Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 15, núm. 1, 2000. Pàg. 29–34

Característiques distintives entre processos mecànics i processos humans de resolució de problemes*

Thomas C. DeFranco i Peter Hilton

> In mathematics, know-how is much more important than mere possession of information ... What is know-how in mathematics? The ability to solve problems —not merely routine problems but problems requiring some degree of independence, judgement, originality, creativity.[1]
>
> **George Polya**

Comprendre com els experts adquireixen l'art de l'ofici en matemàtiques i com en fan ús per resoldre problemes ha estat el focus de la recerca sobre els mecanismes de resolució de problemes en els darrers vint-i-cinc anys. Durant aquest temps els investigadors han fet grans avenços en la comprensió dels processos de resolució de problemes, examinant les diferències entre el comportament d'experts i principiants en diverses tasques matemàtiques. Com a resultat d'aquests esforços de recerca, el terme «expert en solucionar problemes» ha evolucionat segons tipus de problema i en la pròpia definició del terme (Selden i Selden [18]).

Els intents inicials per comprendre l'expertesa en la resolució de problemes es basaven en la teoria del processament de la informació. En aquestes investigacions es demanava als experts pensar en veu alta mentre resolien problemes ben estructurats (és a dir, problemes pels quals un algorisme conegut pot ser aplicat a la seva resolució). Aquests intents feien servir una certa classe de problemes en camps delimitats de forma ben precisa: trencaclosques, jocs (com els escacs) i simples problemes de manual en matemàtiques (problemes de lògica o geometria) i en física. Els protocols de resolució de problemes eren aleshores codificats, en programes d'ordinador, i analitzats. Les simulacions per ordinador consistien en una cadena de regles deductives del tipus «si A aleshores B» que haurien de cercar algorismes eficients i heurístiques per resoldre el problema. Com a resultat, els investigadors

∗ Traducció d'Oriol Serra.

1 En matemàtiques, l'art de l'ofici és molt més important que la simple possessió d'informació... Què és l'art de l'ofici en matemàtiques? La habilitat de resoldre problemes —no tan sols problemes rutinaris sinó problemes que requereixen algun grau d'independència, judici, originalitat, creativitat. George Polya, *Mathematical Discovery.*

eren capaços de reconstruir la manera més eficient de resoldre el problema i desenvolupar una teoria sobre la capacitat humana de resoldre problemes. (Es pot trobar una descipció comprensiva de la teoria del processament de la informació a Newell i Simon [10]). Com a resultat de tots aquests estudis el terme *expert* va esdevenir sinònim d'algú que ha acumulat una quantitat substancial de coneixement en una àrea ben precisa, és a dir, un especialista posseïdor d'un tipus de coneixement particular. A més, hi ha recerques coincidents que indiquen que els experts en resoldre problemes ben estructurats es diferencien dels principiants en (a) tenir una memòria millor per detalls importants del problema, (b) classificar problemes segons la seva estructura matemàtica interna i no segons detalls superficials, (c) avançar en direcció a l'objectiu del problema, enlloc de treballar de recules des d'aquest objectiu a l'hora de resoldre problemes i (d) fer servir algorismes i procediments ben establerts (Selden i Selden [18]; Owen i Sweller [11]).

El comportament discutit fins ara d'un expert en resoldre problemes pot ser descrit millor com de *tipus màquina*, és a dir, el que classifica un problema i condueix una cerca eficient per trobar l'algorisme correcte, que pot ser aplicat per resoldre'l. Malauradament, aquesta descripció no caracteritza el comportament d'individus que treballen en la resolució de problemes en camps complexos i poc familiars. La definició d'expert en un camp específic és limitadora, perquè no té en compte la imperfecció i la barroeria en l'actuació dels individus que naveguen per l'espai de les solucions, de manera vaga però sensible, quan resolen problemes complexos. A través d'una sèrie d'estudis i resums, alguns investigadors van proposar una nova definició d'expert, tot examinant el comportament de doctors en matemàtiques en la resolució de problemes mal estructurats (és a dir, problemes pels que no es pot aplicar cap algorisme conegut de resolució). Aquests investigadors (Schoenfeld [14]; DeFranco [1, 2]; Silver i Metzger [19]) han trobat que els experts en solucionar problemes mal estructurats posseeixen un espectre ampli d'atributs que inclou: (a) coneixement de l'àrea, (b) habilitats en la resolució de problemes, (c) un cert conjunt de creences matemàtiques, (d) habilitats metacognitives (questions de control i selecció d'estratègies i tria o abandó de camins de solució, distribució apropiada dels recursos propis, etc.), i (e) sensibilitat estètica (seleccionant estratègies i observant la solució en base a judicis estètics).

