

El conjunt de Mandelbrot i altres plans de bifurcació*

NÚRIA FAGELLA

1 Introducció

El conjunt de Mandelbrot va ser vist físicament per primera vegada en una pantalla cap al començament dels anys vuitanta. Aquest fet va obrir la possibilitat a l'experimentació numèrica i va renovar l'interès en les matemàtiques que hi ha al darrera d'aquesta intrigant i bella imatge, les quals havien estat en un punt mort des de feia gairebé vuitanta anys [1]. El ressorgir definitiu va tenir lloc molt poc després [15], amb la introducció d'una nova eina que ha demostrat ser fonamental: les funcions quasiconformes.

El conjunt de Mandelbrot apareix dins l'estudi de la iteració de funcions holomorfes d'una variable, i en particular, de la iteració dels polinomis quadràtics en el pla complex. Més concretament, donat un polinomi de segon grau, $P_c(z) = z^2 + c$, amb z i c complexos, es pretén estudiar el sistema dinàmic donat pels seus iterats

$$P_c^n = P_c \circ \overset{\cdot n}{\cdot} \circ P_c.$$

Com veurem a la secció 2, el conjunt de Mandelbrot viu en el *pla de paràmetres* o de *bifurcacions* (és a dir al pla de les c s), essent de fet un *catàleg* dels sistemes dinàmics que venen donats pels diferents valors del paràmetre c , i que es troben en els corresponents *plans de fase* o *plans dinàmics*, un per cada valor del paràmetre.

És molta la informació que es coneix avui sobre el conjunt de Mandelbrot. A la descripció detallada d'aquest conjunt hi han contribuït molts matemàtics entre els quals podem destacar A. Douady, J. Hubbard, M. Lyubich, C. McMullen, M. Shishikura i J. C. Yoccoz. Tot i això, a hores d'ara, encara queda oberta una pregunta, la resposta de la qual podria tenir àmplies repercussions dins d'aquest camp: el conjunt de Mandelbrot, és localment connex?

Dins d'aquest ressorgiment dels sistemes dinàmics complexos, l'estudi dels polinomis (i especialment els quadràtics) ha estat, amb diferència, la parcel·la més

* Conferència pronunciada a la Segona Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans el març de 1999.

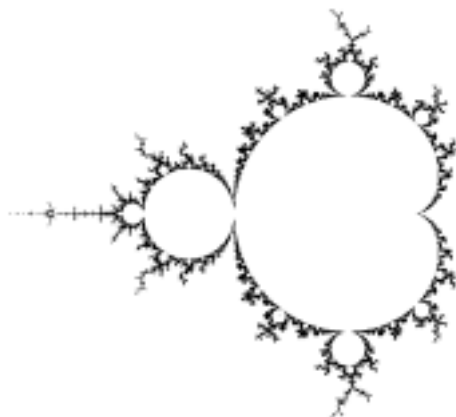


FIGURA 1: La frontera del conjunt de Mandelbrot.

popular i l'àrea on s'han demostrat el major nombre de resultats. A primera vista, pot semblar que s'han dedicat molts esforços a un cas molt particular de la teoria general. Però mirant més detingudament, és fàcil veure que la figura del conjunt de Mandelbrot és present en molts altres plans de bifurcació, *a priori* ben poc relacionats amb els polinomis. Això s'expressa sovint dient que el conjunt de Mandelbrot és un objecte universal. Alguns exemples són les famílies de funcions $\lambda z \exp z$ o el mètode de Newton pels polinomis $z(z-1)(z-a)$, els plans de bifurcació dels quals podem veure (parcialment) a la figura 2.

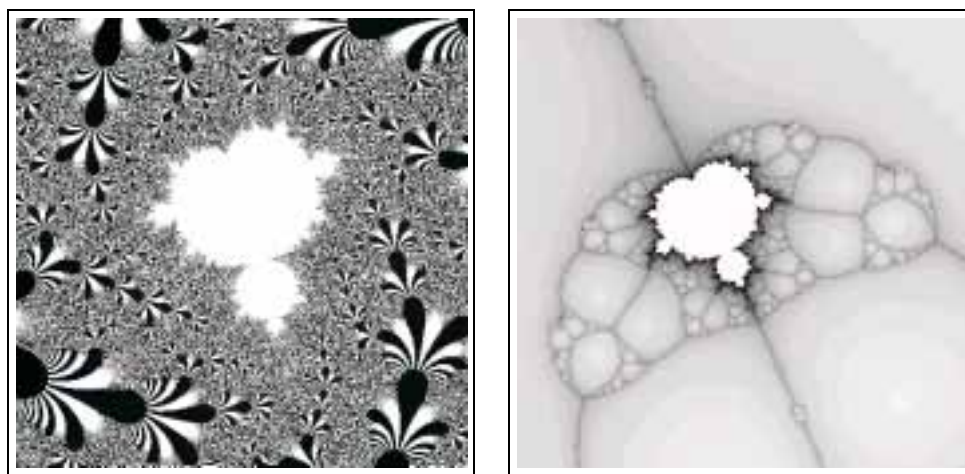


FIGURA 2: Esquerra: regió en el pla de bifurcacions de la família $\lambda z \exp z$. Dreta: ídem per la família $\frac{z^2(-2z+a+1)}{z(2-3z)+a(2z-1)}$, el mètode de Newton de $z(z-1)(z-a)$. A tots dos plans observem còpies del conjunt de Mandelbrot.

L'explicació d'aquest fenomen ve donada per la teoria de les *funcions loc-polinomials* (polynomial-like mappings), desenvolupada per Douady i Hubbard [12] als anys vuitanta. Aquesta teoria, a la qual dediquem la secció 3, ens explica com moltes funcions tenen, localment, un comportament polinomial, i per tant es poden observar, tant en el seu pla de fases com en els seu pla de bifurcacions, objectes polinomials típics com, per exemple, el conjunt de Mandelbrot. Un cas particular d'aquest fenomen és el que es coneix per *renormalització* [16].

La secció 4 d'aquest recull la dediquem a descriure els homeomorfismes que existeixen [7] entre algunes parts (anomenades *extremitats*) d'aquest conjunt (vegeu la figura 3). Apart del fet purament topològic (no sempre detectable a primera vista), aquests homeomorfismes mostren com grups de bifurcacions, aparentment no relacionades, de fet es corresponen una a una. La construcció d'aquests homeomorfismes es fa mitjançant una tècnica, anomenada *cirurgia quasiconforme*, de la qual n'intentem donar unes pincelades a la secció 4.3. Finalment, a l'apèndix, es poden trobar les definicions i els resultats bàsics sobre aplicacions quasiconformes, així com una de les aplicacions més usuals als sistemes dinàmics del pla complex.

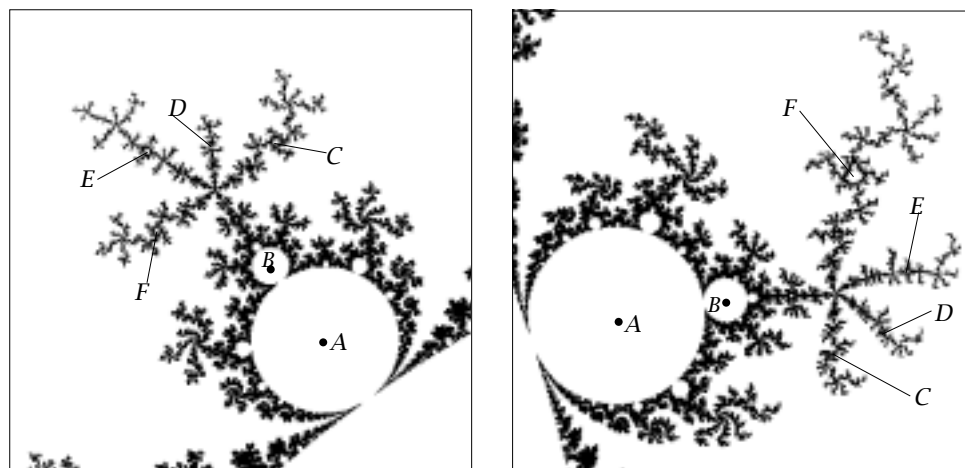


FIGURA 3: Dues extremitats homeomorfe del conjunt de Mandelbrot. Punts amb la mateixa lletra es corresponen per l'homeomorfisme.

