

## Nusos, matemàtiques i art\*

RONALD BROWN

### 1 Introducció

Els nusos dels quals parlaré són els nusos ordinaris de cada dia. Prenem un tros de cordill com aquest:



i hi fem un nus com aquest:



Naturalment, obtenim un cordill nuat. Això significa que no puc tornar a la situació inicial del cordill, per molt que el torci, bellugui o estiri, a no ser que talli el cordill o el deixi anar d'un cap o de l'altre.

Observem que és raonable dir que la distinció entre un tros de cordill nuat i un sense nuar és una qüestió de natura geomètrica. Però aquesta no és la geometria euclidiana tradicional de línies rectes, cercles, llargada i angles, ja que aquestes propietats canvien en torçar i recargolar el cordill. La descripció matemàtica precisa del concepte de nus és una part de la nova geometria anomenada *topologia*, la qual treballa amb propietats invariants per deformacions contínues o transformacions.

---

\* El present article és la versió catalana d'un article en anglès publicat a les actes del VI Congrés de Llenguatges Naturals i Llenguatges Formals (Tarragona, 17-21 de setembre de 1990). La traducció és de GEMMA BASTARDAS.

Hi ha un cert nombre de raons per parlar d'aquesta matèria en aquesta conferència. Primer, el tema dels nusos té amplis aspectes artístics, històrics i pràctics, de manera que la gent entendrà ràpidament alguns dels problemes fonamentals i els relacionarà amb qüestions del desenvolupament humà. Segon, per mitjà de la matemàtica dels nusos podem il·lustrar alguns dels mètodes bàsics de les matemàtiques i mostrar com estan relacionats amb els mètodes tradicionals de descobriment i anàlisi del món que ens envolta. Tercer, és un tema que conté matemàtiques atractives. Quart, té aplicacions importants recents a la ciència.

## 2 Història

Fer nusos ha estat un complement important de la vida diària de la humanitat des dels temps més antics dels quals es té coneixement. Encara hi ha races primitives que subjecten els seus barrets, trampes, canoes i guarnicions amb corretges nuades (Ashley, 1944).

S'ha dit que l'edat de pedra s'hauria d'anomenar l'edat del cordill! Hi devia haver una bona motivació per tenir, per exemple, martells ben lligats als seus mànecs.

El nus més antic que es coneix sembla ser la xarxa Antrea, que es pot veure al Museu d'Antiguitats de Hèlsinki. La xarxa va ser trobada l'any 1923 en un pantà a Antrea, aleshores part de Finlàndia, i ara part de l'antiga Unió Soviètica. Es creu que una barca va bolcar i va perdre tot l'aparell de pesca. La xarxa mesurava  $30\text{ m} \times 1,5\text{ m}$  amb 6 cm de malla. Tenia ploms de pedra i la fibra era d'escorça de desmai. El nus usat encara s'utilitza avui en dia en aquelles zones. La xarxa data del 7200 a. C. segons el carboni 14 i el pol·len que s'hi han trobat, que semblen ser de més enllà de les eres glacials.

Es pot suposar que el peix ha estat des dels primers temps una font important de proteïnes, sovint suficient, i sense massa mitjans de contraatac! Podem imaginar-nos com la tecnologia per aplegar i agafar peixos va anar evolucionant des dels inicis més simples fins a la sofisticació de la xarxa Antrea. Però és difícil d'imaginar l'organització social que era necessària per a fer evolucionar i emprar una tal tecnologia en una data tan remota —ni es pot decidir un calendari per a aquesta evolució.

Des del punt de vista d'aquesta xerrada, la xarxa Antrea és també interessant com a mostra del fet que ja en aquells temps remots hi havia una comprensió topològica desenvolupada. De fet, es pot dir que la comprensió topològica, per exemple la distinció entre dins i fora, és més primitiva que la comprensió dels conceptes de geometria euclidiana. Els treballs primitius amb nusos confirmen que l'ésser humà té un sentit innat de forma, d'estructura i de visió en l'espai no només de com són les coses sinó de com haurien de ser per dur a terme certes funcions.

