

Com integrar la geometria en els programes: doblegar paper i la teoria de nombres*

PETER HILTON I JEAN PEDERSEN

Introducció

Si l'estudi de la geometria ha de recuperar el lloc que li correspon en els programes preuniversitaris (i hi ha un cert consens que aquesta recuperació és urgent i vital), no creiem que la manera d'aconseguir-ho sigui seguir explicant-la com una disciplina independent i autònoma, amb problemes, mètodes i resultats propis, que es treballen sense fer cap referència a les altres assignatures de matemàtiques. La raó principal per voler enfortir l'ensenyament de la geometria és la d'estimular la imaginació i la intuïció espacial de l'estudiant i fer que aprengui a buscar pautes i a plantejar-se preguntes. Les respostes a aquestes preguntes són, molt sovint, de naturalesa algebraica més que no pas purament geomètrica, perquè la idea de l'àlgebra és més la de buscar estratègies sistemàtiques de resolució. Els arguments geomètrics a l'estil dels utilitzats en geometria euclidiana no són sistemàtics (certament, sembla que cada conjectura necessita un mètode propi de justificació o refutació), i no és estrany que els estudiants siguin incapaços de generar el corrent constant d'idees originals que demana aquest tipus de raonament sintètic.

És per això que hem estat insistint durant molts anys en la conveniència de presentar els problemes des d'un punt de vista geomètric i de fer-hi jugar àrees més familiars de les matemàtiques a l'hora de buscar solucions. Aquest article s'ha de veure com una contribució més a aquesta campanya. Discutirem aquí un procediment sistemàtic de doblegar o plegar paper que ens permetrà obtenir aproximacions arbitràriament bones a polígons regulars convexos de qualsevol nombre de costats. Com passa sovint, resulta que el procediment fa encara molt més, i ens permet també construir polígons regulars estrellats, en el sentit de Coxeter [1]. Alguns dels arguments més elementals que farem servir són purament geomètrics, però molt aviat ens trobarem fent raonaments propis de l'àlgebra tradicional (resolució de sistemes d'equacions) i de l'anàlisi (convergència de successions). No deixa de ser sorprenent el fet que, en tractar de respondre una pregunta natural, de seguida sorgeixin noves preguntes i noves idees de la teoria de nombres elemental. Aquesta pregunta

* Traducció de JAUME SOLER.

natural és la següent: per a quins valors de s podem construir, mitjançant una aplicació directa del procediment que haurem donat, un polígon regular de s costats (un s -gon)?

Hi ha un tret típic del desenvolupament natural de les matemàtiques que, en arribar a aquest punt, es veurà reflectit en l'activitat que estem duent a terme, però que els estudiants que segueixen un programa tradicional no arriben a veure mai, per raons òbvies. Al principi, la teoria de nombres es desenvolupà per tal de donar resposta a les preguntes que plantegen els procediments geomètrics. Però aleshores sorgeixen qüestions noves que no provenen de la situació geomètrica concreta sinó del propi desenvolupament de la teoria de nombres. Aquests nous resultats no responen ells mateixos una pregunta geomètrica, però mai no s'haurien arribat a formular sense els fonaments geomètrics de la teoria. No hem tingut cap dubte a presentar exemples concrets d'aquest procés, procurant atraure-hi l'atenció del lector sempre que es dona aquesta circumstància.

Aquest article està dividit en quatre seccions. La secció 1 està dedicada a donar els fonaments geomètrics, en la doble vessant matemàtica i històrica, i a descriure un algorisme geomètric de naturalesa eminentment pràctica que ens permet de construir s -gons regulars per a alguns valors de s . La teoria de nombres comença a la secció 2, on caracteritzarem amb precisió els nombres s per als quals el nostre procediment senzill de la secció 1 funciona. També donarem una mostra (una mostra modesta, òbviament) de resultats completament nous de la teoria de nombres, que començaran a sortir a partir de les idees a les quals les qüestions geomètriques ens hauran conduït. En aquesta secció no donarem gaires demostracions explícites (per tal de no allargar massa l'article). Els lectors que vulguin veure les demostracions les poden trobar a [4].

A la secció 3 veurem de quina manera una extensió natural del procediment explicat a la secció 1 ens permet construir polígons regulars (inclosos els estrellats) de qualsevol nombre de costats. Mentre anem desenvolupant aquest procediment universal ens veurem portats a inventar un objecte anomenat *símbol*, que no és res més que un procediment comptable per tal de conservar un registre del mètode seguit i dels diferents polígons estrellats que aquest procediment ens permet construir.¹ Ens trobarem amb la sorpresa, però, que aquest símbol proporciona de manera real un algorisme per resoldre un problema clàssic de la teoria de nombres, concretament el de trobar el quasiordre de $2 \bmod b$, per a qualsevol senar b . Això vol dir que el símbol indica quin és el menor enter positiu k tal que $2^k \equiv \pm 1 \pmod{b}$, i també diu si cal prendre $+1$ o -1 . És realment extraordinari que un «procediment comptable» que descriu una construcció geomètrica acabi essent la resposta a una pregunta clàssica de la teoria de nombres!

Tot això està descrit en detall a la secció 4, però a partir d'un plantejament general, a fi que el lector que vulgui assaborir al màxim la matemàtica que hi ha implicada ho pugui fer. La generalització consisteix a reemplaçar el número 2 del qual hem parlat (perquè estem *bisecant* angles a base de doblegar paper) per un enter $t \geq 2$ arbitrari. De fet, aquesta mateixa generalització ja s'haurà fet a la secció 2. A la secció 4 donarem les demostracions amb detall, per als lectors interessats de debò a entendre la part tècnica. Suposem, però, que molts lectors ja estaran satis-

¹ Al final de la secció 2 veurem un mètode que ens permetrà construir tots els polígons convexos aplicant un segon procediment després d'aquest primer. El mètode, però, no és del tot pràctic i no ens ajuda a construir polígons estrellats.

fets a entendre el significat dels resultats i a ser capaços d'escriure símbols per tal de comprovar la veracitat de les afirmacions que fem i de comprovar que realment n'entenen el significat. Aquesta altra possible lectura del nostre material també ens complau.

Els autors volen agrair als professors de matemàtiques catalans per haver-los convidat a presentar aquest material en forma de conferència i per haver-los encoratjat a fer-ne una versió escrita. Es poden trobar versions elementals de les idees presentades aquí a [2, 3].

1 Procediments bàsics de plegat i l'algorisme DIT

És ben sabut que els grecs estaven fascinats pel desafiament que representava la construcció de polígons regulars, és a dir, aquells que tenen tots els costats de la mateixa longitud i tots els angles iguals. Per referir-nos a un polígon regular de N costats direm simplement, de vegades, N -gon. Els grecs volien construir aquests polígons utilitzant el que ara anomenem una *construcció euclidiana*, o sigui, fent servir únicament un regle sense marques i un compàs. Els grecs (ca. 350 aC) van tenir èxit a l'hora de pensar una construcció euclidiana per a un N -gon en el qual

$$N = 2^c N_0, \quad \text{amb } N_0 = 1, 3, 5, \text{ o } 15 \quad \text{i} \quad c \geq 0.$$

Naturalment, cal que $N \geq 3$ per tal que el polígon existeixi!

Fins aquí és on van arribar els grecs amb les seves construccions i, de fet, no sembla que ningú altre hi fes gaire progrés fins dos mil anys més tard, quan Gauss va deixar totalment resolta la qüestió de fons del problema original. Gauss va demostrar que una construcció euclidiana per al N -gon regular és possible *si i només si* el nombre de costats N és de la forma $N = 2^c \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_k$, on $c \geq 0$ i els ρ_i són primers de Fermat diferents (nombres primers de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$).

El descobriment de Gauss va ser remarcable i indica exactament quins N -gons admeten una construcció euclidiana *en el supòsit que sapiguem quins nombres de Fermat F_n són primers*. Euler (1707-1783) va demostrar que $F_5 = 2^{2^5} + 1$ no és primer i, de fet, fins a l'actualitat s'han identificat molts nombres de Fermat compostos, però els únics primers de Fermat coneguts són

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tenim doncs, fins i tot després de la contribució de Gauss, que només existeix una construcció euclidiana d'un polígon regular de N costats per a un nombre finit de valors de N , i fins i tot per a aquests valors no sempre coneixem una construcció explícita.

Malgrat el nostre coneixement de l'obra de Gauss i malgrat que disposem d'ordinadors que poden construir fàcilment aquests polígons regulars en aquest estat que anomenem realitat virtual, ens agradaria saber com ho hem de fer per tal de construir nosaltres mateixos, amb les nostres mans, utilitzant materials fàcilment obtenibles del món real, *tots* els N -gons regulars.

En aquest article mostrarem que, si es redefineix lleugerament el problema original formulat pels grecs, podem ser capaços, en principi, de construir un polígon que sigui una aproximació tan bona com vulguem al N -gon regular, per a qualsevol N

donat. És més, tot això es pot fer a còpia de doblegar paper amb un procediment sistemàtic i explícit que descriurem en detall i que només depèn, com caldria esperar, del valor particular de N .

Potser aquí s'hauria de dir alguna cosa sobre aquest mètode de construcció. Afirmem que, a la pràctica, les aproximacions que obtenim doblegant paper són ben bé tan precises com les del *món real* fetes amb regla i compàs, perquè aquestes darreres només són perfectes en un sentit ideal. En els dos casos el resultat, en el món real, depèn de l'habilitat manual, però el nostre procediment, a diferència del procediment euclidià, és molt permissiu, en el sentit que tendeix a *reduir* els efectes de l'error humà (i, per a molta gent, és més fàcil bisecar un angle doblegant paper que fent servir un regla i un compàs).²

Ara començarem a doblegar paper. Resulta, ja ho veureu, que això ens porta de manera natural a algunes preguntes interessants de la teoria de nombres, que d'aquesta manera tindrà la seva gènesi en l'activitat de doblegar paper que estem a punt d'iniciar.

Primer de tot exposarem un procediment fonamental i precís per doblegar paper, que requereix una banda o tira de paper de vores paral·leles (és adequat el paper que fan servir les calculadores de sobretaula i també les tires de paper engomat —les que no tenen cap reforç especial). Aquest procediment farà que la vora superior de la tira de paper prengui la forma d'un polígon regular.

