Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 13, núm. 2, 1998. Pàg. 21–33.

Els jocs cooperatius amb utilitat transferible

Antonio Magaña

1 Introducció

Usualment les diferents branques de les matemàtiques han nascut com respostes a problemes de caire pràctic que es presenten a les activitats quotidianes de l'ésser humà, com el comerç, la indústria, l'arquitectura, la navegació, etc. En el seu afany per compendre millor el món en què viu, l'home ha intentat identificar els fenòmens o objectes d'aquestes activitats amb els elements d'un cert sistema matemàtic, creant així el que s'anomena un *model matemàtic* d'una situació real.

Un cop establert el model, es tradueixen al seu llenguatge els problemes sorgits al món sensible, s'analitzen objectivament i se'ls busca una solució (utilitzant per a això les regles de la deducció lògica), que s'exportarà després a la situació real de la qual provenia.

Per tal que un model matemàtic sigui útil ha de complir com a mínim dues condicions. Per una banda, la identificació entre els ens matemàtics i els objectes reals que representen, així com les propietats axiomàtiques en les quals es basa el model, han de ser intuïtivament satisfactòries. Per una altra banda, els resultats teòrics que es dedueixin del sistema matemàtic, a mesura que es vagi desenvolupant, s'han d'ajustar a les conclusions que s'observin de forma empírica.

Fins fa relativament poc temps semblava que els models matemàtics eren adequats només per a descriure situacions sorgides a les ciències físiques. Tanmateix, recentment, les anomenades ciències socials també han progressat en el desenvolupament i estudi de descripcions matemàtiques de la conducta humana.

És en aquest àmbit on neix la teoria de Jocs, que, *grosso modo*, es pot definir com una part de les matemàtiques que es dedica a l'estudi de les situacions conflictives que apareixen quan un col·lectiu d'agents, amb interessos normalment contraposats, ha de prendre decisions que els afecten mútuament. Cadascuna d'aquestes situacions és el que s'anomena un joc.

Encara que els inicis de la teoria de jocs es remunten a la primera meitat del segle passat (als treballs d'economia de Cournot de 1838 s'han trobat certs indicis), la idea d'una teoria general dels jocs, amb la qual formular matemàticament processos de decisió que es produeixen en activitats conjuntes de tipus competitiu, va ser introduïda per John von Neumann i Oskar Morgenstern al seu clàssic *Theory of Games and Economic Behavior*, publicat l'any 1944. Des d'aleshores la teoria de jocs ha evolucionat substancialment i s'ha aplicat amb profunditat a l'economia i a d'altres camps, entre els quals destaca la ciència política.

A més a més d'economistes i politicòlegs, altres estudiosos de les ciències socials (filòsofs, psicòlegs...) s'han interessat per la teoria de jocs, i no és gens estrany ja que un dels grans valors d'aquesta disciplina resideix en la seva potència com a base per a la construcció de models sobre la conducta humana.

Hi ha molts tipus de situacions conflictives en les quals intervenen diversos agents i, per tant, també hi ha molts tipus de jocs, tot i que una primera classificació els divideix en cooperatius i no cooperatius.

La teoria de jocs no cooperatius estudia el comportament dels agents en qualsevol situació on l'elecció o estratègia òptima de cada jugador depèn del seu pronòstic sobre les eleccions dels altres jugadors, i està encaminada a maximitzar els seus propis interessos (sigui el que sigui el que això signifiqui per al jugador) sense preocupar–se dels interessos dels altres.

Si al joc existeixen possibilitats de comunicació entre els jugadors amb la finalitat de negociar o establir acords que permetin la formació de coalicions, aleshores el joc es diu cooperatiu. En aquest cas és habitual considerar com a informació bàsica la utilitat (podeu entendre diners o qualsevol altre bé amb què s'efectuïn els pagaments als jugadors) que cada coalició pot obtenir coordinant les estratègies dels seus integrants i independentment de l'actuació de la resta dels agents del joc.

En alguns jocs cooperatius se suposa l'existència d'un bé que s'ha de distribuir entre els jugadors, que es pot quantificar numèricament i dividir tantes vegades com calgui, i respecte del qual les preferències dels agents del joc són equiparables. Els possibles repartiments d'aquest bé entre els jugadors són els que donen lloc a increments i disminucions de la utilitat d'aquests i, per això, aquests jocs cooperatius s'anomenen jocs amb utilitat transferible o jocs TU. En aquests casos es considera la utilitat *mínima* que cada coalició pot aconseguir i es descriu mitjançant un únic nombre real.

