

Equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc*

DAVID NUALART

L'objectiu d'aquesta xerrada ha estat presentar alguns dels problemes i resultats principals que s'han obtingut en l'estudi de les equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc en espai i temps. Ens hem centrat en l'equació de la calor unidimensional, que és potser l'exemple que s'ha analitzat amb més detall. La solució d'aquest tipus d'equacions és un camp aleatori $\{u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, és a dir, per a cada $t \geq 0$ i cada $x \in \mathbb{R}$, $u(t, x)$ és una variable aleatòria en lloc d'un nombre real. Les trajectòries d'aquest camp aleatori, o sigui, les funcions $(t, x) \mapsto u(t, x)$, són funcions Hölder contínues en temps i en espai d'ordres $\frac{1}{4} - \epsilon$ i $\frac{1}{2} - \epsilon$, respectivament, per a tot $\epsilon > 0$. Veurem també que la introducció de pertorbacions aleatòries pot portar fenòmens interessants, com la possibilitat de resoldre equacions amb coeficients mesurables i afitats, o sigui, que no tinguin necessàriament la propietat de Lipschitz usual. Al llarg de la conferència descriurem algunes d'aquestes propietats i indicarem també alguns problemes oberts dins d'aquesta teoria.

1 Equació de la calor amb soroll additiu

Considerem una barra de longitud L que es manté aïllada, però de manera que els seus extrems estiguin sempre a la temperatura de zero graus. Si representem per $u(t, x)$ la temperatura a l'instant t en el punt d'abscissa x de la barra i suposem que la distribució inicial de temperatures és donada per la funció $u_0(x)$, aleshores, $u(t, x)$ satisfà l'equació de la calor en l'interval $(0, L)$, amb condicions de Dirichlet a la frontera, és a dir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

* Conferència pronunciada a la Primera Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, març 1998.

La solució d'aquesta equació és

$$u(t, x) = \int_0^L G_t(x, y) u_0(y) dy,$$

on $G_t(x, y)$ és la solució fonamental de l'equació de la calor en l'interval $(0, L)$ amb condicions de Dirichlet a la frontera. Això vol dir que $G_t(x, y)$ és la solució corresponent a la condició inicial $\delta_y(x)$ que físicament representa un impuls de calor en el punt y . Formalment, quan t tendeix a zero $G_t(\cdot, y)$ convergeix cap a la mesura δ_y en el sentit de les distribucions.

La funció $G_t(x, y)$ admet la següent interpretació probabilista. Sigui $\{B_t, t \geq 0\}$ un moviment brownià de variància 2 que surt del punt $y \in (0, L)$. Això vol dir que $\{B_t, t \geq 0\}$ és una família de variables aleatòries, definides en un espai de probabilitat (Ω, \mathcal{F}, P) , que compleix les següents condicions:

- i) $B_0 = y$.
- ii) Per a tot $0 \leq s < t$, l'increment $B_t - B_s$ té una llei normal centrada amb variància $2(t - s)$ i és independent de la família de variables $\{B_u, 0 \leq u \leq s\}$.
- iii) Les trajectòries del procés estocàstic B_t són funcions contínues de la variable t .

Aleshores $x \mapsto G_t(x, y)$ és la densitat de probabilitat de la variable aleatòria B_t suposant que fins a l'instant t el moviment brownià s'ha mantingut dins de l'interval $[0, L]$. És a dir, la probabilitat que B_t pertanyi a un subconjunt mesurable D de $[0, L]$ i que $\{B_s, 0 \leq s \leq t\} \subset [0, L]$ és igual a la integral de la funció $x \mapsto G_t(x, y)$ en el conjunt D :

$$P(\{B_t \in D\} \cap \{B_s \in [0, L], \text{ per a tot } s \in [0, t]\}) = \int_D G_t(x, y) dx.$$

D'aquesta representació probabilista es dedueix que

$$\int_D G_t(x, y) dx \leq P\{B_t \in D\}, \quad (1.2)$$

per a tot borelià B de $[0, L]$. Tenint en compte que B_t té una llei normal $N(y, 2t)$, de la desigualtat (1.2) deduïm

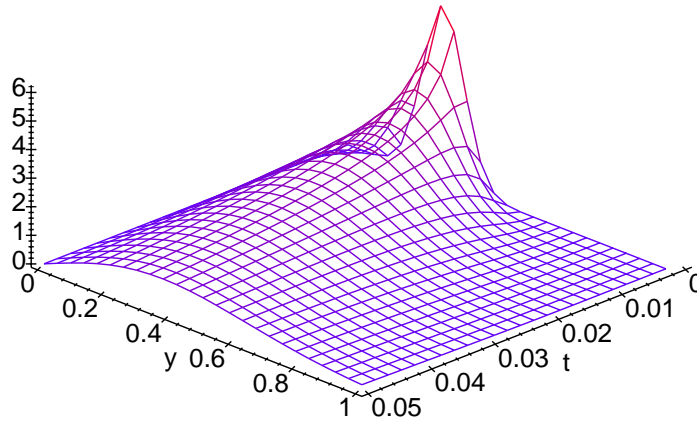
$$G_t(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}, \quad (1.3)$$

per a tot $x, y \in [0, L]$.