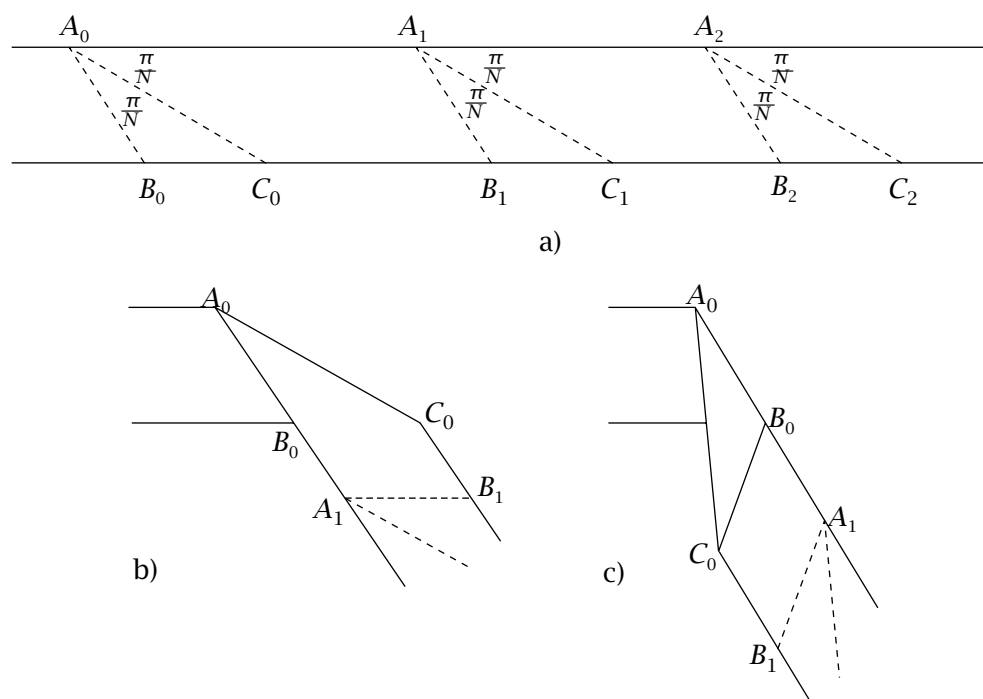


FIGURA 1

De moment suposarem que tenim una tira recta que té *dobles* o *sécs* al llarg de línies que surten de certs vèrtexs de la vora superior de la tira. Suposem a més que

² Fins i tot quan les figures geomètriques es dibuixen amb ordinador, l'exactitud depèn tant de la precisió del càlcul que ha fet l'ordinador com de la resolució de la impressora.

en aquests vèrtexs, etiquetats A_n , $n = 0, 1, \dots$, els sècs formen angles iguals de $\frac{\pi}{N}$ amb la vora superior (tal com mostra la figura 1 a)). Suposem a més que els vèrtexs estan uniformement espaiats. Si *dobleguem* aquesta tira per la línia marcada $A_n C_n$, tal com mostra la figura 1 b) (amb $n = 0$), i a continuació tornem a doblegar sobre la línia marcada $A_n B_n$, tal com mostra la figura 1 b) (fent, doncs, una *torsió* de la cinta sobre ella mateixa), la direcció de la *vora superior* haurà girat un angle $\frac{2\pi}{N}$. Aquest procés de *doblegar i torçar*, l'anomenem *algorisme DIT*.

Observem ara que si apliquem l'algorisme DIT a una successió de N vèrtexs A_n , per $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, aleshores la vora superior de la tira haurà girat un angle 2π , de manera que el punt A_N haurà anat a parar damunt del punt A_0 . Per tant, la vora superior formarà un N -gon regular! La figura 2 il·lustra una part del N -gon obtingut amb l'aplicació de l'algorisme DIT.

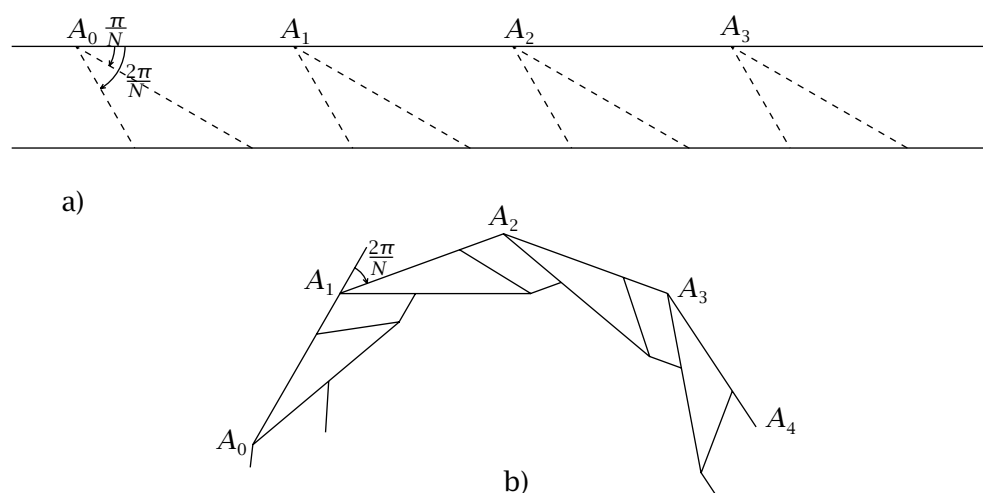


FIGURA 2

Un exercici interessant per als estudiants és el de practicar l'algorisme DIT per construir un octògon regular convex.³ La figura 3 a) mostra una tira de paper recta sobre la qual les línies de punts indiquen sècs teòricament exactes. De fet, aquests sècs surten de punts uniformement espaiats al llarg de la vora superior de la cinta, de manera que els angles a l'extrem superior de cada línia vertical són (d'esquerra a dreta) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$. Intentar esbrinar de quina manera cal doblegar una tira de paper per obtenir aquestes línies hauria de ser un exercici interessant per a qualsevol estudiant que hagi fet una assignatura de geometria plana (les instruccions completes pas a pas es poden trobar a [1]). El que ens interessa ara és observar que aquesta cinta té, a intervals uniformement espaiats al llarg de la vora superior, angles adjacents cada un dels quals és de $\frac{\pi}{8}$, i per tant podem aplicar l'algorisme DIT a vuit vèrtexs consecutius al llarg de la cinta i arribar a l'octògon regular que mostra la figura 3 b). (Naturalment, a l'hora de construir el model cal tallar la cinta a la primera línia vertical i enganxar un tros del final amb el principi per tal de formar un polígon regular tancat.)

³ La idea aquí és la de fer pràctiques plegant paper i aplicant l'algorisme DIT, atès que molt probablement la construcció euclidiana de l'octògon regular us serà coneguda.

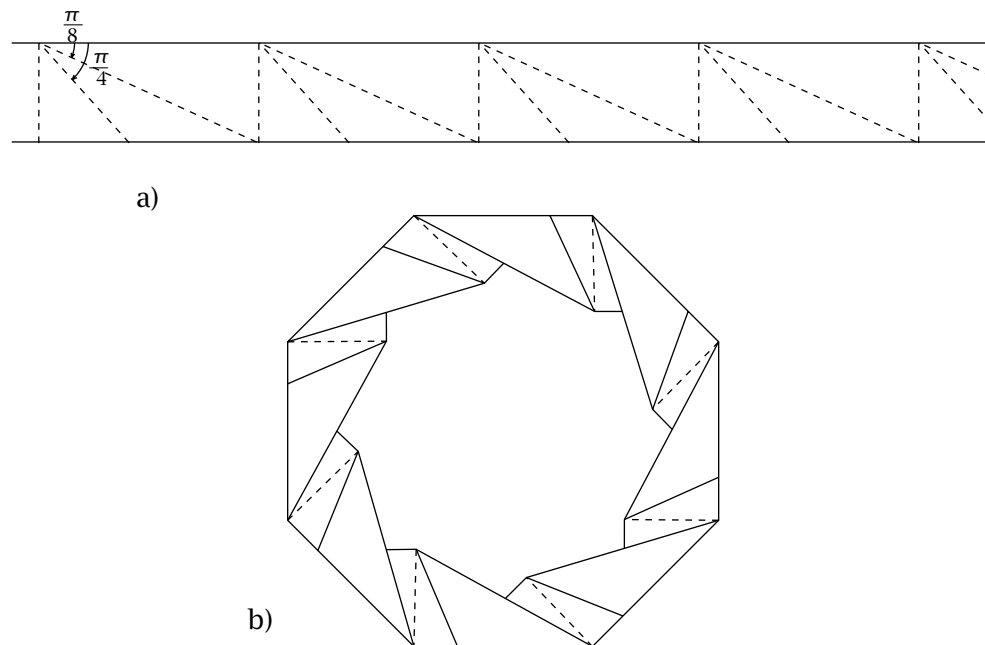


FIGURA 3

Observeu que la cinta de la figura 3 a) també té sècs adequats per construir un quadrat mitjançant l'algorisme DIT. Deixem això com a exercici per qui ho vulgui fer i passem a una construcció més interessant.

Com que el primer polígon regular per al qual no disposem d'una construcció euclidiana és l'heptàgon, hi ha una dificultat real a l'hora d'aconseguir un séc que formi un angle de $\frac{\pi}{7}$ amb la vora superior de la cinta. El que farem és adoptar una norma general, sobre la qual direm més coses al final de tot, que anomenem *estratègia optimista*. Exposarem la idea tot seguit, utilitzant la figura 4 per ensenyar pas a pas la sèrie de plecs adequada. Suposem que «podem» fer un séc en un angle de $\frac{2\pi}{7}$ amb la vora superior de la cinta, tal com indica la figura 4 (part 3). Aleshores és ben senzill doblegar la vora superior cap avall per tal de bisecar aquest angle, i amb això s'obtenen els dos angles de $\frac{\pi}{7}$ a la vora superior, tal com es veu a la figura 4 (part 5). (Direm que $\frac{\pi}{7}$ és l'angle «suposat» d'aquesta cinta.) Aleshores, com que ja ens està bé aquest angle, anem a la vora inferior de la cinta i observem que l'angle a la dreta del darrer séc és $\frac{6\pi}{7}$, i decidim que sempre evitarem deixar un múltiple parell de π en el numerador del primer angle a partir de la vora de la cinta, de manera que bisequem aquest angle de $\frac{6\pi}{7}$, portant la vora inferior cap amunt per fer-la coincidir amb l'últim séc, tal com mostra la figura 4 (part 6). Acordem de fer-ho així (perquè ja ens està bé un múltiple senar de π en el numerador) i anem a la part superior de la cinta on observem que l'angle a la dreta del darrer séc és $\frac{4\pi}{7}$, i, com que hem decidit que no deixàvem múltiples senars de π a cap angle que tingués un costat sobre una vora de la cinta, ens veiem obligats a bisecar aquest angle dues vegades, doblegant cap avall, tal com es veu a la figura 4 (parts 8, 9, 10), i així obtenim el conjunt de sècs de la figura 4 (part 11). Però ara veiem que ha succeït alguna cosa miraculosa! Si haguéssim començat realment amb un angle de $\frac{2\pi}{7}$, i si ara continuéssim fent sècs a