En altres jocs cooperatius la utilitat representa preferències personals sobre els possibles resultats del joc, i les possibilitats de cada coalició s'han de descriure fent servir no un nombre sinó un subconjunt que contingui totes les utilitats que una coalició pot garantir als seus integrants. Aquests són els anomenats jocs amb utilitat no transferible o jocs NTU.

Als paràgrafs anteriors hem intentat donar una visió general del que és i el que estudia la teoria de jocs. A les seccions que segueixen ens centrarem en una classe especial de jocs que, per la seva senzillesa i aplicabilitat en diferents contexts, ocupen un lloc preeminent dins d'aquesta teoria; són els jocs cooperatius amb utilitat transferible.

2 Els jocs cooperatius amb utilitat transferible

1 Definició *Un joc cooperatiu amb utilitat transferible és un parell* (N, v) *format per un conjunt finit* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *i una funció* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *que assigna a cada subconjunt* S *de* N *un nombre real* $v(S)$ *amb la condició que* $v(\emptyset) = 0$.

A la definició anterior, 2^N simbolitza el conjunt *parts de* N. Cada element del conjunt N és un *jugador* i cada subconjunt de N una *coalició*. La funció v s'anomena funció característica del joc (el nombre $v(S)$ es considera una mesura de l'expectativa de la coalició S) i, quan no hi ha ambigüitat, es parla del joc v sobreentenent-se el conjunt de jugadors.

La definició de joc cooperatiu és força general. Afegint-hi condicions s'obtenen diferents i interessants tipus de jocs cooperatius.

2 Definició *Un joc cooperatiu* (N, v) *és monòton si* $v(S) \leq v(T)$ *quan* $S \subseteq T$.

La condició anterior és bastant raonable en moltes situacions: si augmenta el nombre de jugadors d'una coalició, també augmenta la seva expectativa numèrica.

No és difícil veure que el conjunt dels jocs cooperatius amb n jugadors és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensió $2^n - 1$. Una base està formada, per exemple, pels anomenats *jocs d'unanimitat* u_S, definits per a cada coalició no buida S per

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{si } S \nsubseteq T. \end{cases}$$

Un joc cooperatiu v amb n jugadors s'escriu com a combinació lineal dels jocs d'unanimitat de la manera següent:

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} C_S(v)\, u_S, \quad \text{on} \quad C_S(v) = \sum_{R \subseteq S} (-1)^{s-r} v(R),$$

essent r i s els cardinals de les coalicions R i S, respectivament.

Els coeficients $C_S(v)$ s'anomenen *dividends d'Harsanyi*.

Els exemples que segueixen mostren que els jocs cooperatius no només tenen l'elegant estructura d'espai vectorial real, sinó que, a més a més, serveixen com a models per a estudiar situacions de tipus competitiu en les quals intervé un determinat nombre d'agents (tal i com es deia a la introducció).

El problema de la bancarrota. Driessen, 1988. (Exemple 1)

El Talmud és un antic document jueu on s'han recollit nombrosos comentaris sobre la llei mosaica i on hi ha fixat l'ensenyament de les grans escoles rabíniques. De fet, el Talmud consta de dues parts: el Mišnà, on s'inclouen les lleis, i el Guemarà, que conté els comentaris i investigacions sobre el Mišnà dels rabins de cada època. Precisament, cap a l'any 1140 a.C., el rabí Ibn Ezra proposava el problema següent en el Talmud: «Jacob mor i cadascun dels seus quatre fills, Ruben, Simeó, Leví i Judà, presenta un escrit en el qual Jacob el reconeix com a hereu i li deixa, respectivament, un quart, un terç, la meitat i la totalitat dels seus béns, que sumen 120 unitats. Tots els escrits porten la mateixa data i, per tant, cap no té prioritat sobre els altres. Com repartir les 120 unitats entre els quatre fills?»

Aquest és un cas concret del que ara s'anomena problema de la bancarrota, i que, en general, es pot enunciar així: siguin E un nombre real positiu, $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $d_i \geq 0$ per a tot $i = 1, 2, \ldots, n$ i $E < \sum_{i=1}^{n} d_i$. Una interpretació possible és la que es donava al paràgraf anterior: una persona (o empresa) mor (fa fallida) deixant n deutes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tals que la seva suma supera la totalitat dels béns E. Com repartir E entre els creditors?

