El control multiescalonat, descrit pel nostre model, és inestable per $n \geq 3$. Un control biescalonat condueix cap a oscil·lacions periòdiques, sense arribar al creixement catastròfic de les oscil·lacions que és propi d'un control escalonat triple o superior.

Una estabilitat veritable està garantida només per un control uniescalat, en el qual el gerent està més preocupat pels interessos de l'empresa que pels premis que vinguin dels seus caps.

Aquestes conclusions basades en l'anàlisi de models rígids simples superen la prova de l'estabilitat estructural. Una excepció és el cas en què $n = 2$: un control biescalat tant pot ser estable com inestable, en funció dels detalls de l'organització de l'empresa, que hem menyspreat anteriorment quan construirem el model simple.

El funcionament perllongat, i segons sembla estable, del control multiescalonat a l'URSS s'explica, possiblement, per l'incumpliment de les instruccions directives i l'existència d'un sistema submergit d'estimulació als dirigents dels diferents nivells per arribar als objectius plantejats. Sense aquest interès real —que en les condicions modernes no té perquè estar garantit per la corrupció— el sistema de control multiescalonat sempre condueix a la ruïna.

Feliçment, la necessitat de la indepència del Banc Central de Rússia (Centro-Bank) ha estat ben entesa. Tot i així, el control multiescalonat (administratiu) segueix vigent en molts altres casos.

5 Models matemàtics de la «perestroika»

Els models matemàtics més simples i més generals d'aquesta situació fortament no lineal condueixen a conclusions que semblen inesperades per als especialistes en teoria de control, els quals estan acostumats a treballar amb sistemes lineals, on els resultats són proporcionals als esforços realitzats. A continuació reproduiré la descripció d'aquestes conclusions tretes de la tercera edició del meu llibre *Teoria de catàstrofes*, editorial Nauka, 1990 (en les edicions anteriors no em va ser possible incluore-les, per causes que espero que hagin desaparegut, no només de forma temporal, com a conseqüència de la mateixa «perestroika»).

Estudiem un sistema no lineal que s'ha instaurat en un estat estable, considerat dolent, ja que en els límits del camp de visibilitat es té un altre estat estable del sistema, millor, més preferible[2] (figura 11).

Aquí tenim algunes de les conclusions més simples:

1. El moviment pausat cap a un estat millor condueix immediatament a un empitjorament. La velocitat de l'empitjorament, en un moviment uniforme cap a un estat millor, creix.
2. Durant el moviment de l'estat pitjor cap a un estat millor, la resistència del sistema al canvi del seu estat, creix.
3. A la resistència màxima s'hi arriba abans que al pitjor estat, pel qual és necessari passar per arribar a un estat millor. Després de traspassar la resistència

2 L'economia de mercat, per ella mateixa, no és cap panacea: d'acord amb el famós teorema de Debreu, aquesta economia pot conduir, en principi, no pas a l'estabilitat, sinó a qualsevol mena de caos.

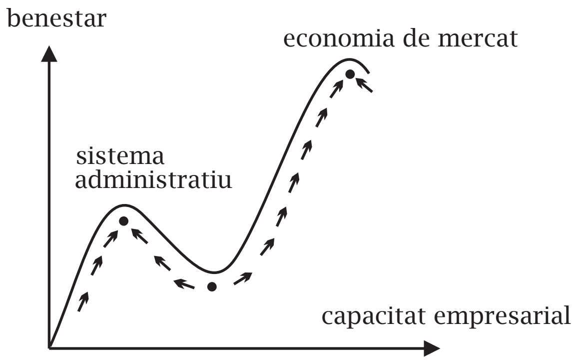

FIGURA 11: La «perestroika», des del punt de vista de la teoria.

màxima, l'estat continua deteriorant-se.

4. A mesura que s'apropa el pitjor estat, de camí cap a la «perestroika», començant des d'un cert moment, la resistència comença a decréixer i, en el moment en què el pitjor estat ha estat superat, la resistència no només despareix totalment, sinó que a més el sistema comença a ser atret cap a un estat millor.
5. La mesura d'empitjorament necessària per passar a un estat millor és comparable amb el millorament final i creix amb el perfeccionament del sistema. Un sistema dèbilment desenvolupat pot passar a un estat millor quasi sense un empitjorament previ, de la mateixa manera que un sistema desenvolupat, degut a la seva estabilitat, no està capacitat per a una millora contínua.
6. Si s'aconsegueix fer passar el sistema d'un estat estable dolent a un altre que està bastant a prop d'un estat bo, no de manera contínua, sinó de cop, en forma de salt, aleshores, més endevant, ell mateix evolucionarà en direcció a l'estat millor.