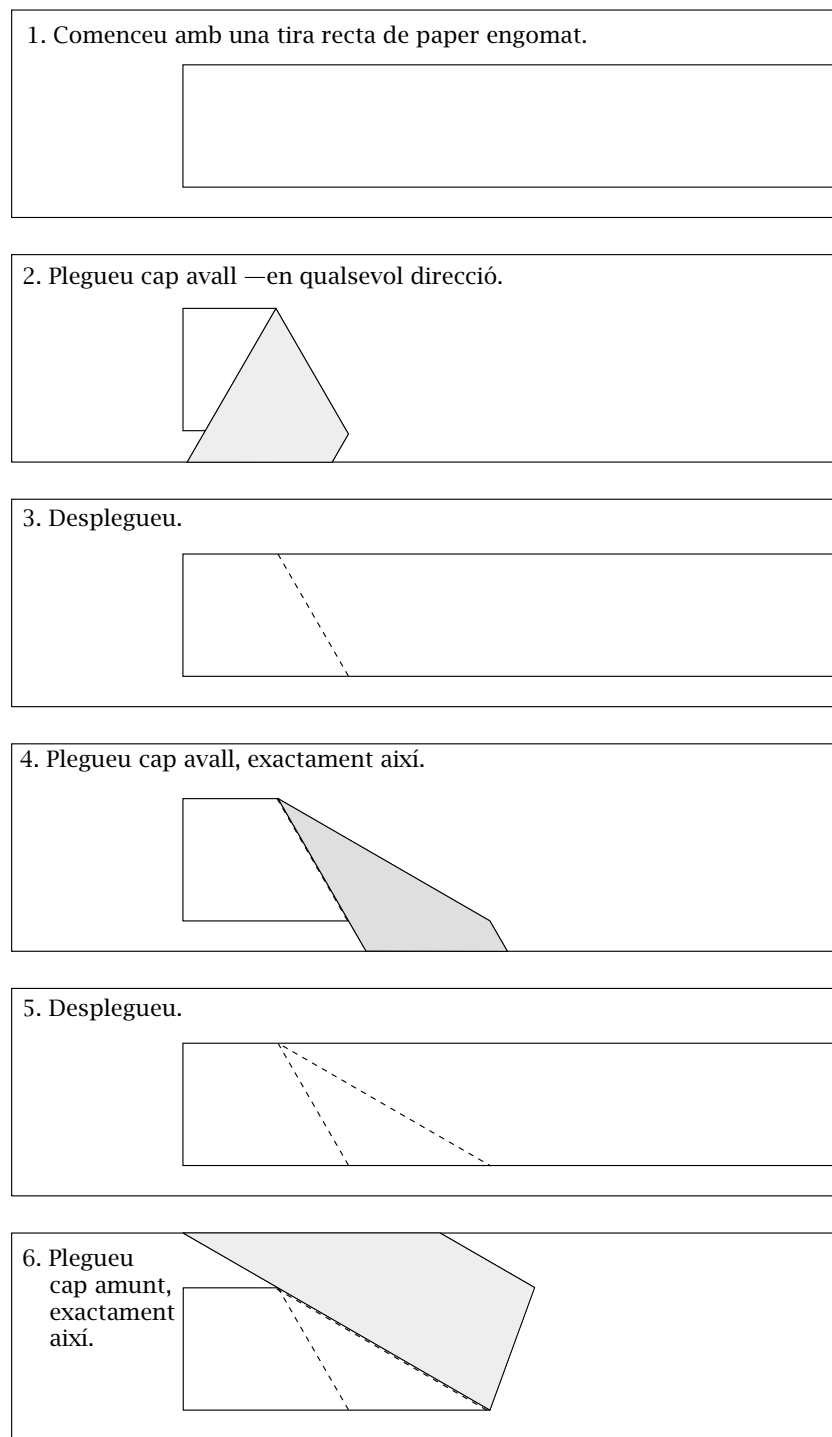


FIGURA 4

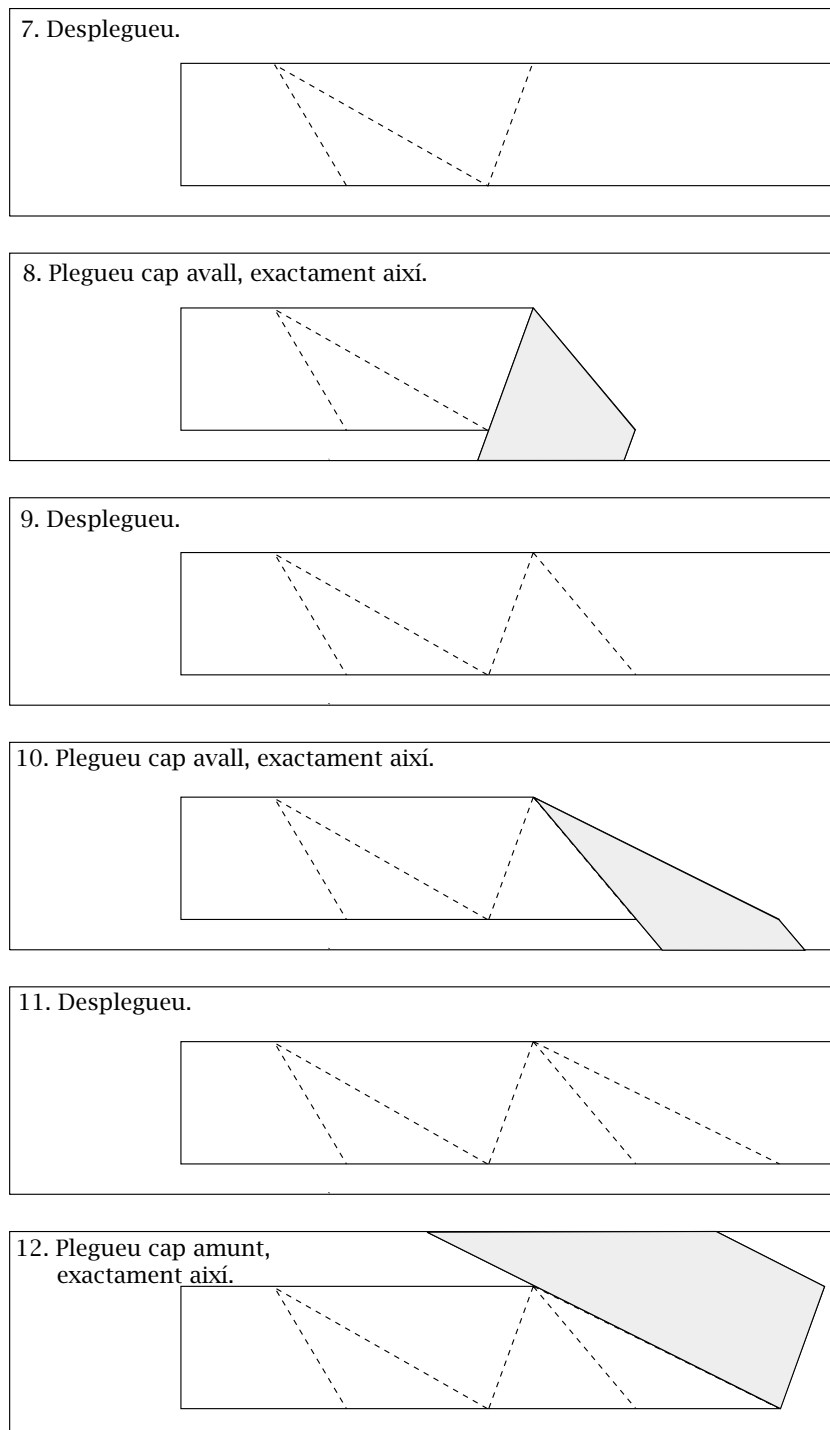


FIGURA 4

còpia de doblegar la cinta des de la vora superior cap avall dues vegades i des de la vora inferior cap amunt una vegada, repetint aquest procés diverses vegades, obtenim precisament el que volem, és a dir, parells d'angles adjacents de $\frac{\pi}{7}$ a punts uniformement espaiats sobre la vora superior de la cinta. Aquest procés de doblegar la cinta l'anomenarem *procediment de plegat* D^2U^1 (o simplement procediment $(2, 1)$), i direm que la tira de paper amb aquests sècs és una *tira o cinta de tipus* D^2U^1 (o simplement de tipus $(2, 1)$).

Suggerim que, abans de seguir llegint, agafeu un tros de paper i doblegueu un angle agut, que direm que és una aproximació de $\frac{2\pi}{7}$. Aleshores doblegueu aproximadament 40 triangles utilitzant el procediment D^2U^1 , elimineu els 10 primers triangles, i proveu de construir amb l'algorisme DIT l'heptàgon regular de la figura 5 b). Potser després d'això podeu creure que el procediment D^2U^1 proporciona angles que s'aproximen als valors de la figura 5 a). Però, com podem demostrar que el procediment convergeix? Admetem, abans de res, que el primer angle doblegat des de la part superior de la cinta, tal com es veu a la figura 4 (part 3), pot no ser exactament $\frac{2\pi}{7}$. La bisecció que forma el nou séc faria que els dos angles més propers a la vora superior (vegeu la figura 4 —part 5—) fossin només aproximadament $\frac{\pi}{7}$. Diguem que aquests angles valen $\frac{\pi}{7} + \epsilon$ (on ϵ pot ser positiu o negatiu).⁴ Per tant, l'angle a la dreta d'aquest séc, a la part inferior de la cinta, seria de $\frac{6\pi}{7} - \epsilon$. Quan dobleguem cap amunt i bisequem aquest angle, els dos angles aguts que surten, els més propers a la vora inferior de la cinta a la figura 4 (part 7), serien de $\frac{3\pi}{7} - \epsilon/2$, i això faria que l'angle de la dreta d'aquest séc, a la part superior de la cinta, fos de $\frac{4\pi}{7} + \epsilon/2$. Quan bisequem dues vegades (doblegant cap avall) aquest darrer angle, els dos angles aguts més propers a la vora superior de la cinta mesuraran $\frac{\pi}{7} + \epsilon/2^3$, tal com mostra la figura 4 (part 11). Això hauria de deixar clar que cada vegada que repetim un doblec D^2U^1 sobre la cinta l'error es redueix per un factor de 2^3 .

En aquest punt hauria de ser evident el resultat de l'*estratègia optimista*. Suposant que tenim un angle que, en biseccar-lo, dóna un angle de $\frac{\pi}{7}$ a la vora superior de la cinta que ens permet començar el procés, i continuant després amb el procediment, obtenim el que volíem: una successió d'angles a la vora de dalt que s'aproximen cada vegada més a $\frac{\pi}{7}$ a mesura que anem doblegant.

Ara podeu provar de començar el procés de la figura 4 i repetir les parts de la 7 a la 12 fins que veieu que el patró de línies a la cinta es va fent cada vegada més regular. Aleshores tallem el principi de la cinta (diguem els 8 primers triangles) i en fem servir la resta per construir amb l'algorisme DIT l'heptàgon regular que es veu a la figura 5 b).

És natural preguntar-se què passaria si apliquéssim l'algorisme DIT en els sècs que formen angles de $\frac{2\pi}{7}$ i $\frac{3\pi}{7}$, respectivament, amb la vora superior d'una cinta de tipus D^2U^1 (si l'angle requerit està a la vora inferior de la cinta, com ara el de $\frac{3\pi}{7}$, senzillament gireu la cinta a fi que l'angle en qüestió aparegui a la vora superior). Les figures 5 c) i d) mostren el resultat d'aplicar l'algorisme DIT sobre tots i cada un dels vèrtexs possibles sobre la vora superior de tal manera que, a c), la figura que s'obté es pot entreteixir d'una manera més simètrica i, a d), la part que sobra es pot doblegar netament al voltant de les puntes. Aquests dos últims polígons tenen la característica que la vora de dalt haurà visitat de dos en dos o de tres en tres els vèrtexs de l'heptàgon regular.

⁴ Pot ser una bona ajuda per seguir el raonament si es van anotant sobre la figura 4 els valors dels angles a mesura que es llegeix el paràgraf.