O'Neill[1982] fa servir per primera vegada la teoria de jocs per a estudiar i resoldre aquest problema. Per fer–ho proposa el joc cooperatiu de n jugadors següent:

$$v_{E;d}(S) = \text{màx}\left\{0, E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j\right\} \quad \text{per a tota} \quad S \subseteq N;$$

és a dir, aquell que assigna a cada coalició S el que obtindria en el pitjor dels casos, quan tots els jugadors de $N \setminus S$ vagin a cobrar abans que els de S.

Clarament, de la definició de $v_{E;d}$ es té que $v_{E;d}(N) = E$ (la coalició global s'emporta la totalitat dels béns).

A l'exemple concret anterior, seria $E = 120$, $d_1 = 30$, $d_2 = 40$, $d_3 = 60$ i $d_4 = 120$. La funció característica $v = v_{E;d}$ serà aleshores:

$$\begin{array}{lll} v(14) = 20, & v(24) = 30, & v(34) = 50, \\ v(124) = 60, & v(134) = 80, & v(234) = 90, \\ v(N) = 120, & \text{i} \quad v(S) = 0 & \text{per a les altres } S \subset N. \end{array}$$

Assignació de pagaments. (Exemple 2)

En determinades situacions algunes empreses petites poden estar interessades en formar el que s'anomena un *grup de compra*, és a dir, una nova empresa amb personalitat jurídica pròpia que, depenent del volum de compra que aconsegueixi, arribi a tenir els avantatges de les grans empreses i on, tanmateix, les empreses petites que el constitueixen no perdin la seva identitat i, en conseqüència, tampoc els avantatges d'ésser una petita empresa.

Per exemple, per competir amb les grans superfícies comercials, una sèrie de comerciants detallistes poden formar un grup de compra de manera que, quan negociï amb els distribuïdors majoristes, aquest grup de compra tingui una capacitat de negociació anàloga a (o almenys competitiva amb) la dels grans centres. De vegades, la unió no és duradora sinó només puntual, amb la finalitat d'adquirir una sèrie de mercaderies. Per a fixar idees, suposarem que quatre empreses estan començant a negociar la formació d'un grup de compra. D'un cert bé de consum, l'empresa número 1 en desitja adquirir 600 unitats, l'empresa número 2 en necessita 500 unitats, la tercera 400 i la quarta 300. Per simplificar, el preu de cada unitat d'aquest bé serà d'1 unitat monetària (u. m.). El distribuïdor majorista té fixats uns descomptes en el preu final que depenen del nombre d'unitats que es comprin i que, en el supòsit que ens ocupa, podrien ser els següents:

- de 0 a 499 unitats no hi ha cap descompte,
- de 500 a 999 unitats hi ha un descompte del 5 % en el preu final,
- de 1000 a 1499 unitats el descompte és del 10 %,
- de 1500 a 1999 unitats és del 15 %,
- de 2000 a 2499 unitats és del 20 %, i
- del 25 % si es compren més de 2500 unitats.

Considerant aquests descomptes i les quantitats que necessita cada empresa, és immediat calcular el desembossament que cadascuna d'elles haurà de realitzar si no es forma el grup de compra: la primera pagaria 570, la segona 475, la tercera 400 i la quarta 300 (entre les quatre pagarien 1745). Si arriben a un acord i formen el grup de compra, per la mateixa quantitat de producte només pagarien 1530 u. m.

Tanmateix, hi ha un problema: si realment formalitzen el grup de compra, quant li toca pagar a cadascuna de les empreses de les 1530 u. m.?

La resposta tradicional a la pregunta anterior consisteix a establir un repartiment proporcional. Tanmateix, la proporcionalitat presenta, com a mínim, tres inconvenients:

- no considera les *contribucions marginals* de cada empresa, és a dir, el que aporta cadascuna d'elles a les diferents coalicions que es poden formar;
- no té en compte que algunes de les empreses són preferibles com a sòcies en el grup més que d'altres, i
- no és additiva, és a dir, si el grup es formalitza i fa dues comandes diferents, segurament ahi hauria empreses interessades en fer el repartiment proporcional del cost de cada comanda per separat, i, en canvi, altres empreses preferirien acumular les dues factures en una de sola i fer aleshores el repartiment proporcional.