Aquestes lleis objectives del funcionament dels sistemes no lineals s'han de tenir obligatòriament en compte. Anteriorment hem formulat només conclusions qualitatives molt simples. La teoria ens proporciona també models quantitatius, però les conclusions qualitatives són més importants i al mateix temps més fiables: depenen poc dels detalls de funcionament del sistema, que pot tenir una estructura i uns paràmetres quantitatius que no ens siguin prou coneguts.

Napoleó criticava a Laplace per «intentar introduir a l'administració pública l'esperit dels infinitèsims.»[3]

La teoria matemàtica de la «perestroika» és una branca de l'anàlisi infinitessimal moderna sense la qual un control conscient dels sistemes no lineals complexos, poc coneguts, és pràcticament impossible.

La teoria de la modelització tova és un acte d'obtenir conclusions relativament fiables de l'anàlisi de models poc fiables. Més avall presentarem encara un altre model que explica unes lleis observades que són molt sorprenents.

3 Els meus col·legues francesos m'expliquen que Laplace, essent ministre, exigia que tots els comptes coincidissin fins l'últim cèntim.

6 Estadística dels primers dígits dels valors de les potències de dos i el repartiment del món

L'u apareix com a primera xifra de les potències del nombre 2 sis cops més sovint que el nou. D'igual manera es distribueixen els primers dígits de les poblacions i àrees dels països del món (suposo que les primeres xifres de les quantitats d'empleats o els capitals de les empreses es regeixen per aquesta mateixa distribució, però no disposo de les dades necessàries per comprovar-ho).

L'explicació donada a continuació es converteix en teorema per a un model simple dur fixat (pel que sembla, aquests teoremes poden demostrar-se per a una classe àmplia d'altres models durs, així que tota la teoria es justifica, possiblement, per a la modelització tova).

La successió dels primers dígits dels valors de 2^n, $(n = 0, 1, 2, \dots)$,

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \dots$$

conté moltíssims uns. Continuant els càlculs, es pot comprovar que l'u constitueix assimptòticament gairebé el 30% dels elements d'aquesta successió. Aquest resultat es dedueix del teorema de G. Weyl (demostrat fa prop de cent anys) segons el qual la successió de les parts fraccionàries dels nombres nx, on x és un nombre irracional, es distribueix uniformement a l'interval $[0, 1]$ (la part fraccionària d'un nombre a és la diferència entre a i el major dels nombres enters, $[a]$, que no sobrepassen a, és a dir, $\{a\} = a - [a]$). Segons el teorema de Weyl es dedueix que si, al llarg d'una circumferència de longitud 1, un punt salta a passos incommensurables amb la seva longitud (figura 12), aleshores el temps que aquest punt es deté en cada arc és pro-

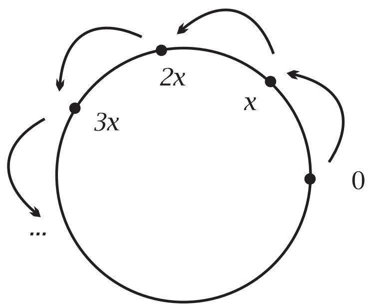

FIGURA 12: El teorema de Weyl.

porcional a la longitud de l'arc (i no depèn de la posició de l'arc a la circumferència).

La primera xifra i d'un nombre es determina coneixent en quin dels intervals, entre els punts $\log i$ i $\log(1 + i)$, està la part fraccionària (mantissa) del seu logaritme (aquí i més avall els logaritmes són en base 10).

De la igualtat $\log 2^n = n \log 2$, i considerant que $x = \log 2$ és un irracional, del teorema de Weyl s'obté la distribució uniforme dels punts $\{\log 2^n\}$ a l'interval de 0 a 1. En conseqüència, la part dels nombres 2^n que tenen i com a primer dígit de la seva part decimal constitueix la longitud p_i de l'interval comprès entre $\log i$ i $\log(i + 1)$. D'aquesta manera, obtenim la següent estadística dels primers dígits dels nombres 2^n (en percentatge):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_i$	30	17	12	10	8	7	6	5	5

Per exemple, la part de les xifres 1 és $p_1 = \ln 2 \approx 0,30103\ldots$, que és aproximadament sis cops major que la part corresponent a la xifra 9. Una distribució anàloga tenen les primers xifres de qualsevol progressió geomètrica, per exemple 3^n. Una excepció són, naturalment, les progressions $10^n, (\sqrt{10})^n, \ldots$ i en general totes les progressions amb raó $10^{p/q}$ on p i q són enters.