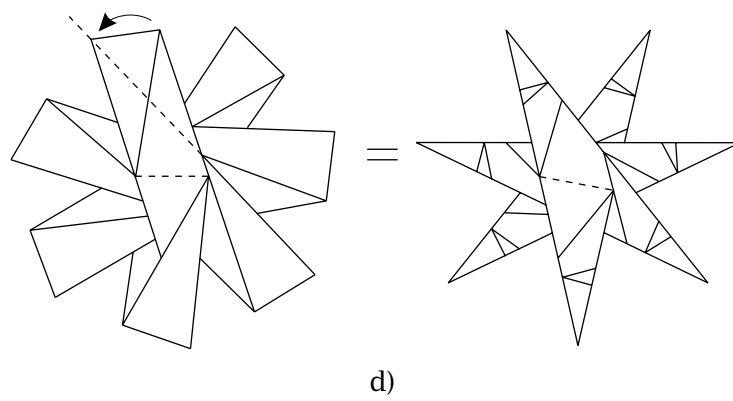
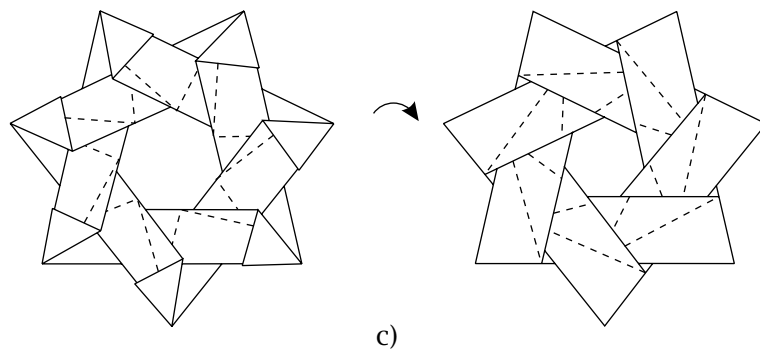
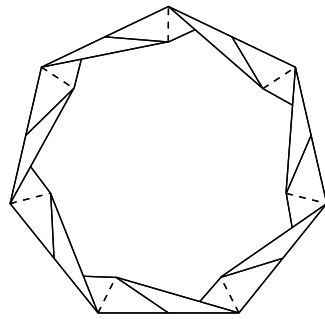
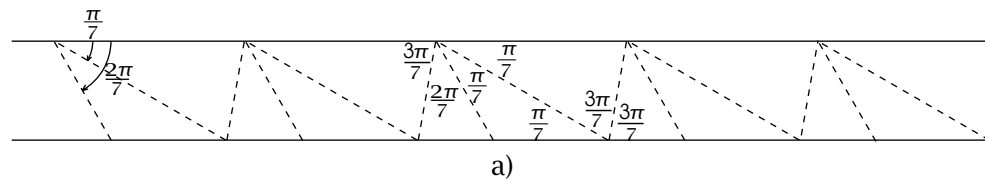


FIGURA 5

Aquests polígons s'anomenen generalment *polígons regulars estrellats*. Per tal de ser coherents amb l'ús que fem de la terminologia « N -gon», adaptarem la notació de Coxeter (vegeu [1]) per a polígons estrellats, de manera que quan parlem d'un $\left\{\frac{b}{a}\right\}$ -gon *regular estrellat* volem dir una successió connexa de costats que visita de a en a els vèrtexs d'un b -gon regular convex. Per tant, el N -gon n'és un cas particular: és un $\left\{\frac{N}{1}\right\}$ -gon. (Quan pensem en un polígon convex d'aquesta manera es podria ben bé fer servir una lletra minúscula en comptes de N .)

Observeu que també podem fer servir la cinta, després d'afegir-hi línies secundàries adients, per construir polígons de 14, 28 i 56 costats o, en general, de $2^n 7$ costats. Per exemple, per tal de fer que la cinta D^2U^1 sigui adient per construir polígons de 14 costats, tot el que cal fer és bisecar, mitjançant doblecs, 14 angles consecutius que ja formin un angle de $\frac{\pi}{7}$ amb la vora superior de la cinta i després aplicar l'algorisme DIT a aquests 14 vèrtexs consecutius. Per obtenir polígons de 28 costats hauríem de repetir el procés de marcar les línies secundàries amb la cinta que ja té uns sècs que formen angles de $\frac{\pi}{14}$ amb la vora de dalt.

Ara que ja hem vist com es construeixen polígons de $2^n 7$ costats a partir d'una cinta que servia per construir un heptàgon, ens adonem que el nostre problema queda reduït a pensar com ho hem de fer per construir N -gons amb N senar.

És natural que un es preguntï per a quins valors de N hi ha un algorisme com ara el dels heptàgons. Discutirem aquesta qüestió a la propera secció.

Tanmateix, abans de seguir, ens agradaria suggerir una activitat d'aula que ens ha resultat molt eficaç per estimular l'interès dels estudiants per la geometria. Es tracta de dir als estudiants que portin a terme els experiments de doblgar paper següents, que involucren procediments⁵ de *període 1*. Els resultats d'aquests experiments estan exposats a l'apèndix.

EXPERIMENT 1: Preneu una tira de paper i doblegueu-la seguint un procediment D^1U^1 ; és a dir, bisequeu, només un cop, l'angle que apareix a la part de dalt, després l'angle de la part de baix, i repetiu-ho. Això hauria de produir una successió de triangles equilàters. Mireu si podeu construir un triangle DIT amb aquesta cinta aplicant l'algorisme a punts uniformement espaiats (i prou separats) de la vora de dalt.

EXPERIMENT 2: Preneu una tira de paper i doblegueu-la seguint el procediment D^2U^2 ; és a dir, bisequeu *dues vegades* l'angle de la vora superior, després el de la vora inferior i repetiu el procediment. Talleu els 10 primers triangles i experimenteu amb la resta de la tira de paper. Per exemple, podeu provar de doblgar-la seguint només les línies curtes, o seguint només les llargues. També podeu mirar de fabricar un polígon DIT utilitzant l'angle més petit de la tira, és a dir, l'angle entre la línia més llarga i la vora de la tira. El nombre de costats en el polígon us indica quina és la mida de l'angle més petit de la cinta.

EXPERIMENT 3: A partir dels resultats dels experiments 2 i 3, intenteu conjecturar quin serà el resultat d'aquest experiment. Preneu una tira de paper i plegueu-la seguint el procediment D^3U^3 . Es tracta, doncs, de bisecar tres vegades l'angle que apareix a la part superior i després el de la part inferior. Talleu els 10 primers triangles i feu proves amb la resta de la cinta. Per exemple, intenteu doblgar-la només per les línies curtes, o només per les mitjanes, o només per les llargues. Proveu també

⁵ L'heptàgon convex ha estat construït amb un procediment de *període 2*, és a dir, un procediment (m, n) amb $m \neq n$. Si $m = n$, parlarem d'un procediment de plegat de *període 1*.

de construir un polígon DIT utilitzant l'angle més petit de la cinta, és a dir, l'angle entre el doblec més llarg i la vora de la cinta. El nombre de costats del polígon us indica la mida de l'angle més petit de la cinta. Era correcta la vostra conjectura?

2 Teoria de nombres de període 2

A la secció 1 s'ha explicat una construcció bàsica que consistia a doblegar m vegades a la part superior de la cinta i n vegades a la part inferior (vegeu la figura 5). De fet, només s'han discutit els casos especials

$$(m, n) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1),$$

però ja es veu que podríem haver fet la mateixa construcció amb dos enters qualssevol m i n . Es discutirà ara el que passa en el cas general.

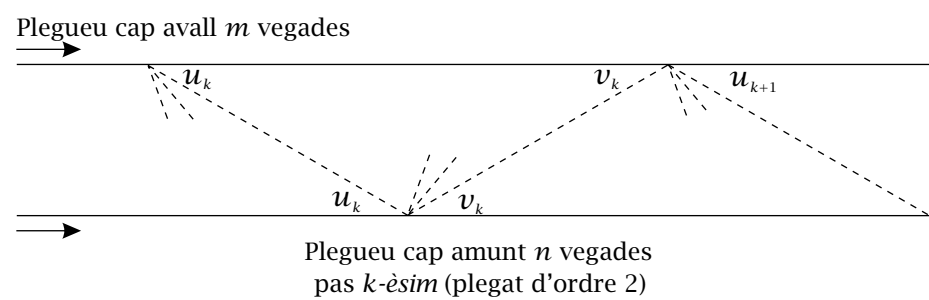


FIGURA 6

Suposem que l'angle que hi ha a la vora superior de la cinta, en el pas k -èsim, és u_k , i que l'angle a la vora inferior és v_k (vegeu la figura 6). Sumant els angles obtenim, a la part inferior, en el pas k -èsim,

$$u_k + 2^n v_k = \pi$$

i a la part superior, en el pas $(k+1)$ -èsim,

$$v_k + 2^m u_{k+1} = \pi,$$

d'on deduïm

$$u_k + 2^n (\pi - 2^m u_{k+1}) = \pi,$$

és a dir,

$$2^{m+n} u_{k+1} - u_k = (2^n - 1)\pi. \quad (1)$$

Els angles que trobem a la part superior de la cinta,

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots,$$

estàn relacionats per (1) i ens preguntem com es comporten aquests angles quan k es fa gran. (A la secció 1 ja s'ha vist el que passa en els casos $m = 2$, $n = 1$, però la veritat és que allò no era un cas molt interessant.)

Per tal de respondre la pregunta, farem el problema encara més general. Suposem que els números $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots$ estan relacionats mitjançant

$$au_{k+1} = u_k + b, \quad \text{amb } a > 1. \quad (2)$$

Demostrarem que en aquest cas u_k es va aproximant a \bar{u} , que és la solució de l'equació

$$au = u + b, \quad (3)$$

és a dir,

$$\bar{u} = \frac{b}{a-1}. \quad (4)$$

Efectivament, posem $e_k = u_k - \bar{u}$. Aleshores $u_k = e_k + \bar{u}$, de manera que (2) esdevé

$$a(e_{k+1} + \bar{u}) = (e_k + \bar{u}) + b,$$

d'on resulta

$$ae_{k+1} = e_k, \quad \text{atès que } a\bar{u} = \bar{u} + b. \quad (5)$$

Per tant, com es comporta la successió $e_0, e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots$? Tenim

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{a}e_0, \\ e_2 &= \frac{1}{a}e_1 = \frac{1}{a^2}e_0, \\ e_3 &= \frac{1}{a}e_2 = \frac{1}{a^3}e_0, \end{aligned}$$

i, en general,

$$e_k = \frac{1}{a^k}e_0.$$

Tanmateix, com que $a > 1$, resulta que $\frac{1}{a^k}$ tendeix a zero a mesura que k augmenta, de manera que e_k (l'error en el pas k -èsim) tendeix a zero quan k tendeix a infinit. Per tant, u_k tendeix a $\bar{u} = \frac{b}{a-1}$. Per al procediment de doblgar paper és important que el valor de \bar{u} sigui totalment independent de l'error inicial e_0 . El valor de \bar{u} es pot calcular amb l'artifici, molt suggerent, d'ignorar els subíndexs de les u . Ara, tornant a (1), veiem que l'angle u_k a la vora superior de la cinta tendeix a

$$\bar{u} = \frac{2^n - 1}{2^{m+n} - 1} \pi.$$

Cal observar que tot coincideix amb el que s'havia vist a la secció 1 en el cas $m = 2$, $n = 1$, que correspon a $\bar{u} = \frac{\pi}{7}$.

Suposem ara (com és el cas quan $m = 2$, $n = 1$) que, per casualitat, $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ és un enter s . Aleshores, utilitzant el procediment de plegat (m, n) , i a continuació l'algorisme DIT, podem construir un polígon regular de s costats. Per tant, sorgeixen les següents preguntes fonamentals:

PREGUNTA 1: Quan és que $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ és enter?

PREGUNTA 2: Com podem saber que un enter donat s és de la forma $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$?

PREGUNTA 3: Si un enter s és d'aquesta forma, com trobem m i n en funció de s ?