2 El conjunt de Mandelbrot. Polinomis quadràtics.

Es pot definir el conjunt de Mandelbrot d'una manera totalment elemental, com el conjunt de valors del paràmetre $c \in \mathbb{C}$ per als quals l'òrbita de $z = 0$ sota $P_c(z) = z^2 + c$ és acotada. És a dir,

$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C} \mid \{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots\} \text{ és acotada}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

És sabut (e. g. [5] o [9]) que M és connex, compacte i ple (i.e. $\mathbb{C} \setminus M$ és connex).

Tot i que aquesta definició no ens diu res sobre el significat del conjunt, sí que ens dona un algorisme senzill per dibuixar una aproximació de M . Efectivament,

un simple programa ens pot calcular, donada una xarxa de punts (o valors de c), quins d'ells satisfan, per exemple, $|P_c^{50}(c)| < 4$. Si pintem aquests punts de negre i deixem blancs els que hagin escapat abans dels 50 iterats, obtindrem una aproximació del conjunt de Mandelbrot. (Cal dir però que, òbviament, la figura 1 no ha estat obtinguda amb aquest algorisme.)

El pla de paràmetres, on viu el conjunt de Mandelbrot, és en realitat un catàleg de sistemes dinàmics quadràtics. Observem que cada valor de $c \in \mathbb{C}$ dona lloc a un polinomi diferent $P_c(z) = z^2 + c$, i que la iteració d'aquest polinomi dona lloc a un sistema dinàmic en el pla complex. El pla on iterem un polinomi particular P_c l'anomenem el *pla dinàmic* o *pla de fases* de P_c (vegeu la figura 4). Per una exposició detallada, us remetem, per exemple, a [4], [9], [11] o [17].

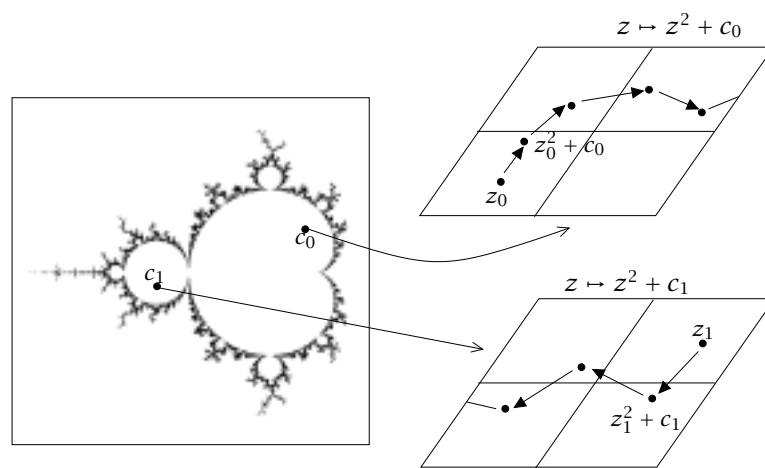


FIGURA 4: Cada punt del pla de paràmetres correspon a un pla dinàmic diferent. En un pla dinàmic, els iterats d'un punt formen la seva òrbita.

A cada un dels plans dinàmics, podem classificar els seus punts segons el seu comportament asimptòtic sota iteració de P_c . Més concretament, fixem primer un valor del paràmetre c i definim una partició del pla dinàmic de P_c en dos conjunts: la *conca d'infinít*

$$A_c(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid P_c^n(z) \rightarrow \infty\}$$

i el *conjunt ple de Julia*

$$K_c = K(P_c) = \mathbb{C} \setminus A_c(\infty).$$

Observem que el punt de l'infinít (considerat a l'esfera de Riemann) és un punt atractor per a qualsevol polinomi i per tant A_c és un conjunt obert que conté un entorn d'infinít. Com a conseqüència, el conjunt ple de Julia, K_c , és un compacte. La partició que acabem de definir és respectada per la dinàmica del polinomi, ja que tant A_c com K_c tenen la propietat de contenir òrbites senceres. És a dir, si z és un punt de A_c (resp. K_c), totes les seves imatges i preimatges també pertanyen a A_c (resp. K_c). Els conjunts amb aquesta propietat s'anomenen *totalment invariants*. Un altre conjunt totalment invariant és la frontera comú de K_c i A_c , anomenada el *conjunt de Julia*

$$J_c = J(P_c) = \partial K_c = \partial A_c.$$

Aquest conegut conjunt és el que conté els punts que presenten una dinàmica «caòtica».

L'exemple més obvi el trobem per $c = 0$. Clarament, el conjunt de Julia és el cercle unitat, ja que tots els punts $|z| > 1$ tendeixen a infinit sota iteració de $P_0(z) = z^2$, mentre que, aquells amb $|z| < 1$, són atrats cap al punt $z = 0$. Un dels exemples més senzills d'entre els no trivials és el que trobem per $c \simeq -0.12 + 0.74i$ i que es coneix com el *Douady Rabbit* (vegeu la figura 5). Per aquest valor, tenim un cicle de període 3 ($0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow 0$), que atrau tots els punts a l'interior del conjunt ple de Julia.

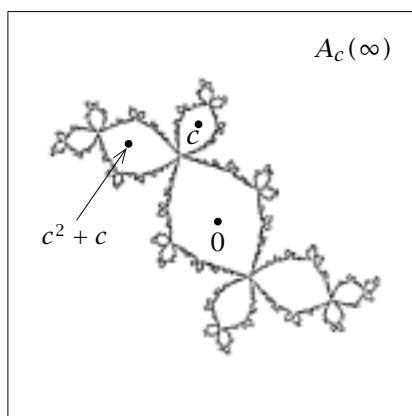


FIGURA 5: El conjunt de Julia, conegut com el *Douady rabbit* i que correspon al valor de $c \simeq -0.12 + 0.74i$. Els punts marquen l'òrbita atractora de període 3.

Aquests i altres exemples els podem veure a la figura 6, ón observem com diferents conjunts de Julia s'associen als corresponents punts del conjunt de Mandelbrot.

Tot i que hem entès fins aquest moment la partició dinàmica de \mathbb{C} , a la qual dona lloc cada polinomi, encara no hem aclarit el per què de la definició del conjunt de Mandelbrot. Abans de fer-ho donarem una definició alternativa de M .

1 PROPOSICIÓ (e. g. [17]) *Sigui $P_c(z) = z^2 + c$ per un valor fixat de c . Aleshores,*

- a) $0 \in K_c$ si i només si K_c és connex, i
- b) $0 \in A_c$ si i només si K_c és un conjunt de Cantor.

Aquesta proposició ens dona una definició alternativa del conjunt de Mandelbrot, en termes de la topologia dels conjunts de Julia.

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ és connex}\}.$$

Però en realitat, el conjunt M dona més que una dicotomia topològica, ja que proporciona una partició infinita de \mathbb{C} , segons el comportament dinàmic qualitatiu dels diferents polinomis. Per fer aquesta afirmació més precisa necessitem la definició següent.