Els jocs cooperatius amb utilitat transferible serveixen per a descriure la situació anterior i proporcionen solucions que no tenen els inconvenients descrits. La descripció es pot fer mitjançant el joc de quatre jugadors següent:

$$\begin{array}{lll}
v(1) = 570 & v(13) = 900 & v(123) = 1275 \\
v(2) = 475 & v(14) = 855 & v(124) = 1260 \\
v(3) = 400 & v(23) = 855 & v(134) = 1170 \\
v(4) = 300 & v(24) = 760 & v(234) = 1080 \\
v(12) = 990 & v(34) = 665 & v(1234) = 1530.
\end{array}$$

Cada $v(S)$ representa la quantitat que abona la coalició S al distribuïdor suposant que s'acumulen les comandes dels integrants de S i es realitza, aleshores, una comanda conjunta. La funció característica assigna un pagament a cada una de les coalicions que poden formar les empreses 1, 2, 3 i 4. Això és encertat en un context com l'anterior ja que algunes de les empreses podrien amenaçar amb establir un pacte bilateral o trilateral per deixar fora del mercat les altres o l'altra.

3 Els jocs simples

Una classe de jocs cooperatius senzilla i certament útil és la dels jocs simples.

3 DEFINICIÓ *Un joc cooperatiu* (N, v) *és simple si és monòton i* $v(S) = 0$ *o 1 per a tot* $S \subseteq N$.

Les coalicions que obtenen 1 són les *guanyadores*, i les que obtenen 0 les *perdedores*. W representarà el conjunt de totes les coalicions guanyadores del joc simple (N, v). Amb aquesta notació, la propietat de monotonia es pot escriure de la manera següent:

$$S \in W, \quad S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad T \in W.$$

Una coalició S és guanyadora *minimal* si per a tota $T \subset S$, $T \notin W$. El conjunt de totes les coalicions guanyadores minimals d'un joc simple (N, v) es denotarà per W^m.

És clar que si es coneix W aleshores el joc està totalment determinat. De fet, es pot definir un joc simple com un parell (N, W), $W \subseteq 2^N$, tal que $\emptyset \notin W$ i satisfà la condició de monotonia:

$$S \in W, \quad S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad T \in W.$$

Les coalicions guanyadores minimals determinen el joc, i han de complir les propietats següents:

- $\emptyset \notin W^m$
- $T \not\subset S \quad \forall\, T, S \in W^m$.

Una classe especialment interessant de jocs simples és la formada pels anomenats jocs de majoria ponderada.

4 Definició *Un* joc de majoria ponderada *és una terna* (N, ω, q) *on* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *és el conjunt dels jugadors,* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ *amb* $\omega_i \geq 0$ *per a* $i = 1, 2, \ldots, n$ *és una distribució de* pesos *i* $q \in \mathbb{R}^+$ *és la* quota *(o majoria exigida). Normalment es representa per* $[q; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$.

Tot joc de majoria ponderada té associat un joc simple: n'hi ha prou amb definir $\omega(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$ i considerar com a conjunt de coalicions guanyadores a

$$W = \{\, S \subseteq N : \quad \omega(S) \geq q \,\}.$$

Tanmateix, no tot joc simple prové d'un joc de majoria ponderada. Sigui, per exemple, (N, W) el joc de quatre jugadors tal que el seu conjunt de coalicions guanyadores minimals és $W^m = \{\, \{1, 2\}, \{3, 4\} \,\}$, és a dir, els subconjunts formats pels jugadors 1 i 2 per una banda, i 3 i 4 per una altra. Si existissin $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ i q com a la definició anterior, s'haurien de complir les desigualtats següents:

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 \geq q, & \omega_1 + \omega_3 < q, \\ \omega_3 + \omega_4 \geq q, & \omega_2 + \omega_4 < q, \end{cases}$$

que són clarament incompatibles.

Els jocs simples són de gran utilitat perquè serveixen com a models per a descriure el mecanisme de funcionament de certs organismes que prenen decisions mitjançant votacions.