L'expressió explícita del nucli $G_t(x, y)$ és la següent:

$$G_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(y-x-2nL)^2}{4t}} - e^{-\frac{(y+x-2nL)^2}{4t}} \right).$$

La gràfica de la funció $G_t(x, y)$ per $x = 0,3$, $L = 1$ i $0 \leq t \leq 0,05$, és



Volem pertorbar l'equació (1.1) per un soroll blanc gaussià additiu. Per tal de descriure aquesta pertorbació explicarem primer què s'entén per un soroll blanc gaussià en espai i temps. Formalment un soroll blanc gaussià en espai i temps és una família de variables aleatòries independents

$$\{\dot{W}(t, x), t \geq 0, x \in [0, L]\}$$

definides en un espai de probabilitat (Ω, \mathcal{F}, P) de manera que tenen lleis normals centrades amb covariància

$$E(\dot{W}(t, x)\dot{W}(s, y)) = \delta(t - s)\delta(x - y).$$

Això implica que la variància de cada variable $\dot{W}(t, x)$ ha de ser infinita, i per tant un procés estocàstic d'aquest tipus no existeix en el sentit ordinari. Per tal de donar una formulació rigorosa a aquest concepte cal considerar per cada borelià $A \subset [0, \infty) \times [0, L]$ amb mesura de Lebesgue finita, $|A| < \infty$, la integral

$$W(A) = \int_A \dot{W}(t, x) dt dx$$

que serà una variable aleatòria amb llei normal centrada de variància $|A|$. D'aquesta manera en lloc de treballar amb el conjunt de variables aleatòries formals $\{\dot{W}(t, x), t \geq 0, x \in [0, L]\}$, considerarem la família de variables aleatòries $\{W(A)\}$, i introduïrem la següent definició:

1 DEFINICIÓ Direm que una família de variables aleatòries

$$\{W(A), A \subset \mathcal{B}([0, \infty) \times [0, L]), |A| < \infty\}$$

és un soroll blanc gaussià en espai i temps si es compleixen les condicions següents:

- i) $W(A)$ té llei normal centrada de variància $|A|$.

- ii) Si A_1, \dots, A_n són borelians de mesura finita continguts en $[0, \infty) \times [0, L]$ i disjunts dos a dos, aleshores, les variables $W(A_1), \dots, W(A_n)$ són independents.
- iii) $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$, si A i B són disjunts.

L'aplicació que fa correspondre la variable $W(A)$ a la funció indicatriu $\mathbf{1}_A$ es pot estendre a una isometria lineal entre els espais de Hilbert $L^2([0, \infty) \times [0, L])$ i $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La imatge d'una funció f per aquesta isometria serà una variable aleatòria que indicarem per $W(f)$ i que té llei normal centrada amb variància $\int_0^\infty \int_0^L f^2(t, x) dx dt$. També s'utilitza la notació

$$W(f) = \int_0^\infty \int_0^L f(t, x) W(dt, dx), \quad (1.4)$$

i es diu que $W(f)$ és la integral estocàstica de la funció f respecte a la mesura aleatòria W .

L'equació (1.1) pertorbada pel soroll blanc W es formularà de la manera següent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{W}(t, x) \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

La solució d'aquesta equació, si $\dot{W}(t, x)$ fos una funció real afitada, seria

$$u(t, x) = \int_0^L G_t(x, y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) \dot{W}(s, y) dy ds. \quad (1.6)$$

A partir de la desigualtat (1.3) es dedueix fàcilment que $G_{t-s}(x, y)$ com a funció de les variables (s, y) és de quadrat integrable:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L G_{t-s}^2(x, y) dy ds &\leq \int_0^t \int_0^L \frac{1}{4\pi(t-s)} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}} dy ds \\ &\leq \int_0^t \frac{ds}{2\sqrt{2\pi(t-s)}} < \infty. \end{aligned}$$

Per tant, la integral $\int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) \dot{W}(s, y) dy ds$ es pot interpretar com una integral estocàstica del tipus (1.4) amb la notació

$$W(G_{t-\cdot}(x, \cdot)) = \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) W(ds, dy).$$

D'aquesta manera $u(t, x)$ definit per (1.6) serà una variable aleatòria amb llei normal de mitjana $\int_0^L G_t(x, y) u_0(y) dy$ i variància $\int_0^t \int_0^L G_{t-s}^2(x, y) dy ds$.