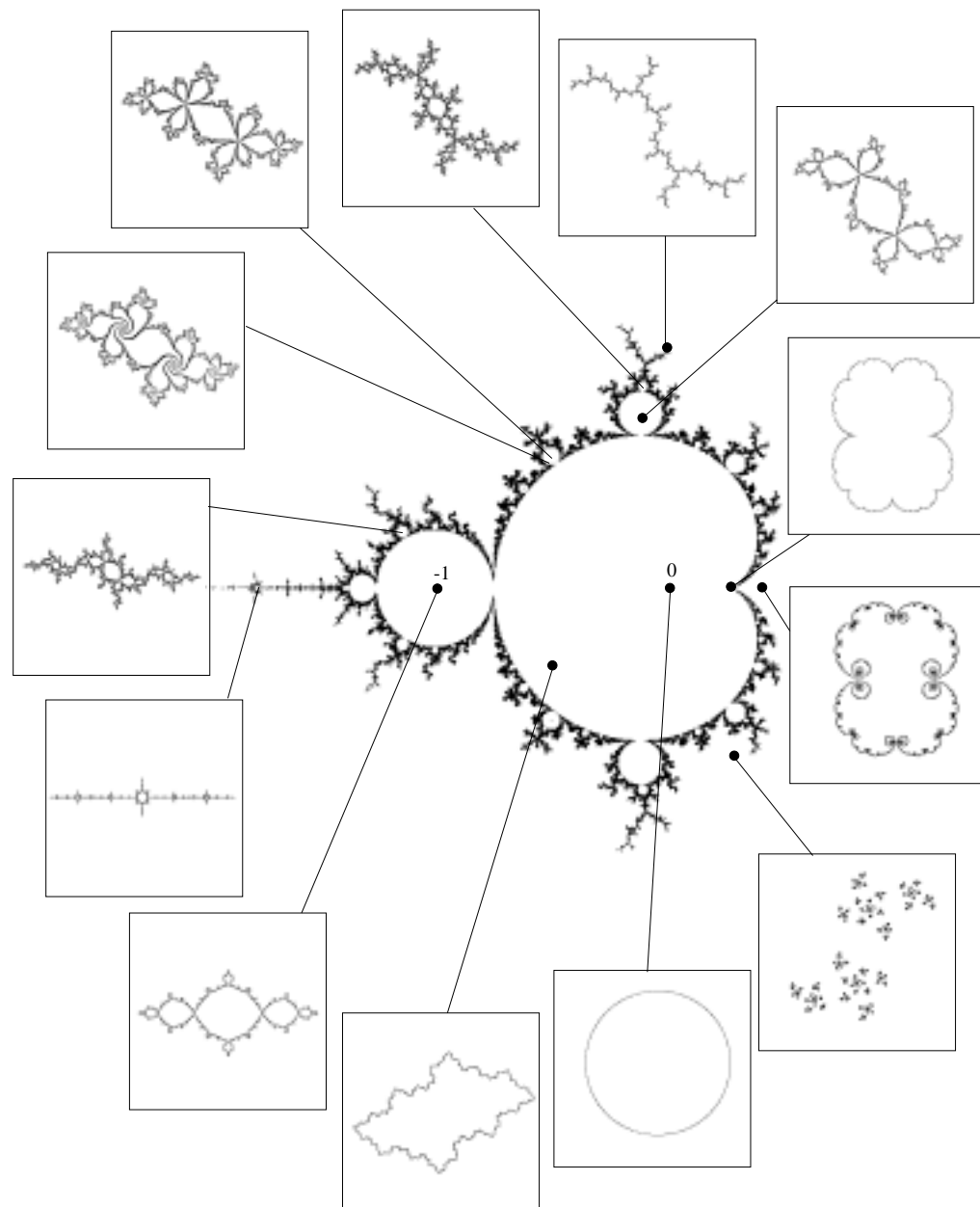


FIGURA 6: El conjunt de Mandelbrot com a catàleg de conjunts de Julia de polinomis quadràtics.

2 DEFINICIÓ Siguin $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dues funcions holomorfes. Diem que f i g són topològicament equivalents, o topològicament conjugades, si existeix un homeomorfisme $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \end{array}$$

commuta. Si a més h és quasiconforme, diem que f i g són quasiconformement equivalents i si h és holomorfa (i per tant una funció afi), diem que són holomorfament conjugades o conjugades per una funció afi.

Per a la definició de funció quasiconforme, remetem el lector a l'apèndix A.1.

En qualsevol dels casos, l'homeomorfisme h envia les òrbites de f a les òrbites de g ; envia el conjunt de Julia de f (definit adequadament) al conjunt de Julia de g , etc. És per això que diem que f i g tenen el mateix comportament dinàmic qualitatiu. Per exemple, tot polinomi de grau dos és conjugat per una funció afi a un de la forma P_c .

3 OBSERVACIÓ En el cas que f i g siguin polinomis (o localment siguin polinomis, vegeu la secció 3), és suficient que la conjugació h estigui definida en un entorn de $K(f)$ i que la seva imatge sigui un entorn de $K(g)$.

En aquest sentit qualitatiu, la frontera del conjunt de Mandelbrot és el conjunt de paràmetres pels quals té lloc una *bifurcació*, és a dir, un canvi en el comportament dinàmic qualitatiu del polinomi. Dit d'una altra manera, si Ω és un component connex de l'interior de M , i $c_1, c_2 \in \Omega$, aleshores P_{c_1} i P_{c_2} són polinomis (quasiconformement) equivalents¹ (vegeu e. g. [9], [16]). A la figura 7 podem veure dos conjunts de Julia de polinomis, pertanyents al mateix component connex de l'interior de M , i podem observar com un d'ells és tan sols una deformació (quasiconforme) de l'altre.

3 El conjunt de Mandelbrot és universal

Abans de continuar aprofundint en l'estudi del conjunt de Mandelbrot, ens detindrem breument en aquesta secció, per explicar un dels fenòmens que fan que els polinomis siguin rellevants en l'estudi de moltes altres funcions no polinomials. Més concretament, ens referim a la teoria de les funcions loc-polinomials [12]. Amb l'objectiu de simplificar al màxim l'exposició, ens limitarem a parlar de la teoria pels polinomis quadràtics, i. e., de les funcions loc-quadràtiques, tot i que una bona part del que diem és generalitzable a polinomis de qualsevol grau. Amb el mateix objectiu ometrem molts dels detalls tècnics, per als quals remetem al lector a [12] o [9].

4 DEFINICIÓ Una funció loc-quadràtica és un triplet (F, U, V) , on U i V són oberts de \mathbb{C} isomorfs a discs amb $\bar{U} \subset V$, i $F: U \rightarrow V$ és una funció holomorfa tal que tot punt de V té exactament dues preimatges a U , comptades amb multiplicitat.

¹ Per ser precisos hauriem d'excloure un polinomi especial de cada un d'aquests components anomenat *centre*, pel qual el punt crític és atractor. Alternativament, podem considerar la conjugació només en entorns del conjunt de Julia, no del conjunt ple de Julia, i aleshores l'afirmació és correcta [15], [16].

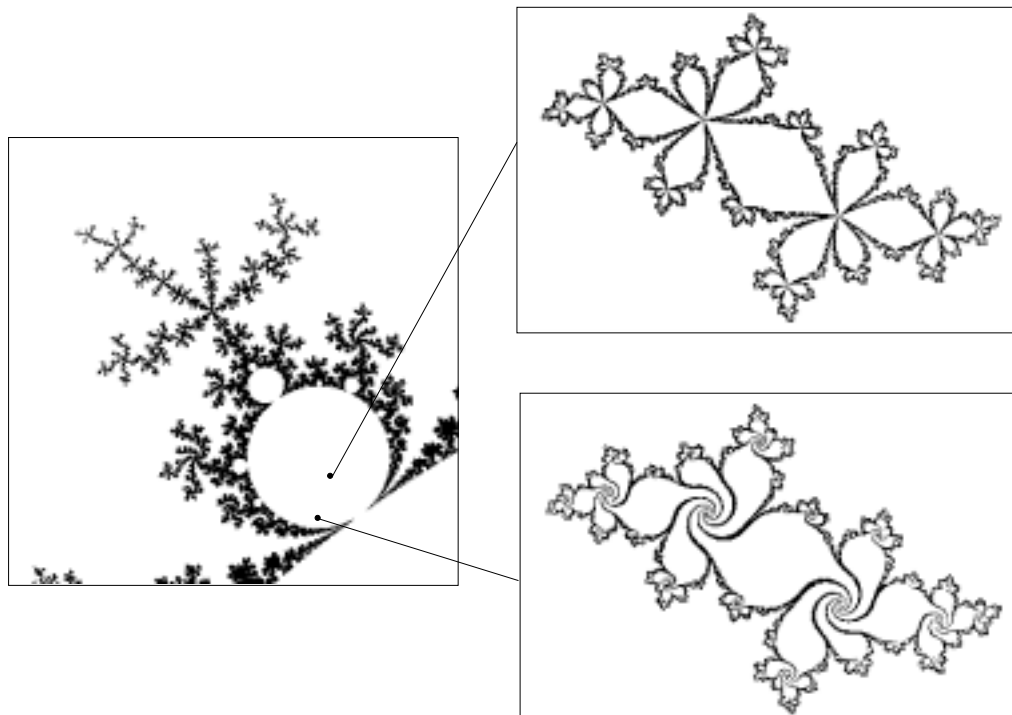


FIGURA 7: Conjunts de Julia de dos polinomis, pertanyents al mateix component connex de l'interior de M .