Exemple 3

Dels parlaments autonòmics actuals, potser el més interessant, des del punt de vista de la Teoria de Jocs, és el del País Basc, constituït després de les eleccions autonòmiques del 23 d'octubre de 1994. La composició és la següent:

	Partit	**Diputats**
1	PNB (Partit Nacionalista Basc)	22
2	PSE (Partit Socialista d'Euskadi)	12
3	HB (Herri Batasuna)	11
4	PP (Partit Popular)	11
5	EA (Eusko Alkartasuna)	8
6	EU (Esquerra Unida)	6
7	UA (Unitat Alabesa)	5

En total són 75 diputats i, per tant, per a aconseguir la majoria absoluta se'n necessiten almenys 38.

Situacions típiques que es poden donar en aquest tipus d'organismes, com, per exemple, la primera votació per a la investidura del president del govern autonòmic o l'aprovació d'una moció de censura, es descriuen mitjançant el joc de majoria ponderada de 7 jugadors

$$[38; 22, 12, 11, 11, 8, 6, 5]$$

(cada partit és un jugador el pes del qual és el seu nombre de diputats).

L'interès d'aquest joc resideix en el gran nombre i varietat de combinacions possibles per arribar a la majoria absoluta. Concretament, el conjunt de coalicions guanyadores minimals és:

$$\begin{aligned} W^m \;=\; & \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\},\{1,3,4\},\\ & \{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,4,7\},\\ & \{1,5,6,7\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\{2,3,4,7\},\\ & \{2,3,5,6,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\}. \end{aligned}$$

Exemple 4

Hi ha altres organismes que prenen decisions per votacions i que no es poden representar com a jocs de majoria ponderada. Aquest és el cas, per exemple, del Congrés dels Estats Units: perquè una llei que compti amb el recolzament del president de la nació sigui aprovada és necessària la majoria dels vots de la Cambra de Representants i del Senat; si el projecte no té el suport presidencial, aleshores són necessaris dos terços dels vots de cadascuna de les dues cambres. La Cambra de Representants té 435 membres i el Senat 100.

No és difícil demostrar que no hi ha cap joc de majoria ponderada que descrigui l'estructura anterior. Tanmateix, sí que es pot descriure fent servir un joc simple de 536 jugadors on les coalicions guanyadores minimals estan formades pel president, 51 senadors i 218 representants, o per 67 senadors i 290 representants.

4 Conceptes de solució per als jocs cooperatius

Sigui (N, v) un joc cooperatiu de n jugadors. Suposant que els jugadors arriben a un acord global entre ells, al final s'han de repartir la quantitat $v(N)$ (diners o qualsevol altre tipus d'utilitat transferible), que és el total que pot aconseguir la coalició formada per tots els jugadors. Una distribució de la quantitat $v(N)$ entre els jugadors es representa mitjançant una funció real x que safisfaci el principi d'eficiència: $\sum_{i \in N} x(i) = v(N)$. El nombre $x(i)$, que per comoditat es denota simplement per x_i, és la quantitat que rep el jugador i tenint en compte la funció de distribució de pagaments x.

Els vectors $x \in \mathbb{R}^n$ tals que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ s'anomenen vectors de pagament eficients per al joc (N, v). Si a més a més satisfan el *principi de racionalitat individual*, segons el qual cada jugador ha de rebre un pagament almenys igual al que podria aconseguir tot sol en el joc (N, v), aleshores aquests vectors de pagament eficients es diuen *imputacions* del joc. El conjunt de totes les imputacions d'un joc (N, v) s'acostuma a denotar per $I[v]$.

Un concepte de solució per als jocs cooperatius és, en general, una regla que assigna a cada joc cooperatiu de n jugadors un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ seguint unes normes predeterminades. En principi, aquest subconjunt podria ser buit per a alguns jocs.

Per exemple, es podria demanar que la solució fos un subconjunt de $I[v]$. Òbviament, depenent de les normes que s'imposin a la correspondència descrita s'obtindrà una o una altra solució per als jocs cooperatius.

Hi ha conceptes de solució que assignen tot un conjunt de vectors a cada joc, com per exemple els conjunts estables de von Neumann i Morgenstern [1944] o el *core* (Gillies [1953]). Altres, però, seleccionen un únic vector de pagaments, com el valor de Shapley [1953] o el nuclèol (Schmeidler [1969]).

Com que els jocs cooperatius simples s'utilitzen normalment com a models del funcionament d'organismes que prenen decisions mitjançant votacions, un concepte de solució per a aquesta classe de jocs s'anomena també *índex de poder*, i representa una mesura abstracta del poder de cada jugador a l'organisme que descriu el joc.