A continuació donarem la resposta a aquestes preguntes i, de fet, fins i tot desenvoluparem més aquestes idees matemàtiques abans que acabi aquesta secció. Amb una mica d'àlgebra elemental es veu que si $n = m$, aleshores $s = \frac{2^{2n}-1}{2^n-1} = 2^n + 1$. Per tant (potser ja ho havíeu endevinat després dels tres experiments del final de la primera part), el procediment $D^n U^n$ (vegeu la figura 7) proporciona una cinta en la qual l'angle més petit u_k tendeix a $\frac{\pi}{2^n+1}$. El fet que es pugui fer servir per construir polígons regulars de $2^n + 1$ costats no solament mitjançant l'algorisme DIT, sino també doblgant per sècs consecutius de la mateixa longitud (i hi ha n longituds diferents per escollir), és una característica molt particular d'aquesta cinta.

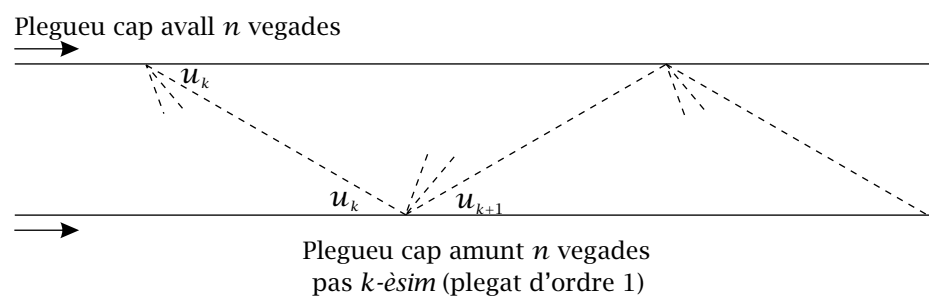


FIGURA 7

Anomenarem *nombre de plegat* a qualsevol enter de la forma $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$, amb m i n enters positius.⁶ Si s és d'aquesta forma sabem, tal com hem vist a la introducció, que el procediment (m, n) i l'algorisme DIT ens permeten construir un polígon regular de s costats.

Tanmateix, des del punt de vista de la teoria de nombres, hi ha un detall a les tres preguntes que fem abans que introdueix una restricció, irrellevant per als nostres propòsits: el paper especial del número 2. Això és així perquè, de manera natural i lògica, ens hem restringit a *bisecar* angles a base de doblegar paper. Ara, les preguntes aritmètiques que fem també tenen sentit (i no haurien de ser més difícils de contestar) si reemplacem el 2 per un enter positiu qualsevol $t \geq 2$. Per tant, estem pensant en enters s de la forma

$$s = \frac{t^{m+n} - 1}{t^n - 1}, \text{ per a un enter } t \geq 2. \quad (6)$$

Aquests enters els anomenarem *nombres de plegat de base t*, i suprimirem la referència a la base t en el cas $t = 2$.

Una altra qüestió és que no ens interessa tenir l'expressió $(m + n)$ a (6), però, òbviament, el que estem buscant són enters s de la forma

$$\frac{t^a - 1}{t^b - 1}, \text{ on } a \text{ i } b \text{ són enters positius amb } a > b. \quad (7)$$

⁶ Observem que si $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ no és enter, el podem escriure com a fracció irreduïble $\frac{b}{a}$ i el procediment (m, n) ens permet construir un $\{\frac{b}{a}\}$ -gon estrellat.

Per tal de contestar la pregunta 1, hem d'esbrinar quan $t^b - 1$ és factor de $t^a - 1$. Amb el que sabem d'àlgebra elemental hauríem de poder dir immediatament que $t^b - 1$ divideix a $t^a - 1$ si b divideix a a . Resulta, però, que aquesta condició suficient també és necessària i, per tant, tenim el teorema següent.

1 **TEOREMA** $t^b - 1$ divideix $t^a - 1$ si i solament si b divideix a a .

De fet, un raonament força senzill demostra que el mcd (màxim comú divisor) de $t^b - 1$ i $t^a - 1$ és $t^d - 1$, on $d = \text{mcd}(a, b)$, i aleshores el teorema 1 n'és una conseqüència immediata. Observeu que la resposta a la pregunta de si $t^b - 1$ divideix a $t^a - 1$ no depèn realment del valor de t —una justificació immediata per eixamplar l'abast d'aquesta investigació aritmètica.

Anem ara a la pregunta 2. Suposarem, doncs, que estem tractant amb un enter s que és de la forma (6). Sabem pel teorema 1 que n és divisor de m . És més, tenim que $\frac{m+n}{n} \geq 2$. Atès que a l'expressió (7) b és un factor de a , preferim escriure

$$b = x, a = xy, x, y \text{ enters positius amb } y \geq 2. \quad (8)$$

Per tant, s és de la forma (7), amb a, b donats per (8). Suggerim d'escriure s en la base t . Sabem, naturalment, que aleshores l'expressió numèrica per a s és única. És molt fàcil de veure que

$$\frac{t^{xy} - 1}{t^x - 1} \stackrel{(t)}{=} \underbrace{10 \cdots 0}_{x-1} \underbrace{10 \cdots 0}_{y-1} \cdots \underbrace{10 \cdots 0}_{x-1} 1, \quad (9)$$

on $\stackrel{(t)}{=}$ vol dir que l'expressió de la dreta està escrita en base t , la part que es repeteix $10 \cdots 0$ consisteix en un 1 seguit de $(x - 1)$ zeros i hi ha y vegades la xifra 1. La taula 1 mostra uns quants valors de nombres de plegat de base 2. Pot ser interessant per al lector escriure alguns d'aquests nombres en base 2 només per veure que efectivament encaixen en el patró (9).

Així doncs, hem contestat les preguntes 2 i 3. Un enter positiu s és un nombre de plegat de base t si i solament si adquireix la forma del membre dret de (9) quan s'escriu en base t i aleshores x, y estan determinats per s . A més, m i n estan determinats per x i y mitjançant la relació

$$n = x, m + n = xy. \quad (10)$$

Exemple 1: El número 85 és un nombre de plegat? En cas afirmatiu, com construïm un polígon regular de 85 costats? Si no tinguéssim a mà la taula 1 podríem fer-ho de la manera següent. Primer s'escriu 85 en base 2 i s'obté $85 \stackrel{(2)}{=} 1010101$. Per tant és $x = 2, y = 4$, i d'aquí $n = 2, m + n = 8, m = 6$. En conseqüència, 85 és un nombre de plegat i podem construir un polígon regular de 85 costats utilitzant el procediment de plegat (6, 2) i a continuació l'algorisme DIT.

Exemple 2: El número 757 és un nombre de plegat de base 3? Tenim que $757 \stackrel{(3)}{=} 1001001$. Per tant $x = 3, y = 3$, de manera que $757 = \frac{3^9 - 1}{3^3 - 1}$.

Exemple 3: El número 13 és un nombre de plegat? En aquest cas $13 \stackrel{(2)}{=} 1101$ i per tant no ho és (no hi ha una part «que es repeteix»). És fàcil veure, però, que 13 és un nombre de plegat de base 3.

26	67708863							
25	33554431							
24	16777215							
23	8389607							
22	4194303							
21	2097151							
20	1048575							
19	524287							
18	262143							
17	131071							
16	65535							
15	32767							
14	16383							
13	8191	22369621						
12	4095	5592405						
11	2047	1398101						
10	1023	349525						
9	511	87381	19173961					
8	255	21845	2396745					
7	127	5461	299593	17895697				
6	63	1365	37449	1118481	34636833			
5	31	341	4681	69905	1082401	17043521		
4	15	85	585	4369	33825	266305	2113665	
3	7	21	73	273	1057	4161	16513	
2	3	5	9	17	33	65	129	
1	1	1	1	1	1	1	1	1
y/x	1	2	3	4	5	6	7	

4	16843009							
3	65793	26257	1049601	4196353	16781313	67117057		
2	257	513	1025	2049	4097	8193	$2^x + 1$	
1	1	1	1	1	1	1	1	1
y/x	8	9	10	11	12	13		

TAULA 1: Nombres de plegat de base 2

—el nombre a la posició (x, y) és $\frac{2^{xy}-1}{2^x-1}$.

Tot seguit es veurà una forma de construir polígons regulars de a costats en el cas que el nombre senar a no és un nombre de plegat. Això ens permetrà (vegeu l'exemple 3) construir un polígon regular de 13 costats. La solució que donem aquí no és tan elegant com la que exposarem a la part principal de la propera secció però, en canvi, és molt més fàcil d'entendre que el mètode que explicarem allà. La idea bàsica és que si amb un procediment de plegat de període 2 podem construir un polígon DIT de N costats, i a divideix a N , aleshores podem construir aquest polígon i tot seguit enganxar-lo en un full de paper i connectar els vèrtexs de N/a en N/a a fi d'obtenir finalment el polígon de a costats. Per fer-ho d'aquesta manera hem de saber si, donat un nombre senar a , podem trobar un nombre de plegat que tingui a com a divisor. També ens podem preguntar, en cas afirmatiu, com podem decidir quin nombre de plegat seria el millor per a la nostra construcció.

Per tal de contestar aquestes preguntes tornarem a treballar en base t en comptes de limitar-nos al cas $t = 2$, que estava inicialment motivat pels nostres procediments

de plegat. Reemplacem la condició que a sigui senar per la condició a és primer amb t , és a dir, $\text{mcd}(a, t) = 1$. Afirmem⁷ que, donat qualsevol x , existeix y tal que

$$a \mid \frac{t^{xy} - 1}{t^x - 1}; \quad (11)$$

de fet, el conjunt de aquests y és el conjunt de tots els múltiples d'un y_0 fonamental, que anomenarem la x -altura de a . Es pot donar una ullada a la taula 1 (nombres de plegat de base 2) per tal d'entendre la terminologia.

La nostra afirmació està basada en el fet que t és primer amb $a(t^x - 1)$, de la qual cosa es dedueix que existeix un enter positiu z_0 tal que $t^z - 1$ és divisible per $a(t^x - 1)$ si i solament si z és múltiple de z_0 . El raonament s'acaba invocant el teorema 1 segons el qual, per tal que $\frac{t^{z_0} - 1}{t^x - 1}$ sigui enter, ha de passar que $z_0 = xy_0$ per a algun y_0 .

Sigui $h = h(a)$ la 1-altura (o, simplement, l'altura) de a . Això vol dir que h és l'enter positiu més petit tal que $a \mid \frac{t^h - 1}{t - 1}$. No és difícil de veure aleshores que si $a \mid \frac{t^{xy} - 1}{t^x - 1}$, s'ha de complir $h \mid xy$. Aquest resultat condueix a la conclusió següent, potser una mica sorprenent, però que és d'interès tant per a plegadors de paper com per a teòrics dels nombres.

De fet, hi hauria dos criteris immediats per tal d'escollir el nombre de plegat de base t donat per $s = \frac{t^{xy} - 1}{t^x - 1}$, amb $a \mid s$. La gent que vol plegar paper voldria minimitzar xy , que podríem anomenar el nombre total de dobles (recordem que $n = x$, $m + n = xy$). Els matemàtics voldrien minimitzar s , a fi que el procés de passar d'un polígon regular de s costats a un de a costats fos el més senzill possible. Ara, no és en absolut obvi que aquests dos criteris portin a la mateixa elecció de s ; després de tot, sempre podem tenir dos nombres de plegat s_1, s_2 amb $s_1 > s_2$, però tals que s_1 necessita menys dobles que s_2 . Per exemple,

$$s_1 = \frac{2^5 - 1}{2^1 - 1} = 31, \quad s_2 = \frac{2^6 - 1}{2^3 - 1} = 9,$$

on $s_1 > s_2$, i en canvi el polígon regular de 31 costats requereix 5 dobles mentre que el de 9 en necessita 6.

És remarcable, però, que si ens restringim als nombres de plegat de base t que tenen a com a divisor, trobem el resultat següent.