Volem fer notar que, necessàriament, una funció loc-quadràtica ha de tenir un únic *punt crític* (i. e. un punt de derivada zero) a l'interior de U .

Els exemples més comuns els trobem en restriccions de funcions definides globalment. Per exemple, en una funció com $f(z) = \pi \cos z$, no és difícil trobar un petit rectangle al voltant del punt crític $\omega = -\pi$, la imatge del qual el conté de manera compacta. Altres exemples característics es troben en polinomis de grau superior, restringits adequadament, i fins i tot en iterats dels mateixos polinomis quadràtics, mirats en una regió convenient. Aquest últim cas és el que es coneix com a renormalització. Per més exemples, vegeu [13].

També convé notar que, de manera trivial, tot polinomi quadràtic és una funció loc-quadràtica, si escollim V que sigui un disc prou gran i U la seva preimatge. Recíprocament, podem mirar qualsevol funció loc-quadràtica com si fos la restricció d'un polinomi quadràtic. D'aquesta manera podem definir, per exemple, el *conjunt ple de Julia de F* com

$$K(F) = \{z \in U \mid F^n(z) \in U \text{ per a tot } n \geq 0\},$$

i igualment, el *conjunt de Julia de F* com la seva frontera. Però la confirmació de que F es comporta realment com un polinomi la tenim amb el següent resultat.

5 TEOREMA DEL REDREÇAMENT ([12]) *Suposem que (F, U, V) és una funció loc-quadràtica. Llavors existeix $c \in \mathbb{C}$ tal que F i $P_c(z) = z^2 + c$ són quasiconformement*

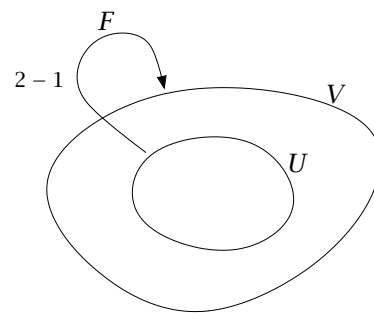


FIGURA 8: Els tres elements (F, U, V) que formen una funció loc-quadràtica.

conjugades (en entorns respectius dels seus conjunts plens de Julia). Si, a més, $K(F)$ és connex, aleshores el valor de c és únic.

En particular, es dedueix del teorema que els conjunts plens de Julia $K(P_c)$ i $K(F)$ són homeomorfs i, encara més, quasiconformement homeomorfs. Això explica que molts plans dinàmics de funcions holomorfes continguin còpies (a vegades lleugerament deformades) de conjunts plens de Julia quadràtics. Vegeu per exemple la figura 9.

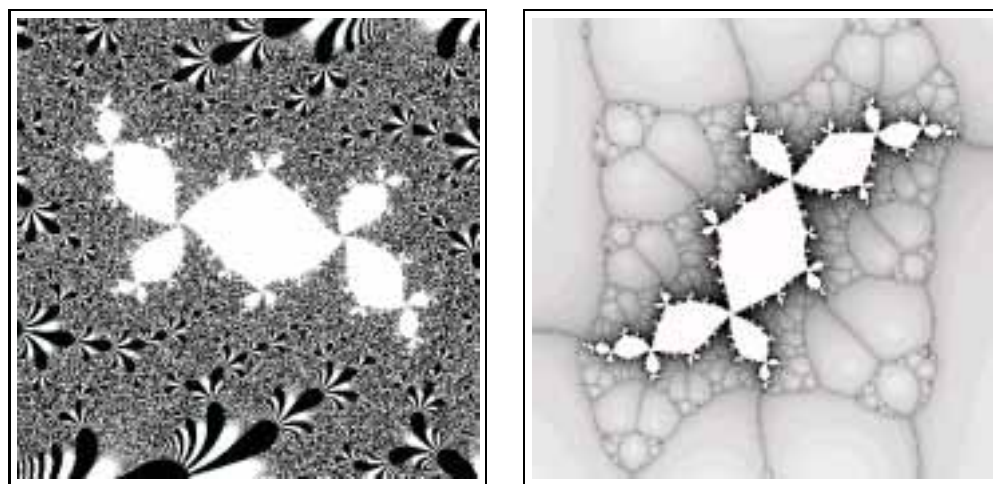


FIGURA 9: Esquerra: Regió del pla dinàmic de la funció $\lambda z \exp z$ amb $\lambda \simeq 15.7 + 22.4i$. Dreta: ídem per a la funció $\frac{z^2(-2z+a+1)}{z(2-3z)+a(2z-1)}$ amb $a \simeq 0.91 + 0.42i$. Les dues funcions pertanyen als respectius plans de paràmetres de la figura 2 i contenen còpies del Douaddy Rabbit de la figura 5. En els dos casos, el color blanc indica punts d'òrbita acotada.

Passem ara a parlar del pla de paràmetres de les funcions loc-quadràtiques. De la mateixa manera que considerem el pla de paràmetres d'una família de funcions holomorfes, també és possible classificar qualitativament una família de

funcions loc-quadràtiques. Si $\mathcal{F} = \{(F_\lambda, U_\lambda, V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ és una família «holomorfa» (aquest és un concepte que no definirem) de funcions loc-quadràtiques, on per simplicitat suposarem que Λ és un obert de \mathbb{C} , aleshores, el teorema del redreçament ens diu que cada una de les funcions F_λ és conjugada a un polinomi quadràtic P_c . Per analogia amb els polinomis podem definir

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} = \{\lambda \in \Lambda \mid K(F_\lambda) \text{ és connex}\}.$$

Recordant que el valor de $c = c_\lambda$ és únic, per als valors de λ tals que $K(F_\lambda)$ és connex, veiem que la funció

$$\chi: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & M \\ \lambda & \longmapsto & c_\lambda = \chi(\lambda) \end{array}$$

està ben definida. Aleshores, és natural preguntar-se quina relació té el conjunt $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ amb el conjunt de Mandelbrot.