En un estudi amb doctors en matemàtiques, DeFranco [1, 2] va examinar les creences matemàtiques i l'acompliment en la resolució de problemes de setze matemàtics professionals, a qui va proposar quatre problemes mal estructurats. Dels setze matemàtics, vuit havien assolit reconeixement nacional o internacional en la comunitat matemàtica (grup A) mentre que els vuit restants no havien rebut aquests honors (grup B). Els resultats indicaven que els membres del grup A anaven pel davant dels seus colegues del grup B per un marge significativament ampli. A més, pels membres del grup A, el coneixement de l'àrea, les habilitats, tant en la resolució de problemes com metacognitives, i les creences sobre les matemàtiques actuaven com a forces positives a l'hora de resoldre els problemes, mentre que pels membres del grup B, aquests atributs eren en el millor dels casos neutres i, fins i tot, contraproductius durant el procés de resolució. Clarament els setze matemàtics eren *experts en coneixement*, però només els membres del grup A eren *experts en resoldre problemes*. En intentar comprendre aquests resultats, podria resultar útil fer explícita la diferència entre els dos modes de resoldre problemes matemàtics, és a dir, entre màquines i persones.

En comparació amb el comportament de la màquina, els éssers humans experts en resoldre problemes tendeixen a buscar les «característiques especials» d'un problema i no recorren a algorismes per resoldre'ls. Resulta natural i apropiat a les màquines fer servir algorismes per resoldre problemes, és a dir, reconèixer que un problema pertany a una certa classe i després fer servir un mètode de solució, que serveix per tots els problemes d'aquesta classe. D'altra banda, l'ésser humà intelligent, busca les característiques especials del problema particular que li permetran evitar l'ús de l'algorisme. Des de la perspectiva de l'ésser humà, un algorisme hauria de ser percebut com una tècnica comprovada que està disponible quan totes les altres coses fallen. De fet, és més aviat estrany que un mètode general, indicat per a una classe de problemes, sigui l'estratègia millor en cada cas individual.

Per exemple, suposem que una persona i un ordinador han de calcular el producte $39 \cdot 41$. L'ordinador estarà programat per reconèixer aquest problema com un de multiplicació d'enters i, després aplicar un algorisme per calcular aquest producte. Com resol aquest problema una persona intel·ligent? Busca característiques especials que faciliten la solució, en aquest cas reconeixent que $39 \cdot 41 = 40^2 - 1 = 1599$. Resulta obvi que seria absurd programar un ordinador per tenir l'estratègia d'una persona; i que es ineficient per a una persona adoptar l'estratègia de l'ordinador.

En l'estudi de DeFranco [2], el comportament dels matemàtics del grup B s'assemblava en alguns casos al dels experts que treballen en camps ben delimitats; és a dir, del tipus màquina, confiant en la seva habilitat de recórrer a regles i algorismes per resoldre un problema. Malgrat, o fins i tot a causa de, la seva sòlida formació en matemàtiques, els pot haver faltat la flexibilitat d'improvisar, i han pogut tan sols trobar i fer servir tècniques algorísmiques estàndard. A més, en molts casos poden no haver estat capaços de resoldre els problemes, quan els mancava la informació necessària. Per què? Una explicació plausible és que havien aprés a demostrar de la mateixa manera mecànica que havien après els algorismes.

En discutir el paper de les demostracions en l'educació matemàtica, Hanna [3] distingeix entre demostració formal, demostració acceptable i l'ensenyament d'una demostració. La demostració formal és deductiva, abstracta i de naturalesa mecanitzable. Està únicament basada en la lògica matemàtica i es recolza en la forma de l'argument més que en el contingut per provar una proposició. Una demostració acceptable estâ governada per la idea que els que practiquen la matemàtica validen una demostració a través d'un procés social, que accentua el valor de la comprensió i el significat per damunt del rigor. Sobre l'ensenyament d'una demostració, Hanna raona que en els darrers anys s'ha emfasitzat en la naturalesa d'una demostració com a «argument convincent». I que s'ha de fer una distinció entre les «demostracions que proven» i les «demostracions que expliquen».

> Una demostració que prova només ens diu que un cert teorema és cert; proporciona solament raons d'evidència. Només té a veure amb la substanciació, amb el que es coneix com *Rationes cognoscendi*, és a dir, raons de perquè-mantenim-que-això-és-així. Una demostració que explica, d'altra banda, també ens diu *perquè* un teorema és cert; proporciona un conjunt de raons que es deriven del mateix fenomen: *Rationes essendi*, o raons de per-què-això-és-així (Hanna, [3, p. 9]).