5 El valor de Shapley

El valor de Shapley va ser el primer concepte de solució que assignava a cada joc cooperatiu un únic vector de pagaments. Va ser introduït i caracteritzat axiomàticament per Lloyd S. Shapley l'any 1953, i és, probablement, el concepte de solució més estudiat i sobre el qual més s'ha escrit. Per entendre bé les propietats axiomàtiques que el caracteritzen es necessiten dues nocions prèvies.

5 Definició

- *Siguin (N, v) un joc cooperatiu de n jugadors i π una permutació sobre N (és a dir, una aplicació bijectiva de N en N). El joc $(N, \pi v)$ és aquell que, per a cada coalició $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, està definit per*

$$\pi v(S) = v(\pi(S)) = v(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_s)\}).$$

- *Un conjunt $K \subseteq N$ és suport del joc (N, v) si $v(S) = v(S \cap K)$ per a tota coalició $S \subseteq N$.*

Sigui G_n l'espai vectorial dels jocs cooperatius amb $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. El valor de Shapley és una aplicació

$$\Phi : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que assigna a cada joc cooperatiu v un vector $\Phi[v] = (\Phi_1[v], \Phi_2[v], \ldots, \Phi_n[v])$ i que compleix les propietats següents:

S1 Si K és suport del joc v, aleshores $\sum_{i\in K} \Phi_i[v] = v(K)$.
S2 Per a tot joc v i tota permutació π de N es compleix $\Phi_i[\pi v] = \Phi_{\pi(i)}[v]$.
S3 Si $u, v \in G_n$ aleshores $\Phi[u + v] = \Phi[u] + \Phi[v]$.

Les propietats anteriors es coneixen com eficiència per a suports, simetria i additivitat, respectivament, i determinen unívocament el valor de Shapley.

1 Teorema (Shapley, 1953) *Existeix una única funció $\Phi : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfà les propietats d'eficiència per a suports, simetria i additivitat, i és la donada per*

$$\Phi_i[v] = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S\setminus\{i\})] \quad \textit{per a cada} \quad i \in N.$$

El pagament que el valor de Shapley assigna a cada jugador és una mitjana ponderada de les contribucions marginals d'aquest jugador a les coalicions a les quals pertany.

El valor de Shapley no considera factors tals com l'existència o no d'una distribució dels jugadors en coalicions, incompatibilitats entre jugadors o diferents graus de cooperació entre ells. La introducció d'aquests factors en els jocs cooperatius ha donat origen a altres conceptes de solució.

S'han proposat altres caracteritzacions axiomàtiques per al valor de Shapley. Potser una de les més intuïtives és la que es basa en les definicions i propietats següents:

- Es diu que un jugador $i \in N$ és un *titella* en el joc v si $v(S\cup\{i\}) = v(S)+v(\{i\})$ per a tota coalició $S \subseteq N \setminus \{i\}$.
- Dos jugadors $i, j \in N$ són *indiferents* en el joc v si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ per a tota coalició $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$.
- Un concepte de solució per als jocs cooperatius Φ compleix la propietat dels titelles si $\Phi_i[v] = v(\{i\})$ per a tot v i tot titella i en v.
- Un concepte de solució per als jocs cooperatius Φ compleix la propietat d'indiferència si $\Phi_i[v] = \Phi_j[v]$ per a tot v i per a tot parell de jugadors i, j indiferents en v.

El valor de Shapley és l'única solució per als jocs cooperatius que satisfà les propietats d'eficiència, titelles, indiferència i additivitat (Bergantiños [1993]).

Com és obvi, en el cas dels jocs simples no es pot utilitzar la propietat d'additivitat per a caracteritzar el valor de Shapley al conjunt dels jocs simples ja que la suma d'aquest no és, en general, un joc simple.

Dubey [1975] va modificar la propietat d'additivitat de Shapley i l'adequà al context dels jocs simples. Per a això va definir les operacions següents entre jocs simples:

$$(u \vee v)(S) = \text{màx}\{u(S), v(S)\}$$
$$(u \wedge v)(S) = \text{mín}\{u(S), v(S)\}$$

Sigui S_n el conjunt de jocs simples amb n jugadors. Amb les operacions anteriors S_n té estructura de reticle distributiu.