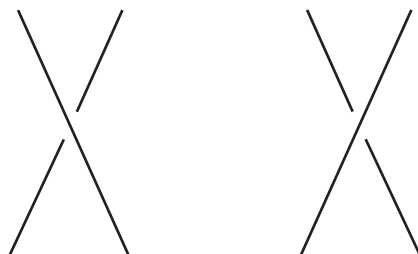
Ashley aplega en el seu *Llibre dels nusos* un recull de més de 4000 exemples de nusos, corbes i unions:

Per mi el simple fet de fer un nus és una aventura en l'espai il·limitat. Un tros de cordill proporciona la latitud dimensional que és única entre les entitats. Perquè un simple cordill és un objecte palpable que, a la pràctica, té només una dimensió. Si movem un sol cordill fora del pla, entrellaçant-lo com vulguem, obtenim objectes de gran bellesa en dues dimensions; i si escollim dirigir la fibra fora d'aquest pla, s'afegeix una nova dimensió que proporciona una oportunitat que està només limitada per l'abast de la nostra imaginació i la llargada del cabdell de fil.

Què podria ser més meravellós que això?

Però sempre sembla haver-hi un altre cotxe davant de cada possible plaça d'aparcament. Aquí tenim un Sr. Klein que diu haver provat que els nusos no poden existir en un espai de quatre dimensions. Això és dolent en sí mateix, però si algú altre vingués a provar que el cel no existeix en tres dimensions, quin futur restaria per a l'expert nuador?

Val la pena explicar per què els nusos no poden existir en quatre dimensions. Per fer-ho, treballarem per analogia. Considerem, primer, un ésser que viu en dues dimensions. Aquest ésser no es podria moure d'una banda a l'altra d'una línia sense creuar-la. No obstant això, usant una tercera dimensió podria sortir del seu pla, moure's per sobre de la línia i tornar enrere cap al seu pla. Ara, per desfer un nus n'hi ha prou amb ser capaç de moure una part del cordill a través d'una altra, de manera que, en el diagrama que segueix, la situació de l'esquerra es transformi en la de la dreta:



Això no es pot fer directament en tres dimensions. Malgrat tot, donant una quarta dimensió, una part del cordill pot saltar cap a la dimensió extra, moure's a través de l'altra peça i tornar enrere altra vegada a l'altra banda. Repetint aquest procés, i fent les deformacions que calguin, es desfarà qualsevol nus.

Naturalment, un matemàtic probablement preguntarà: si a una corda nuada se li pot desfer el nus en quatre dimensions, què es pot nuar en quatre dimensions? La resposta és la superfície d'un globus. Malgrat tot, és força enginyosa la demostració que un globus nuat es pot desnudar en cinc dimensions! i encara és més difícil mostrar, com va fer E. C. Zeeman, que els nusos  $n$ -dimensionals en  $(n + 2)$  dimensions es poden desfer en  $(n + 3)$  dimensions.

### 3 Nusos a l'art

Els nusos i els llaços tenen una vella història en art, i sovint reflecteixen un simbolisme bàsic. Hi havia un nus vigilant l'entrada de la tomba de Tutankamon. Pensem també en el nus gordià; en un «enllaç» matrimonial; en el que li diu la Cleopatra de Shakespeare a l'escurçó amb què comet suïcidi:

Vine, miserable ésser mortal,  
Amb les teves esmolades dents  
Desfés d'una vegada  
Aquest entortolligat nus de la vida.

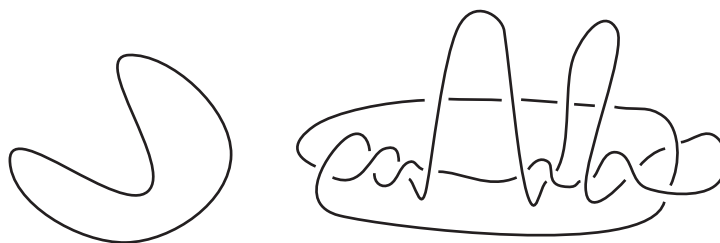
Hi ha una gran tradició de nusos i llaços en l'art musulmà i celta. L'àpex dels llaços celtes es troba en un manuscrit meravellós del segle VIII, el *Llibre de Kells*.

L'escultor contemporani John Robinson ha usat temes de nusos com a símbols universals en algunes de les enlluernadores escultures de bronze de la seva sèrie «Univers». Una d'aquestes, *Immortalitat*, és una banda de Möbius nuada amb un nus trèvol, i pel seu creador representa «Passant la Torxa de la Vida». El nostre departament té la sort d'haver rebut com a donació aquesta escultura d'edició limitada.