Fa uns vint anys, N. N. Constantinov em va fer observar que les primeres xifres de les poblacions dels països del món es regeixen per una estranya distribució: la quantitat d'uns és sis cops més gran que la quantitat de nous. Vet aquí l'explicació que vaig donar aleshores a aquest fenomen. Analitzem la successió formada per la quantitat de població d'un cert país fix en anys consecutius. D'acord amb la teoria de Maltus aquests nombres formen una progressió geomètrica. D'acord amb el teorema de Weyl les primeres xifres estan distribuïdes de la mateixa manera que a les potències de dos. Passarem a l'estudi de l'estadística de la població de diferents països en un mateix any. D'acord amb el «principi ergòdic» les mesures temporals es poden substituir per les mesures espacials, i l'estadística de les primers xifres ha de ser la mateixa que l'estadística per a un país (el principi ergòdic és la mateixa idea segons la qual per investigar l'evolució d'un arbre en un bosc no és necessari esperar fins que creixi des de la llavor i mori, sinó que n'hi ha prou amb mirar els arbres de diferents edats). Aquí hem utilitzat aquest principi en el sentit invers, calculant l'estadística dels països a partir dels coneixements de l'evolució d'un únic país.

Com a comprovació, vaig comparar el nombre de pàgines dels llibres d'una estanteria de la meva biblioteca, la llargària dels rius i l'alçada de les muntanyes. En tots aquests casos la part d'uns i nous entre els primers dígits dels nombre obtinguts resultaren ser propers: els llibres, les muntanyes i els rius no creixen en progressió geomètrica. Com a conseqüència, la teoria de Maltus no és aplicable en aquests casos. Per això la diferència de les estadístiques de les primeres xifres dels nombres que expressen la població i, diguem, la longitud dels rius serveix com una peculiar demostració de la fórmula de Maltus, segons la qual la població o creix en progressió geomètrica o decreix —com es pot observar actualment a Rússia. Tot i així, fa uns deu anys M. B. Sevruk va descobrir que, no només les poblacions, sinó també les superfícies dels països es regien per aquesta estranya llei de distribució dels primers dígits de les potències de dos. Aquesta distribució pot semblar menys estranya si s'observa que aquesta és l'única distribució independent de les unitats en què es mesuren les superfícies (siguin aquestes quilòmetres quadrats, milles quadrades, peus quadrats, polzades quadrades, etc.). La teoria de Maltus no és aplicable, pel que sembla, a les superfícies. D'aquí es planteja la pregunta: com explicar el següent comportament de les superfícies?

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_i$	29	21	10	11	6	6	8	3	6

Resulta que tota una sèrie de models de repartiment del món condueixen exactament a aquesta distribució. El model simple (per al qual la construcció de la distribució indicada és un teorema) és així: en una unitat de temps un país es divideix per la meitat amb una probabilitat del 50% i s'uneix amb un altre país de la mateixa superfície amb una probabilitat del 50%. Aquest model dur permet una anàlisi matemàtica exacta que mostra que la part del temps en el transcurs del qual la primera xifra de la superfície del país serà 1 (respectivament, i), és igual a $\ln 2 \approx 0,3\ldots$ (respectivament, $\log(i+1) - \log i$).

Els experiments numèrics (realitzats per M. V. Jesina a Toronto i F. Aicordi a Trieste, a l'estiu del 1997) mostren que aquest tipus de distribució es dóna en una gran quantitat d'altres models. Per exemple, es pot suposar que en una quantitat de temps, qualsevol país (amb superfície x_k) amb una probabilitat de $1/2$ s'uneix amb un altre país aleatòriament escollit (formant un país amb superfície $x_k + x_l$) i amb una probabilitat de $1/2$ es divideix en dues parts iguals.

Començant amb superfícies, diguem, $x_k = k$, d'un centenar de països, es pot obtenir una bona aproximació a la nostra distribució estàndard després d'una centena de passos. La divisió en parts iguals pot ser substituïda per la divisió de superfícies en parts px_k i $(1-p)x_k$ (Quebec, Ucraïna, ...), les probabilitats d'unió i divisió poden fer-se diferents, i els resultats dels experiments numèrics són poc sensibles a aquests canvis de models. Es pot introduir també la situació geogràfica del país, permetent-lo unir-se només als veïns (menyspreant l'existència en el seu temps de Prússia Oriental, avui dia regió de Kaliningrad). Els experiments numèrics condueixen a la mateixa distribució (tan hi fa si modelem la geografia del globus terraqui per mitjà d'una circumferència, una esfera, un interval o un rectangle).