L'estudi d'equacions en derivades parcials del tipus (1.5) pertorbades per un soroll blanc en espai i temps està motivat per la necessitat de disposar de models matemàtics per fenòmens on apareixen impulsos instantanis de forma aleatòria, en espai i en temps. El següent fenomen de neurofisiologia n'és un exemple.

EXEMPLE: Considerem una neurona, que de manera molt simplificada imaginarem com un cilindre prim de llargada L . Suposarem que les distàncies longitudinals

són d'un ordre de grandària superior al diàmetre del cilindre, i designarem per $V(t, x)$ el potencial elèctric en la membrana en el punt d'abscissa $x \in [0, L]$ a l'instant t . Aquest potencial satisfà aproximadament l'equació del cable $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V$, en absència d'estímuls exteriors i amb condicions inicials i a la vora adequades. En aquesta equació hem pres els coeficients iguals a la unitat, i això es pot fer mesurant les diferents magnituds físiques en les unitats adequades (la de temps és de 5×10^{-3} segons i la d'espai és de 700 micres).

La superfície de la neurona està recoberta de sinapses a través de les quals rep impulsos elèctrics que poden ser positius (excitació) o negatius (inhibició). Si l'impuls que arriba a l'instant t en el punt d'abscissa x és $F(t, x)$, aleshores V serà solució de l'equació no homogènia

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V + F(t, x).$$

Els impulsos arriben de manera aleatòria i es poden modelitzar per un procés de *Poisson* puntual. D'altra banda, com els impulsos són en general petits i molt nombrosos podem suposar que $F(t, x)$ es descompon en la suma $\bar{F}(t, x) + \dot{W}(t, x)$, on $\bar{F}(t, x)$ és determinista i $\dot{W}(t, x)$, és un soroll blanc en espai i temps. La resposta de la neurona a un impuls pot dependre del potencial en el punt, i per això, en lloc de $\dot{W}(t, x)$, ens pot interessar tenir un terme de la forma $g(V)\dot{W}(t, x)$. Això ens dona un exemple d'equació no lineal.

Un objectiu d'interès dins d'aquest model és la llei de probabilitat de l'instant d'arribada del potencial a un nivell fixat.

1.1 Cas multidimensional

Suposem ara que la variable d'espai x pertany a un domini afitat D de \mathbb{R}^d , en lloc de l'interval $[0, L]$. L'equació de la calor en el domini D , pertorbada per un soroll blanc gaussià $W(A)$ en espai i temps, i amb condicions de Dirichlet a la vora de D , s'escriurà

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + \dot{W}(t, x), \\ u|_{\partial D} &= 0, \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Com abans, si $G_t(x, y)$ denota la solució fonamental de l'equació de la calor en el domini D amb condicions de Dirichlet a la vora, la solució de (1.7) serà

$$u(t, x) = \int_D G_t(x, y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_D G_{t-s}(x, y) \dot{W}(s, y) dy ds.$$

Ara bé, en el cas $d > 1$ la solució $G_{t-s}(x, y)$ com a funció de les variables (s, y) no és de quadrat integrable en $[0, t] \times D$, ja que utilitzant les minoracions del nucli $G_t(x, y)$ obtenim

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_D G_{t-s}^2(x, y) dy ds &\geq c \int_0^t \int_{B(x, r)} (t-s)^{-d} e^{-\frac{|x-y|^2}{c(t-s)}} dy ds \\ &\geq c' \int_0^t s^{-d/2} ds = \infty, \end{aligned}$$

on la bola $B(x, r)$ està inclosa en l'interior de D . Això vol dir que la solució $u(t, x)$ és un procés estocàstic generalitzat, i com en el cas del soroll blanc $\dot{W}(t, x)$, per tal de tenir variables aleatòries amb variància finita hem de considerar les integrals $\int_D u(t, x)\varphi(x)dx$, on $\varphi \in C_0^\infty(D)$ és una funció infinitament diferenciable amb suport inclòs a D . La integral $\int_D u(t, x)\varphi(x)dx$ tindrà llei normal amb variància

$$\int_0^t \int_D \left(\int_D G_{t-s}(x, y)\varphi(x)dx \right)^2 dy ds < \infty.$$

La teoria dels processos estocàstics generalitzats ha permès estudiar equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc additiu en espai i temps en dimensió $d > 1$. Malauradament, les equacions no lineals no es poden analitzar amb aquesta tècnica ja que no se sap com definir la composició d'una funció no lineal amb una distribució. Un exemple d'equació no lineal que apareix en determinats fenòmens de la física és l'equació de la calor, amb un potencial aleatori dependent del temps:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u\dot{W}(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