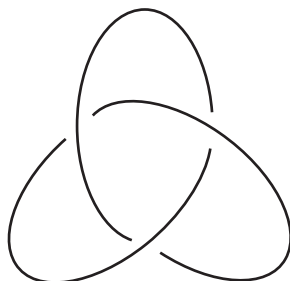
El matemàtic i escultor americà Helaman Ferguson ha materialitzat en bronze teoremes matemàtics, en particular, una esfera salvatge nuada.

#### 4 Orígens de la matemàtica dels nusos

A l'hora de fer matemàtiques és més fàcil considerar un cordill amb els dos caps ajuntats, que no pas considerar-lo amb les puntes subjectades. El contrast bàsic es troba aleshores entre el cordill sense nus (aquí en tenim dos exemples)



i el nus més simple, el nus trèvol:



Ens trobem ara davant del primer problema de teoria de nusos. Com sabem que no hi ha cap mètode per desfer el nus trèvol? A primer cop d'ull, sembla una pregunta estranya, perquè després d'uns instants d'experimentació ens convenceríem que aquest nus no es pot desfer. Però un matemàtic vol més que això. En primer lloc, vol tenir la certesa que el problema no rau en el fet que no hem estat capaços de trobar un mètode prou enginyós per a desfer el nus. En segon lloc, vol mètodes que s'aplicaran a casos més complicats i ens permetran distingir-los.

Si observem una taula de nusos, ens convencerem que no és gens obvi que els nusos de la llista amb, diguem, nou encreuaments, siguin tots diferents. Per distingir-los necessitem un xic d'àlgebra que ens porti a mètodes de càlcul.

El primer estudi matemàtic seriós dels nusos va sorgir de l'abandonada (amb justesa) teoria atòmica dels vòrtexs, que es deu al gran científic escocès lord Kelvin. Recordem que, probablement, no hi va haver una demostració definitiva i convincent de l'existència d'àtoms fins la teoria d'Einstein sobre el moviment brownià de l'any 1905. A mitjans del segle XIX, per aquells que van acceptar la teoria atòmica, el problema era explicar:

- la permanència dels àtoms;
- les propietats vibratòries dels àtoms, tal com mostren les seves línies espectrals;
- la varietat d'àtoms, tal com mostra la taula periòdica dels elements.

Kelvin havia vist anells de fum fets pel seu amic el físic P. J. Tait i va romandre sorprès per la seva permanència. Havia vist aquells anells de fum rebotant entre ells i també havia vist que tenien propietats vibratòries. Va comprendre que un àtom podia ser un vòrtex a l'èter. L'únic problema que restava era la varietat d'àtoms. En el seu article del 1867 en els *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* Kelvin fa les següents afirmacions:

Hem presentat a la Societat diagrames i models de filferro per tal d'il·lustrar vòrtex atòmics nuats, la il·limitada varietat dels quals és més que suficient per explicar les varietats i allotropies dels cossos simples coneguts i llurs afinitats mútues.

Avui en dia ja no s'escriuen frases com aquesta!

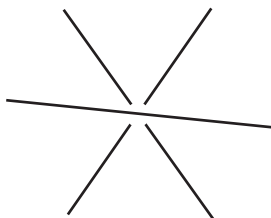
Òbviament, el primer pas en aquest programa va ser fer una llista de tots els nusos i comparar-la amb la taula periòdica dels elements, i va ser així com Tait va començar a fer una classificació dels nusos. Ràpidament es va veure que els nusos i la taula periòdica no tenien res a veure, i aviat es va abandonar la teoria atòmica dels vòrtexs. De tota manera, Kelvin va continuar amb un treball interessant sobre la hidrodinàmica dels vòrtexs, mentre que, entre 1877 i 1885, Tait va publicar articles sobre la classificació de nusos fins a deu encreuaments. Així doncs tenim un exemple meravellós d'una especulació romàntica i totalment errònia que inspira un treball significant i important. Aquesta història hauria de tenir una certa moralitat per als matemàtics, els quals practiquen un art en el qual els seus adeptes, obeint una severa tradició, ben rarament revelen les seves especulacions i els seus somnis, mentre no són capaços de formular-los en la forma de conjectures precises.