Una demostració que prova és formal per naturalesa mentre que una que explica proporciona una fonamentació de les idees matemàtiques implicades en la demostració, exposant així els principis matemàtics subjacents que hi estan connectats.

Hanna creu que els professors s'han d'adonar que entendre les matemàtiques és més que verificar que «... tots els passos d'una cadena deductiva són correctes» [3, p. 12] i que les demostracions explicatives han d'ocupar un lloc més important en el currículum matemàtic.

Schoenfeld [16] veu una demostració des d'una perspectiva semblant però més àmplia. En descriure les matemàtiques com una «ciència de patrons o models», creu que els matemàtics es comprometen en una demostració a través d'«intents sistemàtics, basats en l'observació, l'estudi i l'experimentació» [16, p.60] per descobrir principis matemàtics. Diu,

> Les eines d'un matemàtic són abstracció, representació simbòlica i manipulació simbòlica. Amb tot, el fet de tenir un entrenament en l'ús d'aquestes eines no vol dir que es pensi matemàticament, de la mateixa manera que saber fer ús d'eines de taller no vol dir que es sigui un bon artista. Aprendre a pensar matemàticament significa (a) desenvolupar un punt de vista matemàtic, donant valor als processos de matematització i abstracció i tenint la predilecció d'aplicar-los, i (b) desenvolupar una competència amb les eines de l'ofici i saber-les posar al servei de la comprensió de l'estructura, donant sentit matemàtic [16, p. 60].

Leron [4] defensa el «model estructural» sobre la moda tradicional «lineal» en l'ensenyament de les demostracions a nivell universitari. En el mètode estructural, la demostració s'organitza en nivells, cadascun dels quals consisteix en mòduls independents que representen una idea important de la demostració. El llenguatge heurístic i matemàtic, que es subministra entre els nivells, ajuda a lligar les regles matemàtiques formals i la lògica de la demostració. Aquests fragments annexos estan en l'essència de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. Aquestes explicacions exposen l'estructura matemàtica de la demostració i les interconnexions entre les idees de la demostració i altres branques de les matemàtiques.

De manera similar, Polya [12] creia que tant el raonament de demostratiu (les regles formals i deductives implicades en una demostració) com el raonament plausible (l'evidència informal i inductiva, recollida per comprendre i reafirmar una demostració) són components importants en l'aprenentatge i en l'ús de les matemàtiques per a la resolució de problemes. «El resultat del treball creatiu d'un matemàtic és el raonament demostratiu; una demostració però, es descobreix a través del raonament plausible ...» [12, p. vi]. Pel que fa a l'ensenyament de les matemàtiques, Polya [12] dóna aquest consell,

> Tothom sap que les matemàtiques proporcionen una oportunitat excel·lent d'aprendre el raonament demostratiu, però jo sostinc també que no hi ha cap altra matèria en el currículum de les escoles que doni una oportunitat comparable a aprendre raonament plausible. Jo mateix em dirigeixo als estudiants de matemàtiques de tots els nivells i els dic: Certament, aprenguem a demostrar, però aprenguem també a endevinar. [p. v–vi].

Com s'ha descrit fins aquí, una demostració comporta més que arribar a un resultat per mitjà de tècniques algorísmiques. Implica també recollir evidència matemàtica a través de recorreguts inductius i deductius, sintetitzant la informació i examinant les maneres en què les idees matemàtiques que es troben a la demostració estan connectades i relacionades amb altres àrees de les matemàtiques. Al llarg de les seves vides professionals (en recerca i ensenyament) els matemàtics consumeixen una part considerable del seu temps en les demostracions. La naturalesa de la demostració proporciona una base per adquirir les «eines de l'ofici»; és a dir, el coneixement sobre la disciplina i de com fer servir aquest coneixement dins de la disciplina. Algunes creences sobre el que és una demostració i la cultura on es practica el procés de demostrar, ajuden a emmarcar la visió que té el matemàtic de la seva disciplina.

Si un matemàtic creu que la demostració ha de ser descoberta i ensenyada de manera formal, aleshores les idees, principis i teoremes matemàtics són vistos com a objectes o resultats que han de ser recordats i fets servir per demostrar altres teoremes. En canvi, si creu que les idees matemàtiques haurien de proporcionar evidència de per què una demostració és vàlida, aleshores les idees, principis i teoremes matemàtics es perceben connectats a altres àrees de les matemàtiques i poden ser invocats per a resoldre un problema. Per exemple, saber-se la llei dels cosinus no garanteix que pugui ser invocada en el moment apropiat i que sigui útil per resoldre un problema. Essencialment, aquesta diferència es pot explicar com el fet de ser convençut per una demostració vàlida que una proposició matemàtica és certa i comprendre per què és certa. Una proposició matemàtica esdevé útil només quan es dóna el segon d'aquests processos.