A la referència [14] Nualart i Zakai demostren que si $d > 1$ la solució de (1.8) es pot expressar com una sèrie d'integrals estocàstiques múltiples amb nuclis de $L^p([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ on $p < \frac{d}{d-1}$:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t, x)).$$

Utilitzant els coeficients en la base dels polinomis d'Hermite multidimensionals, Nualart i Rozovskii [13] demostren que $u(t, x)$ pertany a un cert espai de variables aleatòries generalitzades. Citem també la monografia de Holden, Øksendal, Ubøe i Zhang [8] on s'analitzen diversos tipus d'equacions en derivades parcials estocàstiques mitjançant la teoria de les distribucions d'Hida.

2 Equació de la calor estocàstica unidimensional no lineal

En aquest apartat introduïrem termes no lineals a l'equació (1.5). Suposem que $f, g: [0, \infty) \times [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ són funcions mesurables que compleixen la condició següent de creixement lineal:

$$|f(t, x, z)| + |g(t, x, z)| \leq K(1 + |z|). \quad (2.9)$$

Considerem l'equació de la calor estocàstica amb condicions de Dirichlet a l'interval $[0, L]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x, u(t, x)) + g(t, x, u(t, x))\dot{W}(t, x), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.10)$$

on $\dot{W}(t, x)$ és un soroll blanc en espai i temps. Si utilitzem el mateix mètode que en el cas lineal, mitjançant la solució fonamental $G_t(x, y)$ de l'equació de la calor en

l'interval $[0, L]$ amb condicions de Dirichlet a la vora, podem transformar l'equació formal (2.10) en l'equació integral següent:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^L G_t(x, y) u_0(y) dy \\ &+ \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) f(u(s, y)) dy ds \\ &+ \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) g(u(s, y)) W(ds, dy). \end{aligned} \quad (2.11)$$

La integral estocàstica que apareix en l'equació anterior té un integrant $G_{t-s}(x, y) g(u(s, y))$ que és aleatori, i per això necessitem desenvolupar una teoria adequada d'integració estocàstica de processos adaptats. Sense entrar en detalls tècnics, indiquem només que la isometria

$$v \mapsto W(v) = \int_0^\infty \int_0^L v(s, y) W(ds, dy)$$

definida a (1.4) es pot estendre a l'espai dels processos estocàstics $v = \{v(t, x), (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]\}$ adaptats i de quadrat integrable, és a dir tals que compleixen les condicions següents:

- i) $v(t, x)$ és \mathcal{F}_t -mesurable per tot (t, x) , on \mathcal{F}_t és la σ -àlgebra generada per les variables $\{W(A), A \subset [0, t] \times [0, L]\}$.
- ii) $E \int_0^\infty \int_0^L v(t, x)^2 dx dt < \infty$.

Es pot demostrar (vegeu [16]) que un procés estocàstic u adaptat i localment de quadrat integrable (és a dir, tal que $E \int_0^T \int_0^L u(t, x)^2 dx dt < \infty$ per a tot $T > 0$), satisfà l'equació integral (2.11) si i només si u és una solució *feble* de l'equació (2.10), és a dir, si i només si

$$\begin{aligned} \langle u_t, \varphi \rangle &= \langle u_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle u_s, \varphi'' \rangle ds + \int_0^t \langle f(u_s), \varphi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \int_0^L g(u(s, x)) \varphi(x) W(ds, dx), \end{aligned} \quad (2.12)$$

per a tota funció $\varphi \in C^2([0, 1])$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, i per a tot $t \geq 0$, on $\langle \phi, \varphi \rangle$ designa el producte escalar en $L^2([0, L])$.

El resultat fonamental d'existència i unicitat de solució és el següent:

2 TEOREMA *Suposem que els coeficients f i g compleixen la condició de creixement lineal (2.9) i a més la condició de Lipschitz següent:*

$$|f(t, x, z) - f(t, x, y)| + |g(t, x, z) - g(t, x, y)| \leq K|z - y|.$$

Aleshores, existeix un únic procés estocàstic continu, adaptat i localment de quadrat integrable $u = \{u(t, x), (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]\}$ solució de l'equació integral (2.11). A més, u satisfà l'equació (2.10) en sentit feble i es compleix

$$E \left(\sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq x \leq L}} |u(t, x)|^p \right) < \infty$$

per a tot $p \geq 2$.

Tot seguit descriurem algunes propietats específiques de les equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc en espai i temps.

2.1 Equacions amb coeficient de deriva irregular

Considerem el cas particular de l'equació (2.10) en què el coeficient de difusió g és constant, és a dir, el soroll blanc és additiu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x, u(t, x)) + g\dot{W}(t, x), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Gyöngy i Pardoux van demostrar a [7] el següent resultat que ens dona l'existència i unicitat de solució sense suposar cap condició de regularitat sobre el coeficient de deriva f .