Les taules de Tait van ser esteses a onze encreuaments pel matemàtic canadenc Little i no es van millorar fins que Conway va establir alguns mètodes nous l'any 1964. Així, en una sola tarda (va dir ell), va obtenir la classificació dels nusos amb onze encreuaments que per a Little va resultar ésser un treball de set anys!

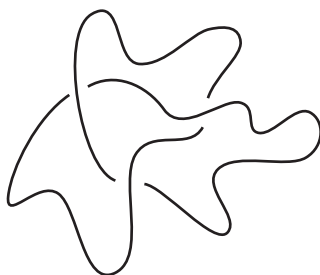
## 5 Representació de nusos

Per tal de discutir un objecte matemàtic, cal que aquest se'ns presenti d'alguna manera. En el cas dels nusos, comencem amb un tros de cordill o amb un model. Aleshores comencem a dibuixar diagrames de nusos, representant en el pla el que realment és 3-dimensional. De totes maneres, a l'hora de dibuixar un diagrama, sempre ho farem de la manera més simple possible. També ens esforcem per fer que

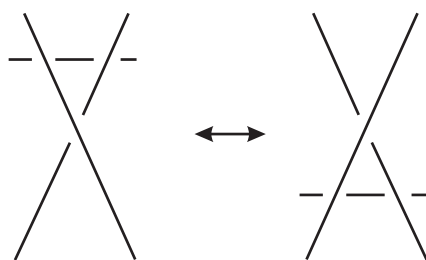
el dibuix sigui, d'alguna manera, representatiu de la forma. Per exemple, exclouem diagrames en què tres o més línies es creuin en un punt, com en el diagrama següent: (El terme tècnic per a designar aquest fet és que el diagrama està en posició general.)



Classificar és un procés bàsic en la ciència i en les matemàtiques. No farem un llistat de totes les maneres com es pot presentar un nus. La pregunta fonamental és: quan és que dos nusos són el mateix? Originàriament, això va expressar-se en termes de manipulacions, però també es pot expressar en termes del diagrama. Hi ha canvis en el diagrama que deixen tal qual els encreuaments, ja sigui tibant o empenyent els arcs entre els encreuaments, com en el diagrama d'un nus trèvol com el que segueix:



Hi ha moviments que són com fer passar un cap del cordill per sota o per sobre de l'altre, com en el diagrama següent:



També hi ha canvis en un dibuix en què s'insereixen o es fan desaparèixer un o més encreuaments, com en els gràfics de la pàgina següent:

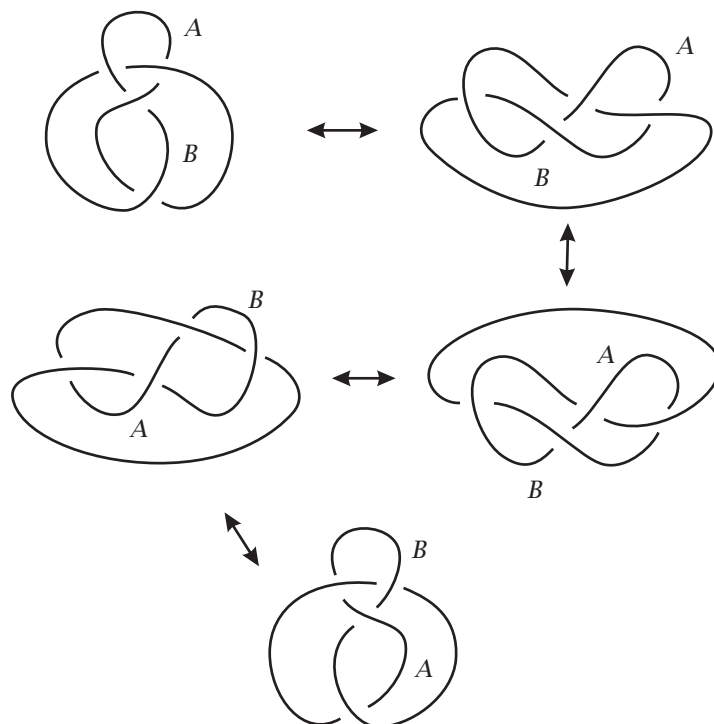
Tots aquests moviments transformen un diagrama del nus, però el fet més remarkable és que per a qualsevol parell de diagrames per a un mateix nus hi ha una seqüència d'aquests moviments que permetrà passar d'un diagrama a l'altre.