D'aquesta manera, la nostra distribució és, pel que sembla, una propietat d'un model tou, però la demostració que aquesta distribució s'estableix en els casos concrets en forma de model dur és un problema matemàtic difícil i està lluny de ser resolt.

Les matemàtiques, igual que la física, són una ciència experimental que es diferencia de la física només en el fet que els experiments són molt més econòmics. Pel que sembla, aquesta és la causa per la qual el pressupost de la secció de matemàtiques de l'Acadèmia de Ciències de Rússia (RAN) és quaranta vegades menor que el pressupost de física (en conseqüència, la producció dels nostres matemàtics és més gran que la dels físics, en la mateixa proporció).

7 Les matemàtiques i l'ensenyament matemàtic al món modern

«No star wars – no mathematics», diuen els ciutadans dels Estats Units. El fet lamentable que, amb la cessació (temporal?) de l'enfrontament bèlic, les matemàtiques, de la mateixa manera que totes les ciències fonamentals, s'hagin deixat de finançar, és una vergonya per a la civilització moderna que reconeix només les ciències aplicades,[4] les quals es comporten com el porc sota el roure.

En realitat, les ciències aplicades ni existeixen ni existiran mai, com ja observà fa més de cent anys Louis Pasteur (que difícilment pot estar sota sospita de dedicar-se a assumptes inútils per a la humanitat). Segons Pasteur existeixen només aplicacions de les ciències.

Els experiments amb l'àmbre i la pell del gat semblaven inútils als governs i als militars del segle XVIII, però foren exactament aquests experiments els que va canviar el nostre món després que Faraday i Maxwell escrivissin les equacions de la teoria electromagnètica. Aquests descobriments van justificar —per endavant— totes les

4 La financiació ininterrumpuda de les ciències pseudoespirituals com la parapsicologia i la bajanada antihistòrica de l'acadèmic A. T. Fomenko (sotsacadèmic-secretari de la secció de matemàtiques de la RAN) encara està esperant la seva explicació.

despeses de la humanitat en ciència fonamental durant cent anys. La negativa dels governants moderns a pagar aquest deute és una política increïblement imprevisora, per la qual els països corresponents seran indubtablement castigats amb un endarreriment tecnològic i, en conseqüència, econòmic (fins i tot militar). La humanitat sencera (davant de la qual es planteja el complicadíssim problema de la supervivència en les condicions de crisi maltusiana) haurà de pagar un preu molt alt per la política egoista i miop dels països que la constitueixen.

La comunitat matemàtica té una part de responsabilitat en la pressió dels governs i de la societat en general, observada arreu i dirigida a la destrucció de la cultura matemàtica, com a part del cabal de cada persona i, en especial, dirigida a la destrucció de l'ensenyament matemàtic. L'ensenyament de les matemàtiques a tots els nivells, farcit d'idees formals, s'ha convertit, per desgràcia, en un sistema. Han crescut generacions senceres de matemàtics professionals i professors de matemàtiques que això és l'únic que saben i que no s'imaginen la possibilitat d'un altre tipus d'ensenyament de les matemàtiques. Els indicis més característics d'un ensenyament formal són l'abundància de definicions injustificades i demostracions incomprensibles (encara que lògicament irreprotxables). L'absència d'exemples, l'absència de les anàlisis dels casos límits i del límit de l'aplicabilitat, l'absència de dibuixos i croquis són defectes constants dels textos matemàtics, com també ho són l'absència d'aplicacions fora de les matemàtiques i de motivacions dels conceptes matemàtics.

Poincaré ja va subratllar que només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament (sigui aquest axiomàtic o algèbric) els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors.