6 TEOREMA *En les hipòtesis anteriors, sigui $D \in \Lambda$ un tancat homeomorf a un disc que contingui $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. Siguí ω_λ el punt crític de F_λ i suposem que per cada $\lambda \in (\Lambda \setminus D)$ el valor crític $F_\lambda(\omega_\lambda) \in (V_\lambda \setminus U_\lambda)$. Assumim també que, a mesura que λ recorre la frontera de D una vegada, el vector $F_\lambda(\omega_\lambda) - \omega_\lambda$ gira una vegada al voltant del 0 (vegeu la figura 10). Llavors la funció χ és un homeomorfisme i és holomorf a l'interior de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.*

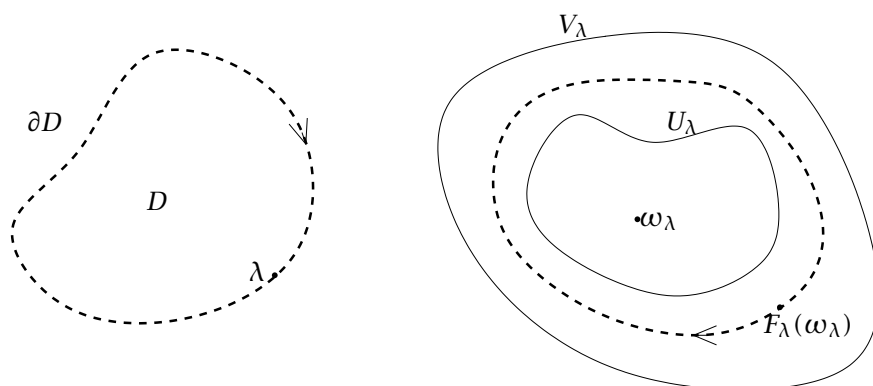
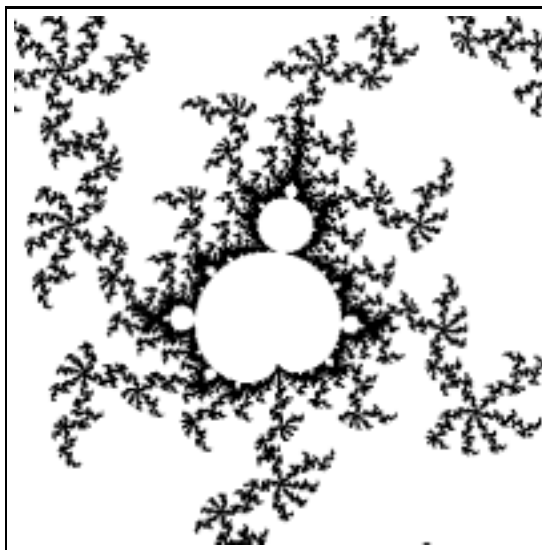


FIGURA 10: Il·lustració aproximada de les hipòtesis del teorema 6. Cal tenir en compte que molts dels elements es mouen amb λ .

Per tant, les bifurcacions dels polinomis P_c es corresponen una a una amb les bifurcacions de la família F_λ dins del disc D . Això fa que trobem còpies del conjunt de Mandelbrot, tal vegada deformades, als plans de bifurcacions d'altres funcions (vegeu, per exemple, la figura 2). Aquest fenomen també es dona dins del conjunt de Mandelbrot mateix. El fet de trobar còpies petites de M dins del mateix conjunt M , és degut al fet que un cert iterat de P_c , restringit adequadament a una certa regió, forma en alguns casos una família de funcions loc-quadràtiques en les hipòtesis del teorema. Vegeu, per exemple, la figura 11. Aquest fenomen es coneix com renormalització.

FIGURA 11: Còpia (deformada) de M dins del mateix conjunt M .

4 Homeomorfismes entre les extremitats de M

4.1 Les extremitats de M

Hem vist a la secció 2 que cada un dels components connexos de l'interior de M correspon a polinomis equivalents.² Alguns d'aquests components s'anomenen *components hiperbòlics* de M , essent aquests els que contenen polinomis amb una òrbita periòdica atractora.³ Observem que el període d'aquest cicle atractora ha de ser el mateix per a tots els polinomis del component.

Considerem el component connex més obvi, la cardioide central, que anomenem Ω_0 . És fàcil comprovar (calculant a mà, per exemple) que Ω_0 correspon als polinomis P_c que tenen un punt fix atractora. Si anomenem $z_0(c)$ aquest punt fix, aleshores Ω_0 correspon als valors de c pels quals el mòdul del *multiplicador* del punt fix, $|\rho(c)| = |P'_c(z_0(c))|$ és estrictament menor que 1, condició que ens assegura que $z_0(c)$ és atractora.

El multiplicador és una funció holomorfa i bijectiva⁴

$$\begin{array}{ccc} \rho: & \Omega_0 & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & c & \longmapsto & \rho(c) \end{array}$$

que a més s'estén de manera contínua a la frontera. Per tant, podem parametritzar la frontera fent

$$\begin{array}{ccc} \gamma: & [0, 1) & \longrightarrow & \partial\Omega_0 \\ & t & \longmapsto & \rho^{-1}(e^{2\pi it}). \end{array}$$

Observem que, quan c tendeix cap a la frontera de Ω_0 , llavors $|\rho(c)| \rightarrow 1$ i que, per tant, el punt fix $z_0(c)$ deixa de ser atractora. Això vol dir que es produeix una

² Vegeu la nota a peu de pàgina 1 (p. 41).

³ Es conjectura que tots els components connexos de l'interior de M són components hiperbòlics.

⁴ Aquest resultat és cert per a tots els components hiperbòlics de M [11].

bifurcació. Aquesta bifurcació és essencialment diferent depenent del punt de la frontera al qual ens apropem. Els punts que ens concerneixen són els de la forma $\gamma(p/q)$, amb $p/q \in \mathbb{Q}$.

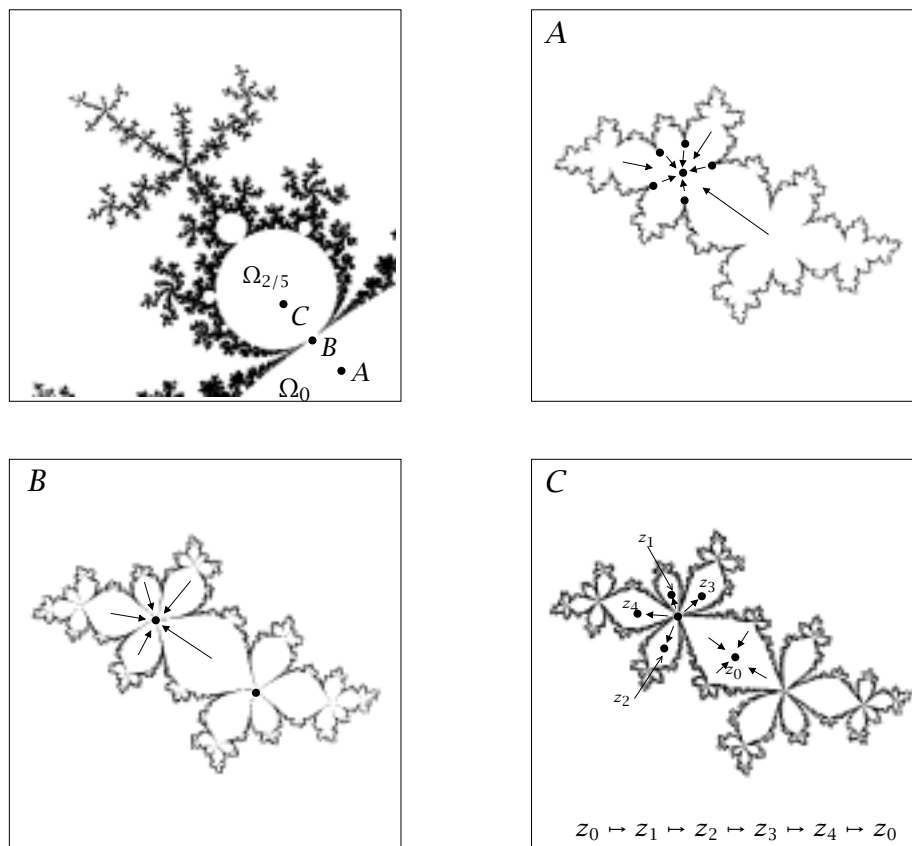


FIGURA 12: Bifurcació que es produeix en moure el paràmetre c des de l'interior de la cardioid central Ω_0 (A), fins a l'interior de la component $\Omega_{2/5}$ (C), passant pel paràmetre $c = \gamma(2/5)$, on la bifurcació es produeix (B). Abans de la bifurcació tenim un punt fix atractiu a l'interior de K_c . Durant la bifurcació, aquest punt està a J_c , col·lapsat amb una òrbita de període 5; és atractiu en unes certes direccions i repulsor en unes altres. Passada la bifurcació, el punt fix és repulsor i és a J_c mentre que l'òrbita de període 5 és ara a l'interior de K_c i és atractiva.