Aquest és un procediment bàsic en matemàtiques: trencar un procés complicat en una seqüència d'elements estàndard.

## 6 Imatges especulars

El diagrama de la imatge especular d'un nus s'obté canviant tots els encreuaments. La imatge especular d'un nus pot ser equivalent a l'original; en tal cas parlem de nus *amfiquiral*. Si no hi ha nus, la figura és naturalment la mateixa que la seva imatge especular. Això també és així amb el nus vuit: aquest fet es demostra a continuació.



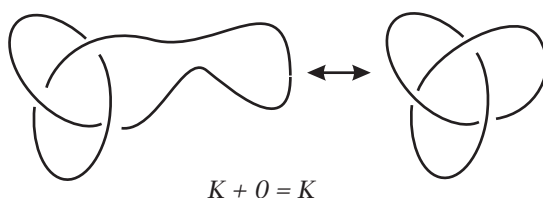
Però el nus trèvol és *quiral*. La demostració és força difícil i no va ser fins fa poc que es van trobar nous invariants que es poden calcular fàcilment i permeten distingir el nus trèvol de la seva imatge especular. En la taula de nusos, només fem una llista dels nusos i no de les seves imatges especulars. Algunes taules marquen els nusos quirals.

## 7 L'aritmètica dels nusos

Les matemàtiques no estudien només objectes individuals sinó també les seves relacions i les seves maneres de combinar-se. És una característica comuna de les matemàtiques l'existència d'analogies entre les relacions dels elements de certes classes, fins i tot quan sembla que no hi hagi cap mena de semblança entre els mateixos elements. Per exemple, quan escrivim  $x + y = y + x$  i  $xy = yx$ , fem veure una analogia entre la suma i la multiplicació, encara que la primera regla se satisfà en el cas de la suma de nombres, de matrius, de vectors, i en altres casos.

Ara introduïm una suma de nusos traient una part de cadascun i tornant-los a ajuntar d'una altra manera.

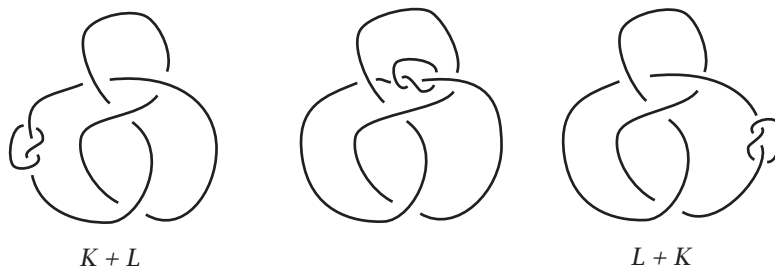
Aquesta suma s'escriu com  $K + L$  i té bones propietats. La primera i més òbvia és que si escrivim 0 per indicar un cordill sense nus, aleshores  $K + 0 = K = 0 + K$  per a qualsevol nus  $K$ . El següent diagrama il·lustra el que acabem de dir:



La següent propietat fàcil és l'associativitat:  $K + (L + M) = (K + L) + M$ . Això simplement ens diu que en ambdós casos obtenim el resultat fent els tres nusos un darrere l'altre:



Pel que fa a la següent propietat, la commutativitat, fa falta demostrar quelcom. El següent diagrama mostra la demostració general a través d'un exemple:





El següent fet és considerablement més difícil de verificar i no en donem la demostració. La suma té cancel·lació:  $K + L = K + M$  implica que  $L = M$ .

Però encara hi ha un resultat més fort. Diem que un nus  $P$  és *primer* si  $P$  no es pot escriure com a suma de nusos que siguin diferents d'ell mateix i del nus 0; o sigui,  $P$  és primer si per a tota descomposició  $P = K + L$  es té que o bé  $K = 0$  o bé  $L = 0$ . Així, un nus primer és el concepte anàleg al de nombre primer, si ens mirem la suma de nusos com a operació corresponent al producte de nombres i el nus 0 com el número 1.

Ara podem enunciar un resultat famós sobre nusos primers: *qualsevol nus té una descomposició en suma de nusos primers i aquesta descomposició és única llevat de l'ordre dels factors*.