En els darrers deu anys els esforços en la reforma en l'ensenyament de les matemàtiques han convocat educadors de tots els nivells a reexaminar questions al voltant de la pedagogia, el currículum, l'epistomologia i els continguts de coneixement en relació a la pràctica docent i l'aprenentatge dels estudiants (NCTM [7, 8, 9]; MSEB [5, 6]; Schoenfeld [16]; Steen [17]). En el nivell universitari s'han canviat ben poques coses. L'ensenyament a les classes tendeix a crear una cultura que promou l'habilitat algorísmica i una aproximació tipus màquina en l'aprenentatge de les matemàtiques i de la resolució de problemes. Els qui presenten arguments matemàtics, tan autors com professors, haurien de ser conscients de la diferència entre saber una demostració, comprendre per què una demostració és vàlida, comprendre el perquè de la tria d'una determinada línia d'argumentació i comprendre per què una proposició és certa. Quan aquestes distincions són apreciades adequadament i discutides a classe, els estudiants hauran començat realment a adquirir el coneixement matemàtic, que pot fer-los més eficients en la tasca de resoldre problemes.

Referències

[1] DeFranco, T. C. *The Role of Metacognition in Relation to Solving Mathematics Problems Among PhD Mathematicians* (tesi doctoral, New York University), 1987.

[2] DeFranco, T. C. «A Perspective on Mathematical Problem-Solving Expertise Based on Performances of Male PhD Mathematicians». In J. Kaput, A. H. Schoenfeld i E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (p. 195–213), Conference Board on Mathematical Sciences, Issues in Mathematics Education, Vol. 6, Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.

[3] Hanna, G. «Some Pedagogical Aspects of Proof», *Interchange*, 21(1) (1990), 6–13.

[4] Leron, U. «Structuring mathematical proof», *Amer. Math. Monthly*, 90(3) (1983), 174–185.

[5] MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD, *Everybody counts: a report to the nation on the future of mathematics education.* Whasington D.C.: National Research Council, 1989.

[6] MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD, *Moving beyond myths: Revitalizing undergraduate education.* Whasington D.C.: National Research Council, 1991.

[7] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA, 1989.

[8] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Professional Standards for the Teaching of Mathematics.* Reston, VA, 1991.

[9] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Assessment Standards for School Mathematics.* Reston, VA, 1995.

[10] NEWELL, A., SIMON, H.A. *Human Problem Solving*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.

[11] OWEN, E., SWELLER, J. «Should Problem Solving be Used as a Learning Device in Mathematics?», *J. Res. Math. Educ.*, 20 (3) (1989), 322–328.

[12] POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning*, (2 Vols.), Princeton University Press, Princeton, NJ, 1954.

[13] POLYA, G. *Mathematical Discovery*, (2 Vols.), John Wiley and Sons, New York, 1965.

[14] SCHOENFELD, A. H. *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., 1985.

[15] SCHOENFELD, A. H. (ED.) *A source book for college teaching*, MAA Reports No. 2, 1990.

[16] SCHOENFELD, A. H. «Reflections on doing and teaching mathematics» In A. H. SCHOENFELD (Ed.) *Mathematical thinking and problem solving*, 53–70. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1994.

[17] STEEN, L. A. (ED.) *Reshaping college mathematics.* MAA Notes No. 13, 1989.

[18] SELDEN, J., SELDEN, A. *What Does It Take To Be An Expert Problem Solver?*, MAA Online, Research Sampler, No. 4, 1997.

[19] SILVER, E. A., METZGER, W. «Aesthetic influences on expert mathematical problem solving», In D. B. MCLEOD i V. M. ADAMS (Eds). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* 59–74, New York, NY, Springer-Verlag, 1989.

THOMAS DEFRANCO
DEPT. OF CURRICULUM AND
INSTRUCTION GRADUATE AND UNDERGRADUATE
UNIVESITY OF CONNECTICUT
STORRS, CT 06269
tom.defranco@uconn.edu

PETER HILTON
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
BINGHAMTON UNIVERSITY
BINGHAMTON, NY 13902-6000
ESTATS UNITS
marge@math.binghamton.edu