Quina bifurcació es produeix quan atravessem la frontera de Ω_0 per $\gamma(p/q)$? El que succeeix és que, mentre el punt fix deixa de ser atractiu, un cicle de període q que era repulsor passa ara a ser atractiu. El conjunt de Julia deixa de ser un quasicercle (quasiconformement homeomorf a un cercle) per passar a tenir un interior amb infinits components connexos. Vegeu, per exemple, la figura 12. El nombre p ens diu quin és l'ordre cíclic dels punts de l'òrbita periòdica.

Mirat a l'espai de paràmetres, aquest fet es tradueix en l'existència d'un component hiperbòlic de període q tangent a la cardioid en el punt $\gamma(p/q)$, i que anomenem $\Omega_{p/q}$.

7 OBSERVACIÓ Si $p \neq p'$, els polinomis de $\Omega_{p/q}$ i els de $\Omega_{p'/q}$ no són conjugats, tot i que tots tinguin una òrbita periòdica atractora de període q .

En aquest punt podem ja definir què entenem per una extremitat del conjunt de Mandelbrot (vegeu la figura 13).

8 DEFINICIÓ Anomenem extremitat p/q de M , $M_{p/q}$, el component connex de $M \setminus \overline{\Omega_0}$ que conté $\Omega_{p/q}$, afegint-hi $\gamma_{p/q}$.

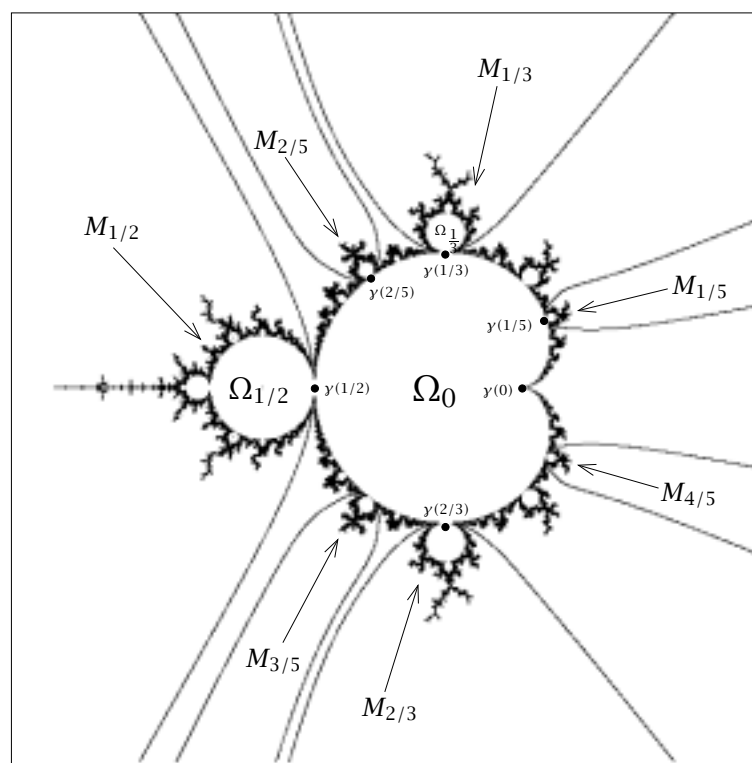


FIGURA 13: Les extremitats de M .

4.2 Homeomorfismes

L'observació que acabem de fer ens fa veure que els polinomis que pertanyen a extremitats amb el mateix denominador, però numerador diferent, no estan, *a priori*, dinàmicament relacionats. Si observem les còpies més prominents de M situades a cada una de les q antenes de $M_{p/q}$ i $M_{p'/q}$, veiem que tenen fins i tot períodes diferents. Així, per exemple, a l'extremitat $M_{2/5}$ (figura 3 esquerra), els períodes de les còpies (denotades per A, B, \dots, F) són 5, 10, 7, 9, 6, 8 mentre que, per a $M_{1/5}$ (figura 3 dreta), són 5, 10, 9, 8, 7, 6.

Aquest fet és el que fa que el resultat següent sigui força sorprenent.

9 TEOREMA ([7]) *Siguin $p/q, p'/q \in \mathbb{Q}$ irreductibles. Llavors existeix un homeomorfisme*

$$\Phi_{p,p'}^q : M_{p/q} \longrightarrow M_{p'/q}$$

que és holomorfa a l'interior de l'extremitat.

Donat que $M_{p/q}$ i $M_{p'/q}$ són conjunts compactes, aquest homeomorfisme podria, en principi, permutar l'ordre cíclic de les antenes, com es mostra esquemàticament a la figura 14. Però aquest no és el cas.

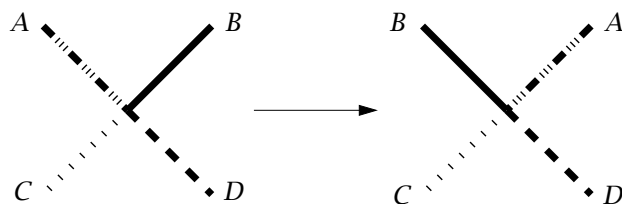


FIGURA 14: Un homeomorfisme entre aquests dos compactes podria permutar l'ordre cíclic de les antenes. En aquest cas, l'homeomorfisme no podria estendre's a un homeomorfisme en un entorn.

10 TEOREMA ([8]) *En les mateixes hipòtesis que en el teorema 9, la funció $\Phi_{p,p'}^q$ s'estén a un homeomorfisme d'un entorn de l'extremitat $M_{p/q}$ a un entorn de l'extremitat $M_{p'/q}$.*

Volem remarcar que els polinomis que es corresponen per mitjà dels homeomorfismes, no són conjugats; és a dir, la seva dinàmica, tot i que està relacionada, no és qualitativament la mateixa.

4.3 Tècnica: cirurgia quasiconforme

El mètode utilitzat per demostrar els teoremes 9 i 10 és la cirurgia quasiconforme, de la qual n'intentarem donar les pincellades principals. Us remetem als articles [7] i [8] per a les demostracions completes dels teoremes 9 i 10, a [14] per a una exposició detallada i a [6],[10] o [18] per a altres instàncies d'aplicació d'aquesta tècnica. Assumirem que el lector està familiaritzat amb la definició d'aplicació quasiconforme i amb el teorema d'Ahlfors-Bers (que es poden trobar a l'apèndix).

Per a construir els homeomorfismes del teorema 9 n'hi ha prou amb construir

$$\Phi_{p,1}^q : M_{p/q} \longrightarrow M_{1/q}$$

per a cada p adequada, ja que combinant aquestes aplicacions, les obtindrem totes. Això vol dir que, donat un valor de $c \in M_{p/q}$ hem d'associar-li un valor $c' \in M_{1/q}$ (de manera contínua, bijectiva, etc.).

La cirurgia quasiconforme, en aquest cas, consisteix en quatre parts.

Cirurgia topològica. Comencem al pla dinàmic del polinomi inicial P_c i, de manera purament topològica (i.e. «tallant» i «enganxant» si és necessari), canviem la

dinàmica del polinomi, sense preocupar-nos de moment per la pèrdua de regularitat. El primer objectiu és, doncs, obtenir una funció, diguem-li f_1 , que òbviament no serà holomorfa (en alguns llocs aïllats pot no ser ni contínua), però que hauria d'exhibir els trets dinàmics d'un polinomi que pertanyi a l'espai d'arribada, en aquest cas $M_{1/q}$.

Cirurgia quasiconforme. Modifiquem la funció f_1 en alguns entorns de les zones de no continuïtat, de manera que la nova funció resultant, f_2 sigui contínua i, molt important, (localment) quasiconforme, és a dir amb distorsió acotada. Aquesta construcció només cal fer-la en un entorn del conjunt ple de Julia, però de tal manera que la funció f_2 satisfaci els requeriments (topològics) de les funcions loc-quadràtiques. És essencial que les modificacions siguin prou petites com per a no canviar els trets dinàmics d'una funció de $M_{1/q}$, la quals cosa s'aconsegueix limitant-nos a tocar l'exterior del conjunt ple de Julia.