Les paraules «única llevat de l'ordre dels factors» aquí signifiquen que són els elements el que importa en la descomposició, no pas l'ordre en què estan escrits. Això és anàleg al fet que la llista de factors primers d'un nombre està determinada pel nombre. Per exemple:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2.$$

Una de les implicacions de la unicitat de la descomposició en suma de nusos primers és que, en fer una llista de nusos, n'hi ha prou d'incloure només els nusos primers. Una altra conseqüència és que és impossible restar nusos: si  $K + L = 0$ , aleshores els dos nusos  $K$  i  $L$  són 0. A la pràctica, això significa que no podem desenredar un tros de cordill fent-hi un altre nus!

També hi ha distincions entre la descomposició en nusos primers i la factorització en nombres primers. Aquí en tenim una: hi ha un algorisme per a la factorització de nombres en factors primers; en canvi, no hi ha cap algorisme per a la descomposició de nusos en sumands primers. Per altra banda, tot i que hi ha un algorisme per a nombres, no és pràctic per a nombres grans, per exemple per a aquells de més de 100 dígit. Aquesta dificultat dona peu a alguns sistemes criptogràfics.

Aquesta analogia entre nusos i nombres mostra el poder de les matemàtiques d'ésser capaces d'influir en matèries i ciències ben diverses i d'atraure poderosament la imaginació. Essencialment, les matemàtiques analitzen el comportament formal i l'estructura dels processos, i després troben maneres de determinar les lleis d'aquestes estructures. D'aquesta manera, les matemàtiques posen de manifest com processos aparentment diferents es comporten de manera anàloga i aquestes analogies poden ser usades per a fer prediccions. En efecte, l'àlgebra tracta d'analogies entre diferents comportaments.

La factorització de nusos en sumands primers també mostra el procés de trencar un objecte complicat en trossos estandard més petits. En aquest cas nostre, les peces estandard són els nusos primers. En principi, classificar i fer una llista dels nusos se simplifica per mitjà d'aquesta descomposició.

Una pregunta interessant és com poder dir si un nus és primer. Hi ha diverses tècniques que estan al nostre abast, però que requereixen molta àlgebra. Una altra bona pregunta és si hi ha un nombre infinit de nusos primers. La resposta és sí, i, de fet, hi ha una bonica família infinita de nusos primers, els nusos  $(n, 2)$ -tòrics, on  $n$  és senar, els quals s'obtenen enrotllant un cordill al voltant d'un tor,  $n$  vegades en un sentit i dues vegades en l'altre. Tots aquests nusos són diferents i tots ells són primers. Això és força difícil de provar i aquí no podem donar cap dels mètodes necessaris.

## 8 Nusos, espai i llaços

Una manera d'estudiar un nus és estudiant l'espai al voltant del nus. Si voleu estudiar un lloc que us és estrany, diguem una ciutat, la primera cosa que feu és donar-hi unes voltes. De manera similar, us podeu familiaritzar amb l'espai al voltant del nus volant al seu voltant. Fent-ho així és natural d'intentar recordar el camí que es fa tot portant algun cordill per a marcar-lo.



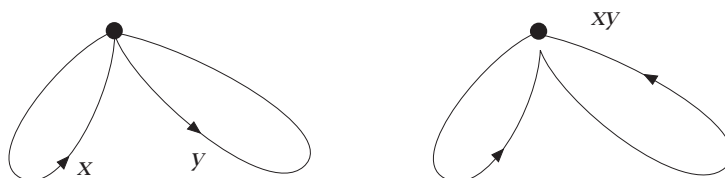
Això porta al desig d'estudiar el nus tot estudiant els llaços al seu voltant que comencen en un punt donat. És natural de classificar aquests llaços respecte de les deformacions. El fet important és que les classes de tals llaços formen una estructura matemàtica coneguda com a *grup*, és a dir, un conjunt, diguem  $G$ , tal que per a cada parell d'elements  $a, b$  de  $G$  el seu producte  $ab$  és un element de  $G$ . Les regles són les següents:

- **associativitat:** per a qualsevol  $a, b, c$  de  $G$ ;  $a(bc) = (ab)c$ ,
- **existència d'identitat:** hi ha un element  $1$  a  $G$  tal, que per a qualsevol element  $a$  a  $G$ ,  $a1 = 1a = a$ ,
- **existència d'inversos:** per a qualsevol  $a$  de  $G$  hi ha un element  $b$  a  $G$  (anomenat *invers* de  $a$ ) tal, que  $ab = ba = 1$ .