La propietat d'additivitat es pot substituir a S_n per

$$\Phi[u \vee v] + \Phi[u \wedge v] = \Phi[u] + \Phi[v] \quad \forall u, v \in S_n.$$

En Feltkamp [1995] es diu que una solució que satisfà la propietat anterior compleix la propietat de transferència.

2 TEOREMA (DUBEY, 1975) *Existeix una única funció $\Phi : S_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfà les propietats d'eficiència, simetria i transferència, i és el valor de Shapley.*

En aquest cas

$$\Phi_i[v] = \sum_{\substack{S \in W \\ i \in S, S\setminus\{i\} \notin W}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \quad \text{per a cada} \quad i \in N.$$

Exemple 5

1. Per al problema concret de la bancarrota (veure Exemple 1) el valor de Shapley proposa el repartiment següent:

$$\Phi[v] = (14.16, 19.6, 29.16, 57.5).$$

2. Per al problema dels grups de compra (Exemple 2) el valor de Shapley ens dóna com a solució

$$\Phi[v] = (504.58, 419.58, 333.75, 272.08).$$

3. Al joc de majoria ponderada corresponent al Parlament Basc (Exemple 3) s'obté l'índex de poder següent:

$$\Phi_1 = 0.3714, \quad \Phi_i = 0.1381 \quad i = 2,3,4, \quad \Phi_j = 0.0714 \quad j = 5,6,7,$$

que, tradicionalment, s'expressa en tant per cent. Així doncs, el primer partit té el 37.14% del poder, els partits 2, 3 i 4 el 13.81% i cadascun dels altres el 7.14%.

4. Al Congrés dels Estats Units (Exemple 4) l'índex de poder és

$$\begin{aligned} \Phi_P &= 0.160470, \\ \Phi_S &= 0.437418, \\ \Phi_R &= 0.402112, \end{aligned}$$

essent P el president, S el Senat i R la Cambra de Representants. Per calcular el poder individual d'un senador o d'un membre de la Cambra de Representants n'hi ha prou amb dividir per 100 al primer cas, i per 435 al segon, ja que tots els senadors són indiferents entre ells, igual que els representants. Proporcionalment es té:

$$\Phi_P : \Phi_s : \Phi_r \quad \approx \quad 350 : 9 : 2,$$

on Φ_s és l'índex de poder de Shapley d'un senador i Φ_r el d'un representant.

6 Darrers desenvolupaments

La teoria dels jocs cooperatius amb utilitat transferible evoluciona contínuament. Les darreres tendències aposten per mesurar quantitativament el grau de cooperació entre els jugadors, o per la multiplicitat d'alternatives a escollir pels jugadors, per citar dos exemples concrets.

En Amer [1995] es presenten models de cooperació restringida basats en la noció d'índex de cooperació (un hipergraf ponderat, en teoria de grafs).

6 DEFINICIÓ *Un índex de cooperació és una funció* $p : 2^N \longrightarrow [0,1]$ *que satisfà la condició* $p(\{i\}) = 1$ *per a tot* $i \in N$.

Els índexs de cooperació admenten diverses interpretacions, com la probabilitat d'obtenir el valor que la funció característica assigna a una coalició, com el *cost* de formació de les coalicions, com la mesura de la cohesió interna d'una coalició, etc.

En introduir un índex de cooperació en un joc cooperatiu clàssic, es modifica convenientment la funció característica definint el joc restringit per l'índex de cooperació, i, amb les propietats i definicions adequades, es caracteritza el valor de Shapley en aquest nou context.

Tradicionalment, als jocs cooperatius amb utilitat transferible cadascun dels jugadors efectua una elecció entre dues possibles alternatives i, un cop fixada una de les alternatives, la funció característica del joc assigna un nombre real a la coalició formada pels jugadors que l'han escollit, suposant, a més a més, que els jugadors de la coalició complementària han optat per l'altra (per fixar idees, penseu en l'exemple dels grups de compra: quan escrivim $v(S)$ suposem que els membres de S han decidit ajuntar-se per formar el grup de compra mentre els de $N \setminus S$ queden fora). Aquest enfocament, correcte per a descriure algunes situacions reals, no és aplicable quan el nombre d'opcions entre les quals elegeix cada jugador és més gran que dos. Recentment (Bolger [1993]) s'han proposat models que s'ajusten a aquestes situacions: els jocs cooperatius amb múltiples alternatives. En aquests jocs, una coalició pot obtenir diverses utilitats depenent de la distribució dels jugadors de la coalició complementària en el conjunt de les alternatives.