Holomorfa. Un cop aconseguida la funció f_2 , cal que definim una nova estructura quasi complexa σ , amb dilatació acotada, i que sigui invariant per aquesta funció (vegeu l'apèndix A.4). Tot seguit apliquem el Teorema d'Ahlfors-Bers per a aconseguir una funció f_3 holomorfa i quasiconformement conjugada a f_2 . Efectivament, el teorema ens dóna l'existència d'un homeomorfisme quasiconforme h , que «integra» l'estructura complexa σ ; és a dir, tal que $h^*(\sigma) = \sigma_0$, on σ_0 és l'estructura complexa estàndard. És per això que la funció $f_3 := h \circ f_2 \circ h^{-1}$ manté σ_0 invariant i, per tant, és holomorfa (vegeu l'apèndix A.4).

Redreçament. Del pas anterior hem obtingut una funció holomorfa, f_3 , que compleix les hipòtesis per a ser loc-quadràtica. Podem, doncs, aplicar el Teorema del Redreçament i obtenir un polinomi quadràtic $P_{c'}$, quasiconformement conjugat a f_3 . Finalment, podem definir $c' = \Psi_{1,p}^q(c)$. Donat que c pertany al conjunt de Mandelbrot, sabem que el conjunt ple de Julia de f_3 és connex, i per tant c' és única.

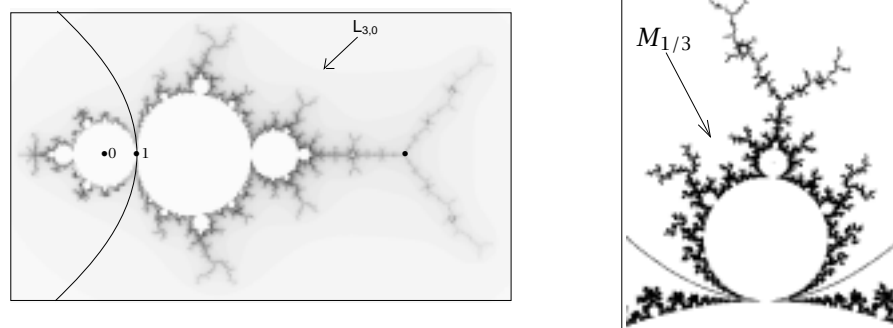


FIGURA 15: Esquerra: pla de bifurcació de la família $P_{3,\lambda} = \lambda z(1+z/3)^3$ i en particular l'extremitat $L_{3,0}$. Dreta: L'extremitat $M_{1/3}$ del conjunt de Mandelbrot. Les dues extremitats són homeomorfes.

Es pot veure que aquesta és una funció ben definida, contínua i holomorfa a l'interior. És també possible definir la seva inversa mitjançant un procés semblant, i deduir per tant que $\Phi_{1,p}^q$ és un homeomorfisme.

Aquests són, a grans trets, els punts principals de la cirurgia quasiconforme, aplicada a construir correspondències entre diferents plans de paràmetres.

4.4 La família pont

Finalment volem fer notar que el teorema 9, va ser demostrat originalment a [7] fent servir una família de polinomis de grau superior com a família pont. Aquests eren

$$P_{q,\lambda}(z) = \lambda z(1 + z/q)^q,$$

on $q \in \mathbb{N}$ i $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Observem que per a cada q tenim una família uniparamètrica diferent i, per tant, un pla de bifurcacions diferent. De la mateixa manera que per al conjunt de Mandelbrot, és possible definir el concepte d'extremitat per a cada un d'aquests diagrames de bifurcació. Sigui $L_{q,0}$ l'extremitat 0 per a cada una de les famílies. Aleshores, el teorema original estableix que, per a tot $p/q \in \mathbb{Q}$, les extremitats $M_{p/q}$ i $L_{q,0}$ són homeomorfes. Fixem-nos que viuen en plans de bifurcació diferents. Combinant aquests homeomorfismes, s'obtenen els del teorema 9. Vegeu les figures 15 i 16.



FIGURA 16: Esquerra: pla de bifurcació de la família $P_{21,\lambda} = \lambda z(1 + z/21)^{21}$ i en particular l'extremitat $L_{21,0}$. Dreta: L'extremitat $M_{1/21}$ del conjunt de Mandelbrot. Les dues extremitats són homeomorfes.

A Apèndix: Funcions quasiconformes i el Teorema d'Ahlfors-Bers

A.1 Diverses definicions d'aplicació quasiconforme

Siguin U i V dues regions del pla conformement equivalents a \mathbb{D} o a \mathbb{C} (o bé, dues superfícies de Riemann amb la mateixa propietat) i sigui $\varphi: U \rightarrow V$ una funció continua i bijectiva.

Si φ és un homeomorfisme, no tenim cap control de com φ distorsiona els angles. En l'altre extrem, si φ és una funció holomorfa (i per tant conforme, ja que és bijectiva), aleshores sabem que ha de preservar els angles. Intuïtivament,

l'aplicació φ és *quasiconforme* si estem en mig d'aquests dos casos; és a dir, si tot i distorsionar els angles, tenim cap control sobre aquesta distorsió.

La definició precisa és molt intuïtiva si suposem que la funció és diferenciable. Això no és una hipòtesi excessivament forta ja que qualsevol funció quasiconforme és diferenciable gairebé arreu (tot i que això es demostra *a posteriori*).

Suposem, doncs, per ara que l'aplicació $\varphi: U \rightarrow V$ és un difeomorfisme. Llavors l'aplicació tangent \mathbb{R} -lineal $T_z\varphi: T_zU \rightarrow T_{\varphi(z)}V$ defineix (mòdul el producte per un nombre positiu) una el·lipse E_z a T_zU , com l'antimatge d'un cercle a $T_{\varphi(z)}V$; és a dir,

$$E_z = (T_z\varphi)^{-1}(S^1).$$

Definim el *quocient de dilatació* de φ a z , $\mathcal{D}_\varphi(z)$, com el quocient entre la longitud de l'eix major i l'eix menor d'aquesta el·lipse.

11 DEFINICIÓ *Sigui $\varphi: U \rightarrow V$ un difeomorfisme i $\mathcal{D}_\varphi = \sup_{z \in U} \mathcal{D}_\varphi(z)$. Diem que φ és K -quasiconforme si $\mathcal{D}_\varphi \leq K < \infty$.*

Observem que una aplicació és 1-quasiconforme si i només si és conforme, és a dir, l'aplicació tangent transporta cercles a cercles.

Si no suposem que la funció és diferenciable, podem expressar la seva distorsió en termes de mòduls d'anells. Recordem que qualsevol regió anular $A \subset \mathbb{C}$ és conformement equivalent a un únic anell estàndard de la forma $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$. La quantitat $\text{mod}(A) = \log r$ és el que s'anomena el *mòdul* de l'anell A .

12 DEFINICIÓ *Sigui $\varphi: X \rightarrow Y$ un homeomorfisme. Aleshores φ és K -quasiconforme si per tot anell $A \subset U$ es compleix*

$$\frac{1}{K} \text{mod}(A) \leq \text{mod}(\varphi(A)) \leq K \text{mod}(A).$$

Per a aquells que prefereixen un enfocament més analític es pot definir una aplicació quasiconforme de la manera següent.

13 DEFINICIÓ *Sigui $\varphi: U \rightarrow V$ un homeomorfisme. Aleshores φ és K -quasiconforme si té derivades distribucionals a L^2 i la seva dilatació complexa $\mu(z)$ definida localment com*

$$\mu(z) = u(z) \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\bar{\partial}_z \varphi}{\partial_z \varphi} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz}$$

compleix $|u(z)| \leq m < 1$ gairebé arreu.

A.2 Estructures quasicomplexes

Considerem una regió (o superfície) U com en el cas anterior però de moment, no considerem cap aplicació.