3 TEOREMA *Sigui $f: [0, \infty) \times [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció mesurable i afitada. Aleshores existeix un únic procés estocàstic continu, adaptat i localment de quadrat integrable $u = \{u(t, x), (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]\}$, que és solució de l'equació (2.13).*

La demostració d'aquest resultat es basa en les següents idees: Podem trobar una família de funcions Lipschitz contínues $f_{n,k}$, uniformement afitades, tals que per cada n , $f_{n,k}$ decreix cap a una funció f_n quan k tendeix a infinit, i les funcions f_n creixen cap a f quan n tendeix a infinit. Sigui $u_{n,k}$ la solució de l'equació (2.13) amb el coeficient $f_{n,k}$. Les propietats de monotonia i afitació de les funcions $f_{n,k}$ es transporten a les solucions $u_{n,k}$, de manera que les funcions $u_{n,k}$ decreixen cap a una funció u_n quan k tendeix a infinit i les u_n creixen cap a una funció u . Només falta veure que u_n (respectivament u) és solució de (2.13) amb coeficient f_n (respectivament f). Això es dedueix de les convergències

$$\begin{aligned} \lim_k E \int_0^T |f_{n,k}(u_{n,k}(s, x)) - f_n(u_n(s, x))| ds &= 0, \\ \lim_n E \int_0^T |f_n(u_n(s, x)) - f(u(s, x))| ds &= 0, \end{aligned}$$

per a tot $x \in [0, L]$. Aquestes convergències es basen en estimacions del tipus següent per a tota solució u de (2.13)

$$E \int_0^T \phi(t, u(t, x)) dt \leq K(T, \rho, \epsilon) \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, z)^\rho dz dt \right)^{1/\rho}, \tag{2.14}$$

per a tot $\rho > \frac{5}{4}$, $x \in (\epsilon, L - \epsilon)$, $\phi \geq 0$. Observem que el camp aleatori $u(t, x)$ no apareix en el membre de la dreta de la desigualtat (2.14). Això es deu al fet que podem minorar la variància de les variables aleatòries $u(t, x)$.

En el treball [4] Gyöngy va estendre aquest resultat al cas de l'equació (2.10) suposant que el coeficient de difusió g compleix $|g(t, x, z)| \geq \delta > 0$ i té una derivada respecte la variable z localment Lipschitz contínua.

2.2 Equacions amb coeficient de difusió Hölder continu

Considerem l'equació diferencial ordinària

$$dx_t = |x_t|^\alpha dt, \quad (2.15)$$

amb la condició inicial $x_0 = 0$, on α és un paràmetre positiu. Si $\alpha \geq 1$, l'única solució d'aquesta equació és la funció zero, però si $0 < \alpha < 1$, hi ha infinites solucions de la forma

$$x_t = [(1 - \alpha)(t - t_0)^+]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

on $t_0 \geq 0$. La versió estocàstica de l'equació (2.15) expressada en forma integral seria

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha B(ds), \quad (2.16)$$

on $B = \{B_t, t \geq 0\}$ és un moviment brownià. L'any 1962, Girsanov va demostrar a [3] el resultat següent:

- i) Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, aleshores $X_t = 0$ és la solució única de l'equació (2.16).
- ii) Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, aleshores l'equació (2.16) te infinites solucions.

Observem que la unicitat de solució és vàlida en el cas determinista només per $\alpha \geq 1$, mentre que en el cas estocàstic es manté per $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Si suposem $\alpha > \frac{1}{2}$, es pot demostrar que una solució X_t de (2.16) és nul·la de la manera següent: Fixem $\epsilon > 0$ i definim la funció

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2}, & \text{si } |x| < \epsilon \\ |x|, & \text{si } |x| \geq \epsilon \end{cases}$$

Observem que la funció $\varphi_\epsilon(x)$ és dues vegades contínuament diferenciable i la seva segona derivada és $\frac{1}{\epsilon} \mathbf{1}_{[-\epsilon, \epsilon]}(x)$. La fórmula d'Itô permet escriure

$$\varphi_\epsilon(X_t) = \frac{\epsilon}{2} + \int_0^t \varphi'_\epsilon(X_s) |X_s|^\alpha B(ds) + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi''_\epsilon(X_s) |X_s|^{2\alpha} ds.$$

Si prenem l'esperança matemàtica de tots els termes de l'expressió anterior obtenim

$$\begin{aligned} E(\varphi_\epsilon(X_t)) &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t E(\varphi''_\epsilon(X_s) |X_s|^{2\alpha}) ds \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \int_0^t E\left(\frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{[-\epsilon, \epsilon]}(X_s) |X_s|^{2\alpha}\right) ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{t}{2} \epsilon^{2\alpha-1}. \end{aligned}$$

Això implica, finalment,

$$E|X_t| = \lim_{\epsilon \downarrow 0} E(\varphi_\epsilon(X_t)) = 0,$$

i, per tant, $X_t = 0$ quasi segurament per a tot $t \geq 0$.