2 TEOREMA Si $s = \frac{t^{xy} - 1}{t^x - 1}$ és el nombre de plegat més petit de base t que té a com a divisor, aleshores $h(a) = xy$.

3 COROLLARI El nombre de plegat de base t , donat per $s = \frac{t^{xy} - 1}{t^x - 1}$, que té a com a divisor és el que necessita el menor nombre de dobles, és a dir, $h(a)$.

Veiem doncs, a partir del teorema 2 i del corollari 3, que la manera més eficient d'obtenir un polígon regular de 13 costats a base de dobles de període 2 seria construir primer el polígon de 65 costats (a partir d'una cinta de tipus D^6U^6) i després unir-ne els vèrtexs de cinc en cinc. Això seria, naturalment, molt pesat de fer, perquè el procés s'hauria de repetir com a mínim 65 vegades (un mínim de 780 dobles).

Tancarem aquesta secció mencionant un teorema molt bonic de la teoria de nombres que sorgeix de tota aquesta discussió. Del teorema 2 es dedueix immediatament un resultat que convidem el lector a comprovar.

⁷ Utilitzem la notació $A \mid B$ per indicar que B és un múltiple enter de A .

4 TEOREMA Si per a algun $t \geq 2$, $\frac{t^{xy}-1}{t^x-1}$ és un divisor de $\frac{t^{x'y'}-1}{t^{x'}-1}$, aleshores xy és un divisor de $x'y'$.

El lector s'adonarà, sens dubte, que si bé el teorema 4 té alguna cosa a veure amb el plegat de paper, en el fons és un resultat pur de la teoria de nombres.

Per tal de comprovar el teorema 4, podríem prendre $t = 2$, mirar la taula 1 i mostrar primer amb exemples que $\frac{2^{xy}-1}{2^x-1}$ no és mai un divisor de $\frac{2^{x'y'}-1}{2^{x'}-1}$ si xy no és un divisor de $x'y'$. Després podríem trobar alguns exemples on $xy|x'y'$ i $\frac{2^{xy}-1}{2^x-1} \mid \frac{2^{x'y'}-1}{2^{x'}-1}$ (els exemples interessants no tenen $x = x'$). El lector ambiciós podria fins i tot considerar valors de t diferents de 2, calculant primer una taula similar a la taula 1 per a un valor particular de t (per exemple, $t = 3$).

3 Procediment general de plegat i el teorema del quasiordre en base 2

Ja sabem, després de la secció 2, que no és possible construir un polígon regular d'11 costats amb un procediment de plegat de període 2 perquè $11 \stackrel{(2)}{=} 1011$. Siguem, però, més ambiciosos encara i suposem que volem construir el $\left\{\frac{11}{3}\right\}$ -gon regular estrellat. Naturalment, tenim que $b = 11$ i $a = 3$ en la notació de la secció 2, i procedim tal com vam fer per a l'heptàgon regular: adoptem l'*estratègia optimista* (la qual cosa vol dir que *suposem* que ja tenim el que volem i aleshores el que de debò obtindrem serà una aproximació a allò que volíem arbitràriament bona, tal com demostrarem). Imaginem, per tant, que podem doblegar per un suposat angle de $\frac{3\pi}{11}$ a A_0 (vegeu la figura 8 a)) i que seguim fil per randa les mateixes instruccions utilitzades per construir l'heptàgon regular, és a dir, que seguim les regles següents:

1. Cada séc nou va cap endavant (de dreta a esquerra) sobre la tira de paper.
2. Cada séc nou biseca sempre l'angle entre l'última marca de doblec i la vora de la tira de la qual ha sortit.
3. La biseció d'angles a qualsevol vèrtex continua fins que un séc fa un angle de la forma $\frac{a'\pi}{b}$ on a' és un nombre *senar*; aleshores s'atura el procediment de plegat en aquest vèrtex i comença de nou al punt d'intersecció de l'últim séc amb l'altra vora de la cinta.

L'*estratègia optimista* funciona una vegada més, i amb aquest procediment obtenim una cinta els angles de la qual convergeixen als que mostra la figura 8 b). Podríem denotar aquest procediment de plegat per $D^1U^3D^1U^1D^3U^1$, que té una interpretació òbvia sobre la cinta: el primer exponent «1» es refereix a l'única biseció (que produeix un séc cap avall) que té lloc sobre la vora de dalt en els vèrtexs A_{6n} (per a $n = 0, 1, 2, \dots$); de manera similar, el «3» es refereix a les tres biseccions (que produeixen sécs cap amunt) que es fan a la vora de baix de la cinta en els vèrtexs A_{6n+1} ; etc. Tanmateix, com que el procediment de plegat està *duplicat* a partir de la meitat, podem abreujar la notació i escriure simplement (1, 3, 1), amb el benentès que dobleguem alternativament des de la part de dalt i des de la part de baix de la cinta, i que el nombre de biseccions és, successivament, 1, 3, 1, ... Això ho anomenem *procediment de plegat primari de període 3* o, simplement, *procediment de plegat de període 3*.

l'angle més petit a la dreta de A_n , amb $n =$	és de la forma $\frac{a}{11}\pi$ amb $a =$	i el nombre de biseccions en el proper vèrtex és	
0	3	3	
1	1	1	(12)
2	5	1	
3	3	3	
4	1	1	
5	5	1	

Podríem escriure això de forma abreujada posant

$$(b =)11 \left| \begin{array}{ccc} (a =)3 & 1 & 5 \\ & 3 & 1 & 1 \end{array} \right|. \quad (13)$$

Si haguéssim començat amb un angle suposat de $\frac{\pi}{11}$, aleshores el símbol (13) hauria pres la forma

$$(b =)11 \left| \begin{array}{ccc} (a =)1 & 5 & 3 \\ & 1 & 1 & 3 \end{array} \right|. \quad (14)$$

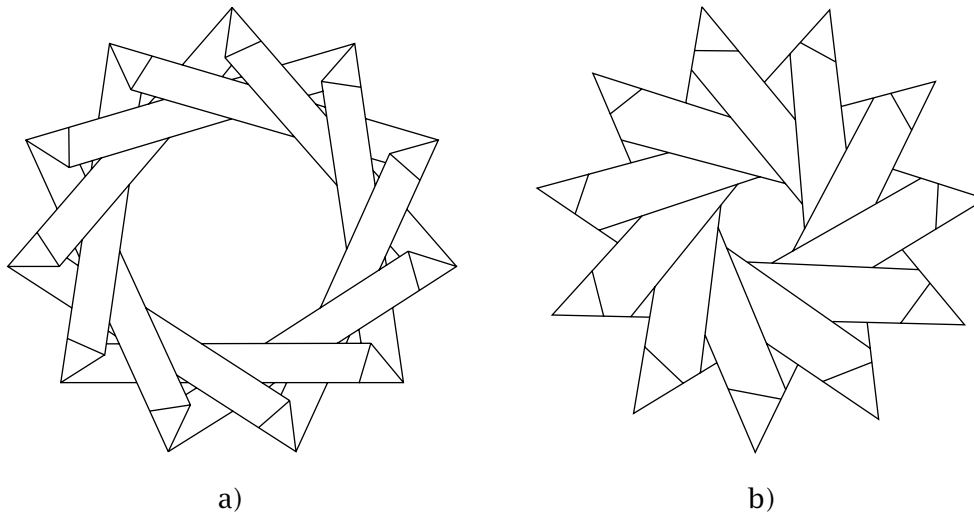


FIGURA 9

De fet, hauria d'estar clar que podem començar on vulguem (amb $a = 1, 3$ o 5) i que el símbol resultant, anàleg a (13), s'obté per permutació cíclica de la matriu, posant el valor elegit de a a la primera columna i primera fila.

a fer aquesta distinció.

En general, suposem que volem construir un $\{\frac{b}{a}\}$ -gon, amb b, a senars i $a < \frac{b}{2}$. Aleshores hauríem d'escriure el símbol⁹ següent:

$$b \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{vmatrix}, \quad (15)$$

on b, a_i ($a_1 = a$) són senars, $a_i < \frac{b}{2}$, i

$$b - a_i = 2^{k_i} a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad a_{r+1} = a_1. \quad (16)$$

Volem remarcar (es demostrarà a la secció 4) que donats dos nombres senars a i b , amb $a < \frac{b}{2}$, sempre hi ha un símbol (15) amb $a_1 = a$, i és únic. La raó és que si es compleix (16), la funció ψ donada per $\psi(a_i) = a_{i+1}$ és una permutació del conjunt S_b dels enters senars $< \frac{b}{2}$ que conserva $\text{mcd}(b, a)$. En aquest punt, no suposem que $\text{mcd}(b, a) = 1$, però sí que suposem que la llista a_1, a_2, \dots, a_r no té elements repetits. Si realment $\text{mcd}(b, a) = 1$, direm que el símbol (15) és *reduït*, i si no hi ha repeticions entre les a_i , direm que aquest símbol és *contret*. (Naturalment, és possible en teoria de considerar símbols (15) amb repeticions entre les a_i ; però cal observar que, segons (16), si es permet una repetició cal repetir tot el símbol reduït.) Utilitzarem (15) com una codificació adient per al procediment general de plegat al qual ens hem estat referint.

4 El teorema general del quasiordre

Introduïm aquí una generalització del símbol (15) que proporcionarà un algorisme per calcular, per a qualsevol enter $t \geq 2$ i qualsevol enter positiu b primer amb t , el quasiordre de $t \bmod b$, és a dir, l'enter positiu k més petit tal que $t^k \equiv \pm 1 \pmod{b}$. A més, aquest algorisme ens dirà si cal prendre -1 o $+1$ a la congruència esmentada. Si cal prendre -1 , direm que t és *bàsic mod b*; en cas contrari, t no és bàsic mod b . Òbviament, si t és bàsic, aleshores l'ordre de $t \bmod b$ és $2k$.

L'algorisme està basat en el procediment següent, que generalitza a un t arbitrari la construcció del símbol per a b (i a senar tal que $a < \frac{b}{2}$) que ja s'ha descrit a la secció 3 per al cas $t = 2$. Sigui S_b el conjunt dels enters positius a tals que (1) $t \nmid a$ i (2) $a < \frac{b}{2}$. Definim ara una permutació $\psi: S_b \rightarrow S_b$, que anomenarem *algorisme cap endavant*.

Si t és senar, es pot demostrar que existeix un únic q tal que $1 \leq q \leq \frac{t-1}{2}$ i que, o bé $t|qb + a$, o bé $t|qb - a$. Ho escriurem posant

$$t|qb + (-1)^\epsilon a, \quad \epsilon = 0 \text{ o } 1. \quad (17)$$

Aleshores posem $qb + (-1)^\epsilon a = t^k a'$, $k \geq 1$, $t \nmid a'$, i definim $\psi(a) = a'$.

Si t és parell, es pot demostrar que existeix un únic q tal que o bé $1 \leq q \leq \frac{t-2}{2}$ i $t|qb + a$, o bé $1 \leq q \leq \frac{t}{2}$ i $t|qb - a$. De nou representem aquest fet amb (17), on posarem $qb + (-1)^\epsilon a = t^k a'$, $k \geq 1$, $t \nmid a'$, i definim¹⁰ $\psi(a) = a'$.

5 TEOREMA ψ és una permutació de S_b que conserva $\text{mcd}(a, b)$.

⁹ Més exactament, el 2-símbol. Més endavant introduïrem un t -símbol general.

¹⁰ Observeu que això generalitza la construcció de ψ feta a la secció 3 en el cas $t = 2$.