Es pot provar que la identitat és única, així com també ho és l'invers d'un element  $a$ . Per aquesta raó, l'invers de  $a$  s'escriu  $a^{-1}$ .

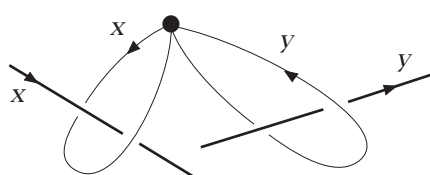
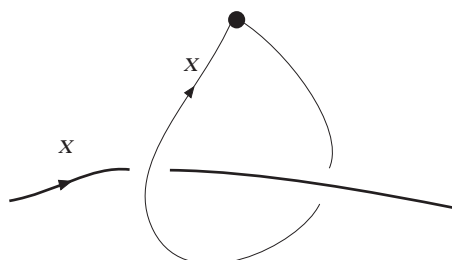
Els grups són una eina fonamental per a l'estudi de la simetria. En aquest cas, els elements del grup són les simetries d'una estructura donada i el producte és la composició de les simetries. Aquest ús dels grups està molt estès per les matemàtiques i a la ciència. Per exemple, apareix en cristal·lografia, la física de les partícules elementals, l'estudi de guies d'ones simètriques, l'estudi i la construcció de codis eficients i en molts altres camps.

L'ús de grups per a estudiar llaços té els seus orígens en el treball de Poincaré sobre mecànica celeste, en particular, en l'estudi del moviment de tres cossos sota forces gravitatòries. En el cas de les classes de llaços, l'estructura de grup ve del que s'anomena *producte de llaços*; primer seguir-ne un i després l'altre:

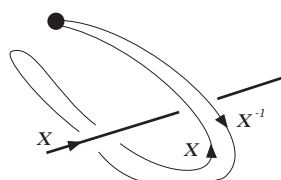


Producte de dos llaços

En el cas de les classes de llaços al voltant d'un nus és molt útil orientar primer el nus; això significa posar-hi una fletxa per a indicar en quin sentit es recorre el nus. El propòsit d'aquesta orientació és aclarir com determinar un llaç que doni una volta a una part del nus:

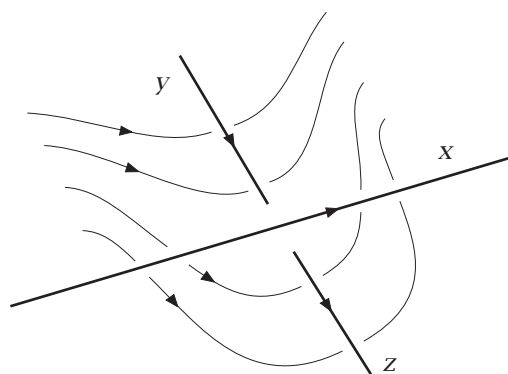


Producte  $xy$  dels llaços  $x$  i  $y$



Un llaç al voltant de  $x$  i el seu invers

Si mireu els llaços al voltant de diverses parts d'un encreuament d'un nus, podeu veure que hi ha d'haver una relació entre les classes de llaços. Això es mostra en el següent diagrama:



$$y = x z x^{-1}$$

Si apliquem aquestes relacions a tots els encreuaments d'un nus de cinc fulles, s'obté una llista de cinc relacions entre els anomenats generadors  $x, y, z, u, w$ , com

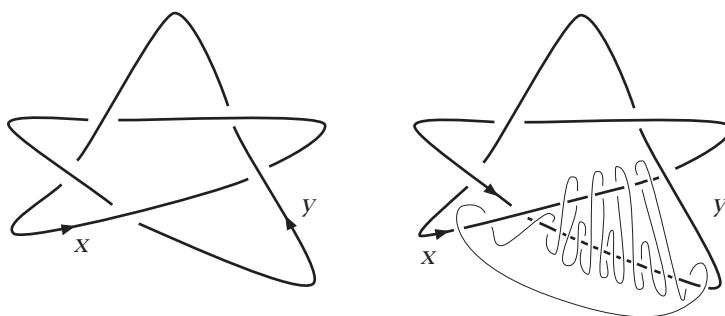
la que segueix:

$$\begin{aligned} u &= xyx^{-1}, \\ x &= ywy^{-1}, \\ y &= wzw^{-1}, \\ w &= zuz^{-1}, \\ z &= uxu^{-1}. \end{aligned}$$