El resultat de Girsanov va ser generalitzat posteriorment per Yamada i Watanabe a [18]. Concretament, aquests autors van demostrar l'existència i unicitat de solució per a equacions diferencials estocàstiques de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) B(ds),$$

suposant que el coeficient de difusió σ satisfà una condició del tipus

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq h(|x - y|),$$

on h és una funció creixent que compleix $h(0) = 0$ i $\int_0^\epsilon \frac{dz}{h^2(z)} = +\infty$ per a tot $\epsilon > 0$. Observem que els coeficients $\sigma(x) = |x|^\alpha$ satisfan aquesta condició si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Tenint en compte aquests fets, ens podem preguntar si es poden demostrar resultats semblants per a l'equació de la calor (2.10) amb un coeficient $g(x)$ de la forma $|x|^\alpha$. Aquest problema és molt més difícil fins i tot en el cas particular $\alpha = \frac{1}{2}$. L'existència i unicitat de solució per a l'equació

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{u(t, x)} \dot{W}(t, x), \quad (2.17)$$

on $x \in \mathbb{R}$, és encara un *problema obert*. Nogensmenys, es pot demostrar l'existència d'una solució *en llei* per a aquesta equació, és a dir, es poden construir un soroll blanc en espai i temps $\dot{W}(t, x)$ i un camp aleatori $u(t, x)$ que satisfan (2.17) (o bé l'equació integral associada). Aquest camp aleatori $u(t, x)$ apareix com la densitat límit (nombre de partícules per unitat de longitud) d'un sistema de partícules amb ramificació. Més precisament, el camp aleatori $u(t, x)$ es pot construir de la manera següent (vegeu [16]):

- Escollim de manera aleatòria punts en la recta real segons un procés de Poisson puntual de paràmetre $\lambda > 0$.
- Posem partícules en aquests punts de manera que segueixen moviments brownians independents.
- Cada partícula, després d'un temps aleatori que té llei exponencial de paràmetre $\mu > 0$, amb probabilitat $\frac{1}{2}$ o bé es mor o bé es divideix en dues partícules que segueixen de nou moviments brownians independents.

Si prenem una successió de models d'aquest tipus amb paràmetres λ_n i μ_n de manera que

$$\lim_n \lambda_n = \infty, \quad \lim_n \frac{\mu_n}{\lambda_n} = c^2 > 0,$$

aleshores si $N_n([a, b])$ designa el nombre de partícules en un interval fixat $[a, b]$, es compleix que

$$\frac{1}{\lambda_n} N_n([a, b]) \xrightarrow[\text{Llei}]{T} \int_a^b u(t, x) dx,$$

quan n tendeix a infinit, on $u(t, x)$ satisfà l'equació (2.17) amb condició inicial $u_0(x) = dx$.

3 Propietats de les solucions

En aquest apartat descriurem breument algunes de les propietats del camp aleatori $u(t, x)$ solució de l'equació (2.10).

3.1 Continuïtat de les trajectòries

Sigui $u = \{u(t, x), (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]\}$ la solució de l'equació (2.10). Es pot demostrar fàcilment una desigualtat de moments del tipus següent, per a tot $p \geq 2$:

$$E \left(|u(t, x) - u(s, y)|^p \right) \leq c_p (|x - y|^{p/2} + |s - t|^{p/4}),$$

per tot $x, y \in [0, L]$, $s, t \in [0, T]$, on la constant c_p depèn de p , T , L , i de les constants de Lipschitz dels coeficients f i g . Una demostració d'aquesta propietat es pot trobar a la monografia de Walsh [16].

3.2 Explosió en temps finit

Considerem l'equació de la calor estocàstica no lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(t, x)^\gamma \dot{W}(t, x), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{3.18}$$

on suposarem que $\gamma \geq 1$, per tal de garantir la unicitat de solució. En el cas $\gamma > 1$, el coeficient $g(x) = x^\gamma$ no té la propietat de Lipschitz (la seva derivada no està afitada), i per tant no es pot assegurar l'existència d'una solució per a tot temps $t > 0$. L'equació diferencial ordinària $dx_t = x_t^\gamma dt$, té per solució

$$x_t = \left[x_0^{1-\gamma} - (\gamma - 1)t \right]^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

que tendeix a infinit quan $t \uparrow \frac{1}{\gamma-1} x_0^{1-\gamma}$. Per a l'equació (3.18) Mueller va demostrar a [10] que no hi ha explosió si $\gamma < \frac{3}{2}$, és a dir, la solució $u(t, x)$ existeix per a tot temps $t \geq 0$. Posteriorment, Mueller i Sowers [11] van demostrar que si l'exponent γ és molt més gran que $\frac{3}{2}$, aleshores, la solució explota en un temps finit, amb probabilitat estrictament positiva.