Siguin $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ el conjunt d'alternatives de què disposen els jugadors de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ i $\mathcal{P}_r(N)$ el conjunt de particions ordenades de N en r subconjunts (l'element P_i de la partició s'interpreta com el subconjunt de jugadors de N que ha triat l'alternativa a_i).

7 DEFINICIÓ *Un* r*-joc cooperatiu amb* n *jugadors i* r *alternatives és una aplicació* v *que assigna a cada partició* $(P_1, P_2, \ldots, P_r) \in \mathcal{P}_r(N)$ *un nombre real,* $v(P_1, P_2, \ldots, P_r)$, *amb la condició que* $v(\emptyset, P_2, \ldots, P_r) = 0$.

El nombre $v(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ representa la utilitat que obté la coalició P_1 quan tria la primera alternativa, tenint en compte el que han escollit els altres jugadors.

En Magaña [1996] s'estudia el conjunt dels r-jocs i es defineix i caracteritza un concepte de solució per a aquests que, en cert sentit, representa una extensió del valor de Shapley clàssic.

A tota la teoria de jocs, en general, i als jocs cooperatius amb utilitat transferible, en particular, encara hi ha moltes qüestions per resoldre ja que, de fet, es tracta d'una disciplina relativament nova, amb poc més de cinquanta anys de vida. L'any 1994 coincidint amb el cinquantè aniversari de la publicació del llibre de von Neumann i

Morgenstern, es va concedir el Premi Nobel d'Economia a tres estudiosos de la teoria de jocs: J. Nash, J. C. Harsanyi i R. Selten. Aquest va ser un reconeixement públic de la importància que la teoria de jocs ha adquirit en diversos àmbits, en aquest cas a l'economia. Tant els seus continguts teòrics com les seves aplicacions creixen dia a dia.

Referències

[1] Amer, R. *Juegos, valores e índices de cooperación.* Tesi doctoral. Departament de Matemàtica Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya (1995).

[2] Aumann, R. J., Maschler, M. «Game theoretic analysis of a bankrupty problem from the Talmud», *J. of Econ. Th.*, 36 (1985), 195–213.

[3] Bergantiños, G. *Aportaciones a la teoría de juegos.* Tesi doctoral. Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Universitat de Santiago de Compostel·la (1993).

[4] Bolger, E. M. «A value for games with n players and r alternatives», *Int. J. Game Th.*, 22 (1993), 319–334.

[5] Davis, M. D. *Introducción a la teoría de juegos.* Alianza Editorial, Madrid (1986).

[6] Driessen, T. *Cooperative games, solutions and applications.* Theory and Decision Library. Kluwer Academic Press, Holanda (1988).

[7] Dubey, P. «On the uniqueness of the Shapley value», *Int. J. Game Th.*, 4 (1975), 131–139.

[8] Feltkamp, V. «Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values», *Int. J. Game Th.*, 24 (1995), 179–186.

[9] Gillies, D. B. *Some theorems on n-person games.* Tesi doctoral. Princeton University Press. Princeton (1953).

[10] Magaña, A. *Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas.* Tesi doctoral. Departament de Matemàtica Aplicada II. Universitat Politècnica de Catalunya (1996).

[11] O'Neill, B. «A problem of rights arbitration from the Talmud», *Math. Social Sci.*, 2 (1982), 345–371.

[12] Schmeidler, D. «The nucleolus of a characteristic function game», *SIAM J. Appl. Math.*, 17 (1969), 1163–1170.

[13] Shapley, L. S. «A value for n person games», *Contributions to the theory of games* II (ed. per H. Kuhn i A. Tucker). Princeton University Press. Princeton (1953), 307–317.

[14] Shapley, L. S., Shubik, M. «A method for evaluating the distribution of power in a committee system», *Amer. Political Sci. Rev.*, 48 (1954), 787–792.

[15] Singleton, R. R., Tyndall, W. F. *Introducción a la teoría de juegos y a la programación lineal.* Labor, Barcelona (1977).

[16] von Neumann, J., Morgenstern, O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press. Princeton (1944).

[17] Zarzuelo, J. M. *Juegos cooperativos: soluciones no simétricas según el enfoque del valor*. Tesi doctoral. Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials. Universitat del País Basc (1989).

Departament de Matemàtica aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
Colom, 11
08222 Terrassa
magana@ruth.upc.es