DEMOSTRACIÓ: Serà suficient donar la demostració per a t senar, perquè la del cas t parell és molt similar.

Demostrem primer que ψ efectivament aplica S_b en ell mateix, és a dir, que $a' \in S_b$, on $a' = \psi(a)$. Naturalment, a' és un enter positiu tal que $t \nmid a'$, de manera que només falta demostrar que $a' < \frac{b}{2}$. Ara bé,

$$qb + (-1)^\epsilon a < \frac{t-1}{2}b + \frac{b}{2} = \frac{tb}{2} \text{ i } k \geq 1,$$

de manera que $ta' \leq t^k a' < \frac{tb}{2}$, d'on resulta $a' < \frac{b}{2}$.

A continuació observem que

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(qb + (-1)^\epsilon a, b) = \text{mcd}(t^k a', b) = \text{mcd}(a', b),$$

atès que b és primer amb t .

Només queda demostrar que ψ és una permutació. Per tal de veure-ho, introduïm l'algorisme cap enrere $\phi: S_b \rightarrow S_b$. Sigui $c \in S_b$ i sigui l maximal tal que

$$t^{l-1}c < \frac{b}{2}.$$

Naturalment, $l \geq 1$. Sabem aleshores que

$$\frac{b}{2} \leq t^l c < \frac{tb}{2}. \quad (18)$$

Fem notar que és impossible que $t^l c = \frac{mb}{2}$ amb $1 \leq m \leq t-1$, perquè aleshores tindriem $t \mid mb$, t primer amb b , $t \nmid m$, que és clarament absurd. Per tant (vegeu la figura 10) existeix un únic q a $1 \leq q \leq \frac{t-1}{2}$ tal que qb és el múltiple de b més proper a $t^l c$.

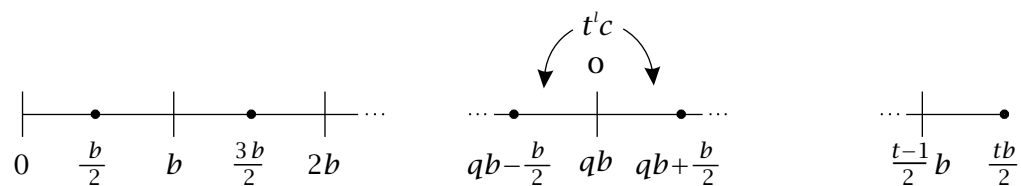


FIGURA 10: L'algorisme ϕ amb t senar.

Amb aquest q tenim $|qb - t^l c| < \frac{b}{2}$. Per tant, tenim

$$t^l c < qb, c' = qb - t^l c, t \mid qb - c',$$

o bé

$$t^l c > qb, c' = t^l c - qb, t \mid qb + c'.$$

Dit d'una altra manera, posem $c' = |qb - t^l c|$ i aleshores $c' < \frac{b}{2}$, $t \mid qb + (-1)^\epsilon c'$, $\epsilon = 0$ o 1 . Definim $\phi(c) = c'$. Clarament tenim que $t \nmid c'$, perquè si $t \mid c'$ aleshores

$t|qb$, la qual cosa és absurda (vegeu el raonament que segueix (18)). Per tant, hem demostrat que $c' \in S_b$, de manera que ϕ és realment una aplicació $S_b \rightarrow S_b$.

Sigui doncs $\phi(c) = c'$. Aleshores $t|qb + (-1)^{\epsilon} c'$ per a algun q a $1 \leq q \leq \frac{t-1}{2}$, i $qb + (-1)^{\epsilon} c' = t^l c$, $l \geq 1$, $t \nmid c$. Per (17) això implica que $\psi(c') = c$, de manera que

$$\psi\phi \text{ és la identitat sobre } S_b. \quad (19)$$

A partir de (19) deduïm que ψ aplica S_b sobre ell mateix. Però com que S_b és un conjunt finit, se segueix que ψ és una *bijecció* o *permutació* de S_b i, també de (19), que ϕ és la *permutació inversa*.¹¹ Encara més, (19) també implica que ϕ conserva $\text{mcd}(a, b)$. Ara ja estem preparats per introduir el símbol. Fixem t d'una vegada per totes. Aleshores, si b és primer amb t i $a \in S_b$, posem $a_1 = a, a_2 = \psi(a_1), \dots$. Com que ψ és una permutació, hem d'arribar a un $a_r \in S_b$ tal que $\psi(a_r) = a_1$, i ens aturem immediatament així que trobem aquesta repetició. A més, a cada etapa associem a a_i el número $\epsilon_i = 0$ o 1 tal que (vegeu (17) i la línia que la segueix)

$$q_i b + (-1)^{\epsilon_i} = t^{k_i} a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (a_{r+1} = a_1). \quad (20)$$

El nostre símbol és aleshores

$$b \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_r \end{array} \right|_t. \quad (21)$$

Comparat amb el de la secció 3, hi ha una fila de més en aquest símbol. Això és degut al fet que, per a $t = 2$, cada ϵ_i és necessàriament igual a 1. També és cert que, si volguéssim donar tota la informació sobre la construcció del símbol, hauríem d'afegir una quarta fila amb els q_i (que, per a $t = 2$, també són iguals a 1). Aquest símbol ampliat té algunes aplicacions, però l'enunciat del teorema del quasiordre no les necessita. \square

6 TEOREMA (TEOREMA GENERAL DEL QUASIORDRE) *Donat el símbol (21), posem*

$$k = \sum k_i, \quad \epsilon \equiv \sum \epsilon_i \pmod{2} \quad (\text{de manera que } \epsilon = 0 \text{ o } 1).$$

Si (21) és reduït (és a dir, $\text{mcd}(ba_i) = 1$), aleshores el quasiordre de $t \pmod{b}$ és k i, a més,

$$t^k \equiv (-1)^\epsilon \pmod{b}. \quad (22)$$

Abans de demostrar el teorema, donarem dos exemples.

Exemple 4: Siguin $t = 3, b = 7$. Aleshores, amb $a = 1$ tenim el símbol

$$7 \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right|_3.$$

¹¹ Ara es pot entendre per què hem escollit els noms *cap endavant* i *cap enrere* per a ψ i ϕ .

(Observem que, amb $t = 3$, hem de tenir $q = 1$ a (17).) El símbol està basat en les dues igualtats

$$7 - 1 = 3 \cdot 2, \quad 7 + 2 = 3^2 \cdot 1.$$

Deduïm que el quasiordre de 3 mod 7 és 3 i, a més, que

$$3^3 \equiv -1 \pmod{7}.$$

Exemple 5: Siguin $t = 4$, $b = 19$. Aleshores, amb $a_1 = 2$, tenim el símbol

$${}^{19} \left| \begin{array}{cccccc} 2 & 9 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|_4.$$

El símbol està basat en les igualtats

$$\begin{aligned} 2 \cdot 19 - 2 &= 4 \cdot 9 \\ 19 + 9 &= 4 \cdot 7 \\ 19 - 7 &= 4 \cdot 3 \\ 19 - 3 &= 4^2 \cdot 1 \\ 19 + 1 &= 4 \cdot 5 \\ 19 + 5 &= 4 \cdot 6 \\ 2 \cdot 19 - 2 &= 4^2 \cdot 2. \end{aligned}$$

Deduïm que el quasiordre de 4 mod 19 és 9 i que, a més,

$$4^9 \equiv 1 \pmod{19}.$$

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 6 És millor treballar amb l'algorisme cap enrere ϕ . Si l'algorisme cap endavant proporciona el símbol (21), aleshores l'algorisme cap enrere dona

$${}^b \left(\begin{array}{cccc} a_r & a_{r-1} & \cdots & a_1 \\ k_r & k_{r-1} & \cdots & k_1 \\ \epsilon_r & \epsilon_{r-1} & \cdots & \epsilon_1 \end{array} \right)_t. \quad (23)$$

Modifiquem el símbol invers que acabem d'escriure i posem

$${}^b \left(\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_r & c_1 \\ & l_1 & & l_2 & \cdots & & l_r \\ & \eta_1 & & \eta_2 & \cdots & & \eta_r \end{array} \right)_t, \quad (24)$$

on¹²

$$c_i = a_{r+1-i}, \quad l_i = k_{r+1-i}, \quad \eta_i = \epsilon_{r+1-i}, \quad (25)$$

¹² Podem pensar que els subíndexs estan escrits mod r per evitar notacions poc agradables.

i

$$q_i' b + (-1)^{\eta_i} c_{i+1} = t^{l_i} c_i \quad (q_i = q_{r+1-i}). \quad (26)$$

Si posem $l = \sum l_i$, $\eta \equiv \sum \eta_i \pmod{2}$, aleshores el teorema afirma que el quasiordre de $t \pmod{b}$ és l i, a més, que $t^l \equiv (-1)^\eta \pmod{b}$. Cal tenir present, naturalment, que aquest símbol és reduït, i per tant $\text{mcd}(b, c_i) = 1$.

Ara comencem la demostració seriosament. Hauria de ser evident per què hem decidit de repetir c_1 a (24). Considerem la successió

$$c_1, tc_1, \dots, t^{l_1-1} c_1, c_2, tc_2, \dots, t^{l_2-1} c_2, \dots, c_r, tc_r, \dots, t^{l_r-1} c_r, c_1; \quad (27)$$

com que $l = \sum l_i$ és evident que hi ha $l+1$ nombres a la successió, de manera que la podem escriure

$$s_1, s_2, \dots, s_{l+1}. \quad (28)$$

Veiem immediatament que $s_j < \frac{b}{2}$ per a tots els j a $1 \leq j \leq l+1$. Mirant la successió tal com està a (27), trobem que hi ha r llocs amb un canvi de $t^{l_i-1} c_i$ a c_{i+1} . Tenim, per tant —vegeu (26)—, la regla següent:

$$\begin{cases} s_{j+1} = ts_j & \text{si no hi ha canvi} \\ s_{j+1} \equiv ts_j \pmod{b} & \text{si } s_{j+1} = c_{i+1} \text{ i } \eta_i = 0 \\ s_{j+1} \equiv -ts_j \pmod{b} & \text{si } s_{j+1} = c_{i+1} \text{ i } \eta_i = 1. \end{cases} \quad (29)$$

A partir de (29) deduïm immediatament que

$$s_{l+1} \equiv (-1)^\eta t^l s_1 \pmod{b},$$

o bé que

$$c_1 \equiv (-1)^\eta t^l c_1 \pmod{b}.$$

Ara, com que c_1 és primer amb b , això significa que

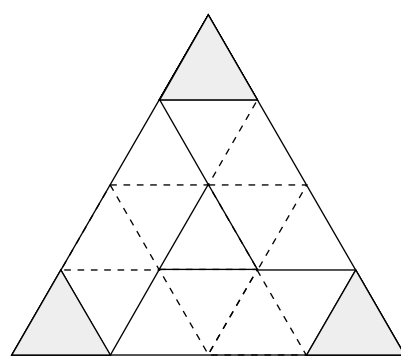
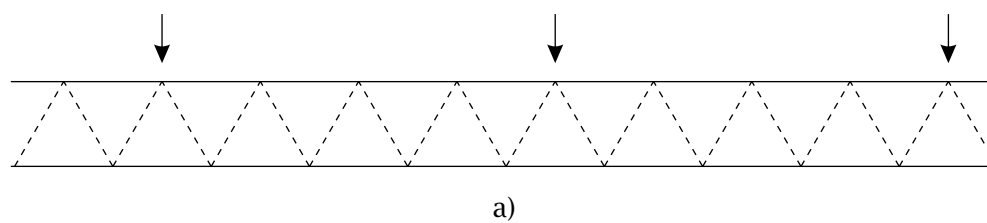
$$t^l \equiv (-1)^\eta \pmod{b}. \quad (30)$$

Queda per veure que l és realment el quasiordre. Recordem que a (21) no hi ha cap repetició entre a_1, a_2, \dots, a_r , o sigui, entre c_1, c_2, \dots, c_r a (24).