Les matemàtiques són una ciència experimental, una part de la física teòrica i un membre de la família de les ciències naturals. Els principis fonamentals de la construcció i l'ensenyament de totes aquestes ciències són aplicables a les matemàtiques. L'art del raonament lògic rigorós i la possibilitat d'obtenir amb aquest mètode conclusions fiables no han de ser un privilegi de Sherlock Holmes. Cada escolar ha de posseir aquesta habilitat. L'habilitat de construir models matemàtics adequats a situacions reals ha de formar part de l'ensenyament matemàtic. L'èxit s'aconsegueix no només amb la utilització de receptes preparades (models durs) sinó també amb un enfocament matemàtic dels fenòmens del món real. Malgrat tot l'immens valor social dels càlculs (i la informàtica), la força de les matemàtiques no està en aquests, i l'ensenyament de les matemàtiques no ha de reduir-se a receptes de càlcul. La història de Rússia té un primer ministre amb educació matemàtica (que va acabar matemàtiques a l'escola de Shebishev de la Universitat de Sant Petersburg). Heus aquí com ell descriu la diferència entre modelització matemàtica dura i tova:[5]

> Entre els matemàtics hi ha dos tipus de persones:
>
> 1. D'una banda, els matemàtics filòsofs superiors, és a dir, els matemàtics d'idees matemàtiques superiors per als quals les xifres i els càlculs són un ofici. Per a aquest tipus de matemàtics les xifres i els càlculs no tenen cap sentit, a ells no els atrauen ni els càlculs ni les xifres, sinó que els atrauen les idees matemàtiques en sí. En una paraula, aquests són matemàtics de les matemàtiques filosòfiques pures;

5 S. Y. Vitte, *Vospominania*, t. 3, v. 5.

> 2. D'altra banda, existeixen matemàtics a qui no commou la filosofia matemàtica, que veuen la ciència matemàtica en els càlculs, xifres i fórmules.
>
> Els matemàtics filòsofs, als quals jo pertanyo, sempren miren amb menyspreu els matemàtics calculadors. Per altra banda, els matemàtics calculadors, entre els quals hi ha molts científics bastant coneguts, tenen els matemàtics filòsofs com a persones, en cert sentit, «guillades».

Ara sabem que les diferències descrites per Vitte tenen una procedència fisiològica. El nostre cervell està format per dos hemisferis. L'hemisferi esquerre respon a la multiplicació de polinomis, als idiomes, escacs, intrigues i successions de sil·logismes, mentre que l'hemisferi dret s'encarrega de l'orientació espacial, de la intuïció i de tot el que és necessari a la vida diària.

Els matemàtics calculadors, en la terminologia de Vitte, tenen hiperatrofiat l'hemisferi esquerre. Aquesta enfermetat és la seva força principal (val la pena recordar aquí el llibre de Nabokov *La defensa de Luzin*). El domini d'aquest tipus de matemàtics, ha conduït al predomini de les matemàtiques axiomàtiques escolàstiques, especialment en l'ensenyament (i fins i tot en l'ensenyament secundari), contra el qual la societat reacciona de forma natural i justificada d'una manera fortament negativa. Com a resultat es té el rebuig universal que s'observa cap a les matemàtiques i la tendència de tots els governants de venjar-se de les humiliacions rebudes a l'escola, per mitjà dels seu extermini.

La modelització tova requereix un treball d'ambdós hemisferis del cervell.

Vitte, després de la universitat, no trobà treball en la seva especialitat i va acceptar la proposta d'una companyia privada de ser cap de secció del ferrocarril. Abans d'ocupar aquest càrrec, Vitte va haver de treballar una setmana completa en cada un dels llocs dels seus subalterns (guardaagulles, guardavia, distribuïdor d'equipatge, caixer, fogoner, maquinista, cap d'estació, ...) i això fou, per al futur ministre, una experiència de valor incalculable.

Una vegada, el tren del tsar que es dirigia a Crimea, fou obligat, a la secció de Vitte, a disminuir la velocitat. Malgrat l'empipament d'Alexandre III, el maquinista no va obeir les seves ordres sinó que va acatar les ordres del cap de la secció. Quan el cap va passar a la següent secció, que ja no estava sota la responsabilitat de Vitte, la velocitat fou, evidentment, augmentada. Al poc temps el tren va volcar (catàstrofe de l'estació de Borok). El tsar recordà el nom de l'indòmit cap de la secció anterior i Vitte fou nomenat ministre (segons sembla, de vies de comunicació). Més endavant es va convertir en primer ministre.