Una *estructura quasicomplexa* σ a U és un camp mesurable d'el·lipses $(E_z)_{z \in U}$, o equivalentment, una forma de Beltrami mesurable μ a X

$$\mu(z) = u(z) \frac{d\bar{z}}{dz}.$$

La correspondència entre formes de Beltrami i camps d'el·lipses és la següent: l'argument de $u(z)$ és el doble de l'argument de l'eix major de E_z , i $|u(z)| = \frac{K-1}{K+1}$ on $K \geq 1$ és el quocient de les longituds dels eixos (que depèn de z).

L'estructura complexa estàndard està definida per cercles i es denota per σ_0 .

Usant aquest llenguatge, a la secció anterior hem vist com una aplicació K -quasiconforme $\varphi: U \rightarrow V$ induïx una estructura quasi complexa σ a U ja que gairebé per tot $z \in U$, l'aplicació φ és diferenciable. A més sabem que el quocient entre els eixos de les el·lipses és acotat superiorment per K gairebé arreu.

A.3 Integració

Donat un homeomorfisme quasiconforme $\varphi: U \rightarrow V$, una estructura quasi complexa σ a V es pot *transportar* a una estructura quasi complexa $\varphi^*\sigma$ a U . Si σ està definida per un camp infinitesimal d'el·lipses $(E_w)_{w \in V}$, aleshores $\varphi^*\sigma$ es defineix per $(E_z)_{z \in U}$ on $E_z = (T_z\varphi)^{-1}E_{\varphi(z)}$ en els punts on estigui definida. Observem que si φ és holomorfa, aleshores transporta l'estructura complexa standard σ_0 (definida per cercles) a ella mateixa.

Integrar una estructura quasi complexa σ vol dir trobar un homeomorfisme quasiconforme φ que transporti σ a σ_0 , és a dir, tal que $(T_z\varphi)^{-1}(S^1) = \rho(z)E_z$ per gairebé per a tot $z \in U$, on $\rho(z) \in \mathbb{R}^+$.

El Teorema d'Ahlfors-Bers, o Teorema d'Integrabilitat («Measurable Riemann Mapping Theorem») estableix les condicions sota les quals una estructura quasi complexa és integrable.

14 TEOREMA D'INTEGRABILITAT (AHLFORS-BERS [3, 2]) *Sigui U un obert del pla conformement equivalent a \mathbb{D} o a \mathbb{C} (o una superfície de Riemann amb la mateixa propietat). Sigui σ_μ una estructura quasi complexa a U donada per la forma de Beltrami*

$$\mu = u \frac{d\bar{z}}{dz}$$

amb dilatació acotada, i.e.,

$$\|\mu\|_\infty := \sup |u(z)| < m < 1.$$

Llavors σ_μ és integrable, és a dir, existeix un homeomorfisme quasiconforme φ tal que

$$\mu = \frac{\bar{\partial}\varphi}{\partial\varphi}.$$

(o, equivalentment, tal que $\varphi^\sigma_0 = \sigma_\mu$). Si U és equivalent a \mathbb{D} , aleshores $\varphi: U \rightarrow \mathbb{D}$ és únic mòdul la composició amb transformacions de Möbius del disc. Si U és equivalent a \mathbb{C} , aleshores $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ és únic mòdul la composició amb funcions afins.*

A.4 Aplicació del Teorema d'Integrabilitat als sistemes dinàmics complexos

Una aplicació usual del teorema 14 a la dinàmica complexa és la d'obtenir funcions holomorfes amb una dinàmica prefixada. Més concretament, suposem que $U = V = \mathbb{C}$ (per fixar idees). Imaginem que tenim una funció $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua que no és holomorfa (potser és el resultat de redefinir en certes regions una funció originalment holomorfa o potser l'hem construïda artificialment amb una dinàmica

determinada), i ens preguntem si existeix una funció holomorfa amb la mateixa dinàmica que f , és a dir, topològicament conjugada a f .

Evidentment la resposta no sempre serà afirmativa. Per tal que ho sigui cal trobar una estructura quasi complexa σ a \mathbb{C} , que compleixi dues condicions: tenir dilatació acotada i ser «invariant» per f , és a dir que compleixi $\varphi^* \sigma = \sigma$. Trobar aquesta estructura quasi complexa no serà possible si, per exemple, la funció f té distorsió no acotada.

En cas que σ existeixi, la primera de les condicions ens diu que podem aplicar el teorema 14. Concloem, doncs, que existeix un homeomorfisme quasiconforme $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\varphi^* \sigma_0 = \sigma$. A continuació definim la funció $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ i.e., fent que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, \sigma) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, \sigma) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (\mathbb{C}, \sigma_0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}, \sigma_0) \end{array}$$

commuti. Per definició, la funció g és quasiconformement conjugada a f però a més, la segona condició sobre σ ens diu que g és holomorfa ja que

$$g^* \sigma_0 = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^* \sigma_0 = (\varphi^{-1})^* (f^* (\varphi^* \sigma_0)) = (\varphi^{-1})^* (f^* (\sigma)) = (\varphi^{-1})^* \sigma = \sigma_0.$$

Referències

- [1] ALEXANDER, D. «A history of complex dynamics. From Schröder to Fatou and Julia», *Friedr. Useweg. & Solen.*, 1994.
- [2] AHLFORS, L. *Lectures on quasiconformal mappings*, Wadsworth & Brooks/Cole mathematics series. Monterrey 1987.
- [3] AHLFORS, L., BERS, L. «Riemann's mapping theorem for variable metrics», *Annals of Math.* 72 (1960), 385-404.
- [4] BLANCHARD, P. «Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere», *Bull. Amer. Math. Soc.* 11 (1984), 85-141.
- [5] BRANNER, B. «The Mandelbrot Set», *Proc. Symp. Applied Math.*, (1989), 75-105.
- [6] BRANNER, B., DOUADY, A. «Surgery on Complex Polynomials», Proceedings of the Symposium on Dynamical Systems, Mexico, 1986, *Lecture Notes in Math.*, 1345 11-72, Springer, 1988.
- [7] BRANNER, B., FAGELLA, N. «Homeomorphisms between Limbs of the Mandelbrot Set», *J. Geom. Anal.* 9 (1999), 327-390.
- [8] BRANNER, B., FAGELLA, N. «Extensions of homeomorphisms between limbs of the Mandelbrot Set», pendent de publicació.
- [9] CARLESON, L., GAMELIN, T. *Complex dynamics*, Springer Verlag, 1993.
- [10] DOUADY, A. «Chirurgie sur les Applications Holomorphes», *Proc. Int. Congr. Math.*, Berkeley, 1986, 724-738.
- [11] DOUADY, A., HUBBARD, J. H. «Étude dynamique des polynomes complexes», I,II, *Publ. Math. Orsay* (1984, 1985).
- [12] DOUADY, A., HUBBARD, J. H. «On the Dynamics of Polynomial-like Mappings», *Ann. Scient., Ec. Norm. Sup.* 4^e series, 18 (1985) 287-343.

- [13] FAGELLA, N. «The theory of polynomial-like mappings - The importance of quadratic polynomials», In *Proc. of the 7th EWM meeting*, Madrid 1995, 57-70.
- [14] FAGELLA, N. «Surgery on the limbs of the Mandelbrot set», In *Progress in holomorphic dynamics*, *Pitman Research Notes in Math.* 387, 139-158.
- [15] MAÑÉ, R., SAD, P., SULLIVAN, D. «On the Dynamics of Rational Maps», *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 16 (1983), 193-217.
- [16] MCMULLEN, C. T. «Complex Dynamics and Renormalization», *Annals of Math. Studies*, 135, Princeton University Press, 1994.
- [17] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable. Introductory Lectures*. Vieweg, 1999.
- [18] SHISHIKURA, M. «On the quasiconformal surgery of rational functions», *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 20 (1987), 1-29.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I ANÀLISI
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
fagella@maia.ub.es