3.3 Propietat de Màrkov, distribucions invariants i solucions estacionàries

És ben sabut que les solucions d'equacions diferencials estocàstiques ordinàries satisfan la propietat de Màrkov. La propietat de Màrkov ens diu que el passat i el futur són condicionalment independents respecte el present i és una conseqüència directa del fet que el moviment brownià té increments independents.

Anàlogament, es pot considerar la solució $u(t, x)$ de l'equació (2.10) com un procés de Màrkov $\{u(t), t \geq 0\}$ a valors en l'espai de funcions contínues $C([0, L])$. Una noció important en els processos de Màrkov és la de llei de probabilitat estacionària, de manera que si la variable inicial té aquesta llei, aleshores el procés té aquesta mateixa llei en tot instant. Per a l'equació de la calor estocàstica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u + f(t, x, u(t, x)) + g(t, x, u(t, x))W(t, x),$$

amb condicions de Dirichlet $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, Sowers [15] va demostrar l'existència d'una única distribució estacionària μ en $C([0, L])$, suposant $|f(t, x, z)| \leq M$, $\alpha > 0$ i $0 < \epsilon \leq g(t, x, z) \leq K$. A més, la llei de $u(t, \cdot)$ convergeix cap a μ en la norma de la variació total quan t tendeix a infinit.

En el cas d'equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc en espai i temps, podem esperar una propietat semblant on es substitueixi el passat i el futur per l'interior i l'exterior d'una determinada regió. Aquesta generalització de la propietat de Màrkov al cas de camps aleatoris és deguda a P. Lévy i es pot formular de la manera següent:

4 DEFINICIÓ *Es diu que una família de variables aleatòries*

$$u = \{u(t, x), t \geq 0, x \in [0, L]\}$$

satisfà la propietat de Màrkov si per a tot obert connex i afitat amb vora regular $D \subset [0, \infty) \times [0, L]$, les σ -àlgebres

$$\sigma \{u(t, x), (t, x) \in D\} \text{ i } \sigma \{u(t, x), (t, x) \in D^c\}$$

són condicionalment independents respecte la σ -àlgebra

$$\sigma \{u(t, x), (t, x) \in (\partial D)_\epsilon\}.$$

Recordem que $\sigma \{u(t, x), (t, x) \in D\}$ denota la σ -àlgebra generada per les variables aleatòries $\{u(t, x), (t, x) \in D\}$ i que $(\partial D)_\epsilon$ és el conjunt de punts z de $[0, \infty) \times [0, L]$ tals que $d(z, \partial D) < \epsilon$.

En el treball [12] es demostra que la solució de l'equació (2.10) té la propietat de Màrkov en el cas que el coeficient de difusió g és constant. Hom conjectura que la propietat de Màrkov també es compleix en el cas general, però fins en aquest moment no s'ha pogut donar una demostració d'aquest resultat.

4 Equació de Burgers estocàstica

L'equació de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

representa una versió simplificada de l'equació de Navier Stokes. És una equació no lineal en derivades parcials que modelitza de manera molt aproximada un camp de velocitats en el cas de turbulència. Diversos autors han proposat la introducció d'una pertorbació aleatòria per tal de millorar la modelització. Concretament, Da Prato i Gatarek estudien a [2] l'equació

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g(u) \dot{W}(t, x), \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{4.19}$$

on $\dot{W}(t, x)$ és un soroll blanc en espai i temps. El resultat principal d'aquests autors és el següent:

5 TEOREMA *Suposem que el coeficient g és Lipschitz i està afitat. Aleshores existeix una única solució de l'equació integral*

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^L G_t(x, y) u_0(y) dy \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^L \frac{\partial G_{t-s}}{\partial y}(x, y) u^2(s, y) dy ds \\ & + \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) g(u(s, y)) W(ds, dy), \end{aligned}$$

que és un procés continu i adaptat tal que $E(\sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq x \leq L}} |u(t, x)|^p) < \infty$, per a tot $p \geq 2$.