D'aquestes relacions es poden eliminar tots els generadors excepte  $x$  i  $y$  per a obtenir la relació següent:

$$xyxyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = 1.$$

El terme de l'esquerra correspon a enrotllar el cordill al voltant del nus segons l'esquema mostrat seguidament. Podeu fer el vostre nus amb un filferro (o, millor encara, amb un tub de coure)



i aleshores enrotllar el cordill segons aquest precís esquema i, finalment, lligar els caps. El cordill es dependrà del nus! Això mostra com les matemàtiques de la teoria de grups modelen la topologia del nus.

Les fórmules com la que hem escrit abans són específiques del nus, encara que el cas més usual és que el grup no es pugui reduir a tan sols dos generadors i una relació. La distinció entre grups especificats a través de generadors i relacions és un problema interessant i no trivial.

## 9 Aplicacions

Durant molts anys després del treball original de Tait, els estudiosos dels nusos eren una feliç colla d'excèntrics que estudiaven una matèria l'encant de la qual era la seva base intuïtiva i la barreja d'àlgebra i geometria usada per a solucionar els seus problemes, però que, aparentment, estava lluny dels principals corrents de les matemàtiques. Aquesta darrera situació ha canviat dramàticament aquests darrers anys. S'han anat descobrint nous invariants que fan molt més fàcil la distinció de molts nusos (per exemple el nus trèvol i la seva imatge especular), i s'ha trobat que aquests invariants estan relacionats amb problemes de mecànica estadística i de física de partícules elementals. Els mètodes d'anàlisi d'un nus en termes dels canvis d'encreuament necessaris per desfer un nus han resultat ser útils en l'estudi

del desenrotllament del DNA quan es duplica. També s'han trobat camins nuats en solucions d'equacions diferencials usades per a modelar el moviment caòtic de l'atmosfera de la Terra.

Les aplicacions de les matemàtiques són importants, tot i que no cal que siguin la primera motivació per fer un treball matemàtic. Tal i com escriu Ashley:

Des dels primers inicis fins avui, la joia d'un descobriment ocasional s'ha considerat sempre que és recompensa suficient per a qualsevol esforç o sacrifici humà.

## Referències

- [1] AMMAN, A. ET AL. (editors) *Fractals, Quasicrystals, Chaos and Algebraic Quantum Mechanics*, Kluwer, 1988.
- [2] ASHLEY, C. W. *The Ashley Bok of Knots*, Doubleday/Doran and Co., Nova York, 1944.
- [3] CONWAY, J. H. «An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties», *Computational Methods in Abstract Algebra*, p. 329-358, Pergamon, Oxford, 1969.
- [4] FERGUSON, H. «Two theorems, two sculptures, two posters», *Amer. Math. Monthly* 667 (1990), 589-610.
- [5] JONES, V. F. R. «Knot theory and statistical mechanics», *Scientific Amer.*, novembre (1990), 52-57.
- [6] KELVIN, LORD «On vortex atoms», *Proceed. Royal Soc. Edimburgh*, 6 (1867), 94-105.
- [7] LITTLE, C. «On knots, with a census to order 10», *Trans. Conn. Acad. Sci.* 18 (1885), 375-378.
- [8] LITTLE, C. «Alternate + knots of order 11», *Trans. Royal Soc. Edimburgh* 36 (1890), 253-255.
- [9] LITTLE, C. «Non-alternate + knots», *Trans. Royal Soc. Edimburgh* 39 (1890), 771-778.
- [10] ROBINSON, J. *Symbolism: Sculptures and Tapestries*, catàleg de l'exposició matemàtiques i nusos al Pop Maths Roadshow (Universitat de Leeds, setembre de 1989), Bangor, 1989.
- [11] TAIT, P. J. «On knots I, II, III», *Scientific Papers*, vol. 1, Cambridge University Press, Londres, 1898.
- [12] *Mathematics and knots*, pamflet per a la Pop Maths Roadshow Exhibition, Bangor, 1989.

SCHOOL OF MATHEMATICS  
 UNIVERSITY COLLEGE OF NORTH WALES  
 DEAN STREET  
 BANGOR, GWYNEDD LL57 1UT  
 r.brown@bangor.ac.uk