Suposem, doncs, que per a algun enter positiu $m < l$ tenim $t^m \equiv \pm 1 \pmod{b}$. A partir de (29), això implicaria que $s_{m+1} \equiv \pm s_1 \pmod{b}$. Suposem primer que $s_{m+1} \equiv -s_1 \pmod{b}$. Aleshores $b | s_{m+1} + s_1$, però això és absurd perquè $0 < s_{m+1} + s_1 < b$. Suposem, doncs, que $s_{m+1} \equiv s_1 \pmod{b}$. Com que $s_j < \frac{b}{2}$, això vol dir que $s_{m+1} = s_1 = c_1$. D'altra banda, o bé s_{m+1} és divisible per t o bé $s_{m+1} = c_i$ per a algun i a $2 \leq i \leq r$ (recordem que $2 \leq m+1 < l+1$). Però $t \nmid c_1$ i $c_i \neq c_1$ si $i \neq 1$, perquè no hi ha repeticions. Es poden rebutjar, doncs, les dues possibilitats, de manera que $t^m \not\equiv \pm 1 \pmod{b}$ si $1 \leq m < l$, i això demostra que efectivament l és el quasiordre de $t \pmod{b}$. \square

Apèndix: resultats dels experiments de doblegar paper proposats a la secció 1

EXPERIMENT 1: La figura 11 a) mostra un tros d'una cinta que s'ha plegat utilitzant el procediment D^1U^1 , després de treure uns quants triangles (diguem uns deu) del principi. Aplicant l'algorisme DIT als punts situats prop del símbol \downarrow es pot construir el triangle DIT que mostra la figura 11 b). L'ombregat en els vèrtexs dels triangles simplement indica, aquí i a d'altres llocs de les figures 12 i 13, que s'està veient la part de sota de la cinta. El triangle DIT es pot acabar enganxant la cinta per on se solapa amb el costat d'un triangle. Observem que l'angle més petit que hi ha a la cinta D^1U^1 és $\frac{\pi}{3}$.



b)
FIGURA 11

EXPERIMENT 2: La figura 12 a) mostra una part d'una cinta que s'ha plegat amb el procediment D^2U^2 , també sense els primers triangles (10 seran suficients). Noteu que aquesta cinta té línies llargues i curtes. Si la tira de 6 triangles (on s'han fet talls sobre les línies curtes) de la figura 12 a) es doblega només per les marques curtes, s'obtindrà el que podem anomenar *pentàgon curt*. La figura 12 b) mostra el que passa si es pren una tira més llarga i es doblega per les marques llargues. El polígon que en resulta és el *pentàgon llarg*. La figura 12 c) mostra el pentàgon DIT obtingut aplicant l'algorisme en vèrtexs alternats sobre un tros de la cinta molt més llarg. S'observa que l'angle més petit que ha aparegut és $\frac{\pi}{5}$.

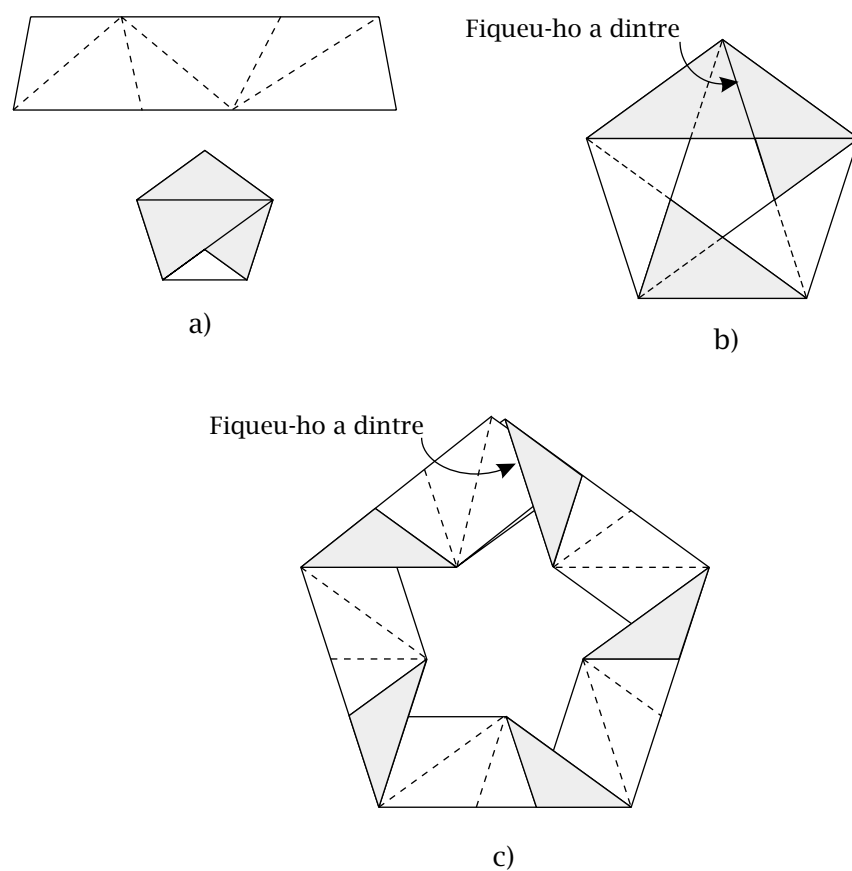


FIGURA 12

No paga la pena preocupar-se sobre quants triangles fan falta per a cada una d'aquestes construccions, perquè quan es té la cinta als dits és molt fàcil d'anar provant fins a obtenir el que es volia i després tallar la part que sobra.

EXPERIMENT 3: La conjectura *equivocada* més freqüent sobre què passarà quan seguim el procediment D^3U^3 és que s'obtindrà una cinta per construir heptàgons regulars. El que realment s'obté a partir d'aquest procediment, tal com es demostra a la secció 2, és una cinta en la qual l'angle més petit és de $\frac{\pi}{9}$ i que es pot fer servir per construir polígons regulars de 9 costats «llargs», «mitjans», «curts» o de tipus DIT, tal com es veu a les figures 13 a), b), c) i d), respectivament.

A la secció 2 es pot trobar una resposta sistemàtica a la pregunta de què s'obté si s'adopta el procediment general de plegat de període 1, o sigui, si se segueix el procediment D^nU^n .

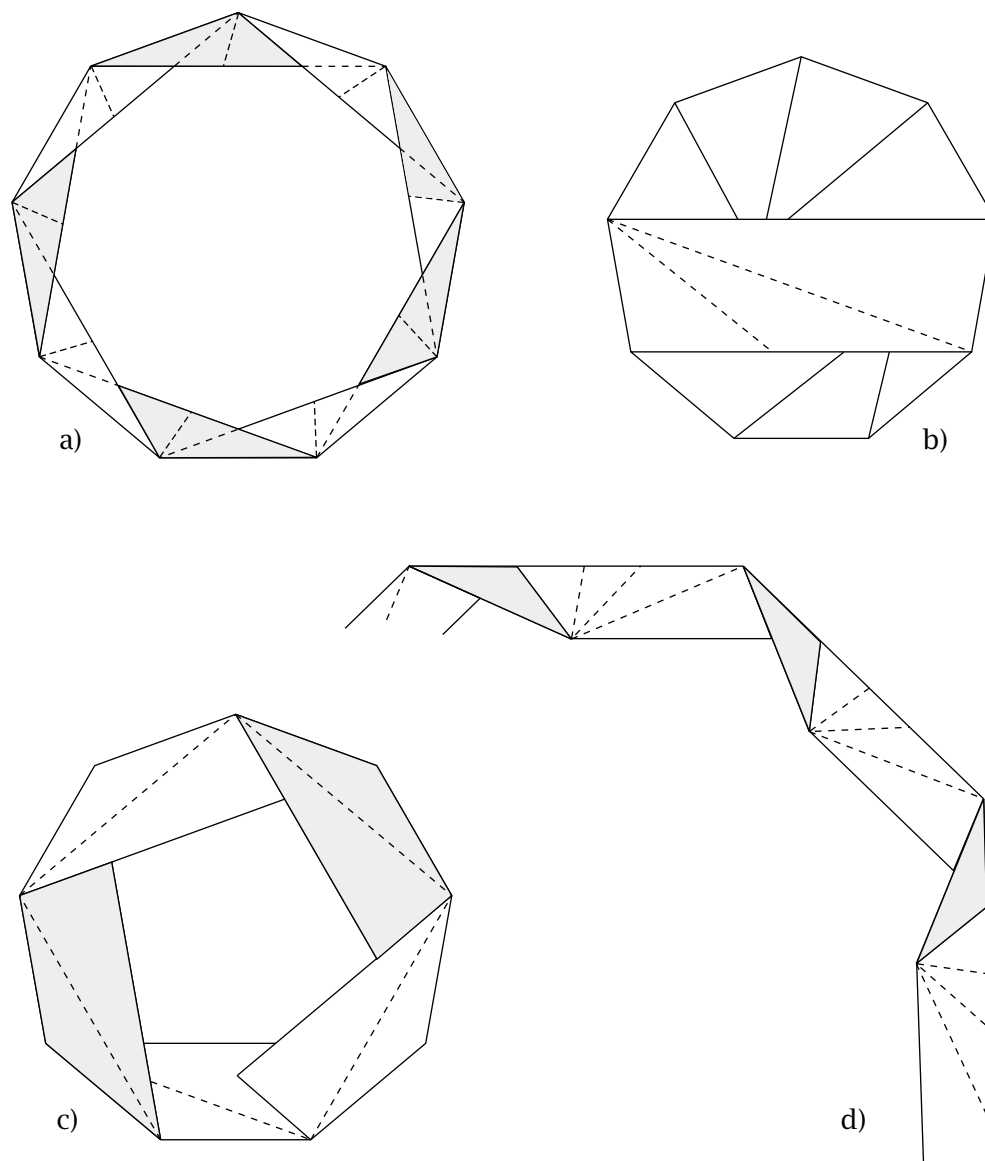


FIGURA 13

Referències

- [1] COXETER, H. M. S. *Regular Polytopes*. Nova York: Macmillan Mathematics Paperbacks, 1963.
- [2] HILTON, P., HOLTON, D., PEDERSEN, J. *Mathematical Reflections —in a Room with Many Mirrors*. (Segona impressió.) Nova York: Springer, 1998.

- [3] HILTON, P., PEDERSEN, J. *Build Your Own Polyhedra*. Menlo Park, (CA), Addison Wesley, 1994.
- [4] HILTON, P., PEDERSEN, J. «Geometry in Practice and Numbers in Theory», *Monographs in Undergraduate Mathematics*, 16, 1987. [Es pot obtenir al Department of Mathematics, Guilford College, Greensboro, North Carolina 27410].

PETER HILTON
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
THE STATE UNIVERSITY OF NEW YORK
BIRGHAMTON, NY 13902-6000
EUA
marge@math.binghamton.edu

JEAN PEDERSEN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
SANTA CLARA UNIVERSITY
SANTA CLARA, CA 95053-0290
EUA
jpedersen@scu.edu