Amb el nom de Vitte es relaciona encara una època grandiosa del desenvolupament del capitalisme a Rússia, que inclou la construcció d'una xarxa de vies ferroviàries que funcionen fins avui dia. Tot i així, Vitte s'orientava millor en la vida real del país, en els problemes de l'economia i la tècnica que no pas en les intrigues polítiques (per a les quals tenen un major talent les persones amb l'hemisferi esquerre hiperatrofiat). Amb l'arribada al poder de personalitats com Rasputin, Vitte fou destituït. Vitte fou restituït per liquidar situacions crítiques creades pels polítics (la guerra russojaponesa, la revolució de l'any 1905). Jo arribo al punt de suposar que si Vitte hagués continuat al govern rus en el transcurs de la següent dècada, la història del nostre país hauria estat completament diferent: no hauria tingut lloc la guerra mundial, ni la revolució i viuríem avui dia, potser, com Finlàndia o Suècia.

És clar que la força de Vitte no consistia en absolut en l'aplicació d'algun tipus de matemàtica («càlcul») sinó en la forma de raonar el que ell anomenava «matemàtica-filosofia» i que fa pensar a les persones amb educació matemàtica sobre totes les realitats del món circumdant, amb l'ajuda (conscient o inconscient) d'una modelització matemàtica tova.

La idea de la necessitat d'aquest tipus de raonament per triomfar a qualsevol activitat econòmica o de producció (excepte, possiblement, a les intrigues polítiques) fou ben compresa ja fa cent anys:

> La lògica humana que no utilitza símbols matemàtics es confon molt sovint amb definicions literàries i fa, com a conseqüència d'això, deduccions errònies. Descobrir aquest error, sota el fons musical de les paraules, requereix a vegades un immens treball i discussions infinites i en general infructuoses.[6]

Lamentablement, ara són actuals les paraules del clàssic de l'economia matemàtica Pareto:[7]

> Els economistes que no saben matemàtiques es troben en la situació de les persones que desitgen resoldre un sistema d'equacions desconeixent no tan sols el que representa, sinó també el que representa cada una de les equacions que conformen el sistema.

Conclusió: L'esclafament de la ciència fonamental i, en particular, de les matemàtiques, que s'ha plantejat en tots els països (segons dades dels Estats Units, a ells els bastaria entre 10 i 15 anys) portarà a la humanitat (i a cada un dels països) un perjudici comparable al dany que dugueren les fogueres de la inquisició a la civilització occidental (Espanya).

L'educació matemàtica ha de ser part integrant del cabal cultural de cada escolar. Però de cap manera ha de consistir només en receptes (siguin aquestes la taula de multiplicar o el *Windows 95*).

L'objectiu principal de l'ensenyament matemàtic ha de ser el desenvolupament de l'habilitat d'investigar matemàticament els fenòmens del món real, l'habilitat que tan bé descriu Vitte en la caracterització de la «matemàtica filosofia» i que ell va utilitzar de forma tan excel·lent en la seva activitat en absolut matemàtica. L'art de construir i investigar models matemàtics tous és una de les parts més importants d'aquesta habilitat.[8]

Referències

[1] Arnold, V. I. *Teoria de catàstrofes* (en rus). Nauka, Moscou 1990.

[2] Poston, T., Stewart, I. *Teoria de catàstrofes i les seves aplicacions* (en rus). Mir, Moscou 1980.

[3] Elsgolst, L. E. *Equacions diferencials i càlcul variacional* (en rus). Nauka, Moscou 1969.

[4] Pontriaguin, L. S. *Equacions diferencials ordinàries* (en rus). Visshaia shkola, Moscou 1976.

6 V. F. Arnold.

7 V. Pareto *Anwendung der Mathematik auf Nationalökonomie. Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften*, Band I, Heft 7, S. 1114.

8 L'autor vol agrair a D. S. Shmerling l'ajuda en l'elaboració de les referències bibiogràfiques.

[5] Guter, R. S., Iankolcki, A. R. *Equacions diferencials* (en rus). Visshaia shkola, Moscou 1976.

[6] Fiedoriuk, M. V. *Equacions diferencials ordinàries* (en rus). Nauka, Moscou 1985.

[7] Amielkin, V. V. *Equacions diferencials i aplicacions* (en rus). Nauka, Moscou 1987.

[8] Vekua, N. P. *Algunes qüestions de la teoria de les equacions diferencials y aplicacions a la mecànica* (en rus). Nauka, Moscou 1987.

[9] Petrovski, I. G. *Conferències sobre la teoria de les equacions diferencials ordinàries* (en rus). Nauka, Moscou 1970.

Institut de Matemàtiques V. A. Steklov
Acadèmia de Ciències de Rússia
8 Gubkina
117996 Moscou GSP-1
Rússia
i
CEREMADE
Université Paris-Dauphiné
Place du Marechal de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16e
França