També es pot afegir un terme $f(u)$ i considerar una funció $b(u)$ amb creixement quadràtic en lloc de u^2 (vegeu Gyöngy [5]). La demostració d'aquest resultat es basa en el mètode següent: en primer lloc, per cada natural N sigui u_N la solució de l'equació

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^L G_t(x, y) u_0(y) dy \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^L \frac{\partial G_{t-s}}{\partial y}(x, y) (\pi_N(u))^2 dy ds \\ & + \int_0^t \int_0^L G_{t-s}(x, y) g(\pi_N(u))(s, y) W(ds, dy), \end{aligned} \quad (4.20)$$

on $\pi_N(u)$ denota el procés u truncat de la manera següent:

$$\pi_N(u)(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{si } \|u(t)\|_2 \leq N \\ \frac{u(t, x)}{\|u(t)\|_2} N & \text{si } \|u(t)\|_2 > N \end{cases} .$$

Aleshores, es tracta d'obtenir estimacions *a priori* que permetin demostrar que quan N tendeix a infinit les solucions u_N convergeixen cap a la solució de l'equació original. És a dir, si

$$\tau_N = \inf \left\{ t \geq 0: \|u_N(t)\|_{L^2([0, L])} \geq N \right\},$$

aleshores, els temps aleatoris τ_N creixen cap a infinit. Les estimacions *a priori* desitjades s'obtenen mitjançant mètodes clàssics.

Aquest mètode ha estat estès al cas de tota la recta real en el treball [6] de Gyöngy i Nualart. En el treball [1], els autors demostren un resultat d'existència i unicitat de solució per a l'equació (4.19) en tota la recta real, suposant que el coeficient g és constant, i utilitzant la transformació de Cole-Hopf i la fórmula de Feynman-Kac.

Referències

- [1] BERTINI, L., CANCRINI, N., JONA-LASINIO, G. «The stochastic Burgers equation», *Commun. Math. Physics*, 165 (1994), 211-232.
- [2] DA PRATO, G., GATAREK, D. «Stochastic Burgers equation with correlated noise», *Stochastics and Stochastics Reports*, 52 (1995), 29-41.

- [3] GIRSANOV, I. V. «An example of non-uniqueness of the solution to the stochastic differential equation of K. Itô», *Theory Probab. Appl.*, 7 (1962), 325–331.
- [4] GYÖNGY, I. «On non-degenerate quasi-linear stochastic partial differential equations», *Potential Anal.*, 4 (1995), 157–171.
- [5] GYÖNGY, I. «Existence and uniqueness for semilinear stochastic partial differential equations», *Stoch. Proc. Appl.*, 73 (1998), 271–299.
- [6] GYÖNGY, I., NUALART, D. «On the stochastic Burgers equation in the real line». Apareixerà a *Annals of Prob.*
- [7] GYÖNGY, I., PARDOUX, E. «On quasi-linear stochastic partial differential equations», *Prob. Theory Relat. Fields*, 94 (1993), 413–425.
- [8] HOLDEN, H., ØKSENDAL, B., UBØE, J., ZHANG, T. S. *Stochastic Partial Differential Equations*. Birkhäuser, 1996.
- [9] KALLIANPUR, G., WOLPER, R. «Infinite dimensional stochastic differential equation models for spatially distributed neurons», *Appl. Math. Optim.*, 12 (1984), 125–172.
- [10] MUELLER, C. «Long time existence for the heat equation with a noise term», *Prob. Theory Relat. Fields*, 90 (1990), 505–518.
- [11] MUELLER, C., SOWERS, R. «Blowup for the heat equation with a noise term», *Prob. Theory Relat. Fields*, 97 (1993), 287–320.
- [12] NUALART, D., PARDOUX, E. «Markov field properties of solutions of white noise driven quasi-linear parabolic pdes», *Stoch. and Stoch. Rep.*, 48 (1994), 17–44.
- [13] NUALART, D., ROZOVSKII, B. «Weighted stochastic Sobolev spaces and bilinear SPDE's driven by space-time white noise», *J. Funct. Anal.*, 149 (1997), 200–225.
- [14] NUALART, D., ZAKAI, M. «Generalized Brownian functionals and the solution to a stochastic partial differential equation», *J. Funct. Anal.*, 84 (1989), 279–296.
- [15] SOWERS, R. «Large deviations for the invariant measure of a reaction-diffusion equation with non-Gaussian perturbation», *Prob. Theory Relat. Fields*, 92 (1992), 393–421.
- [16] WALSH, J. B. «A stochastic model of neuronal response», *Adv. Appl. Prob.*, 13 (1981), 231–281.
- [17] WAN, F. Y. M., TUCKWELL, H. C. «The response of a spatially distributed neuron to white noise current injection», *Biol. Cybernetics* 33 (1979), 39–55.
- [18] YAMADA, T., WATANABE, S. «On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations», *J. Math. Kyoto Univ.*, 11 (1971), 155–167.

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
 UNIVERSITAT DE BARCELONA
 GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
 08007, BARCELONA
 david@porthos.bio.ub.es