Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 15, núm. 2, 2000. Pàg. 17–25

L'espai de moduli de corbes*

Sebastià del Baño

1 Què és un espai de moduli?

El concepte d'espai de moduli sorgeix de manera natural quan s'estudien problemes de classificació. La paraula *moduli* és emprada per primer cop per B. Riemann en l'estudi del problema de la classificació de les superfícies que porten el seu nom. No obstant això, la definició precisa d'espai de moduli la devem a A. Grothendieck i és relativament recent. Aquesta noció es formula, en la seva manera més natural, en el llenguatge de les categories i els functors. A continuació donarem una idea intuïtiva del concepte de moduli.

Els problemes de classificació són tan ubics com naturals a la Matemàtica. Exemples d'objectes matemàtics que ens interessa classificar, respecte d'una noció d'isomorfisme prèviament establerta, són: els grups (els grups de Lie, els grups finits...), les varietats (topològiques, diferenciables, algebraiques, complexes...), les equacions diferencials, les singularitats, les fibracions (els fibrats vectorials, els espais recobridors...), les representacions d'un grup... Per classificar aquests objectes cerquem invariants, és a dir, altres objectes o quantitats que associem als objectes originals i que ens permeten distingir-ne els que no són equivalents. Habitualment els primers invariants que trobem són invariants *discret*. Per exemple, per a les varietats disposem de la noció de dimensió, que és un invariant ja que dues varietats de diferent dimensió no poden ser equivalents, i que és discret, ja que és un nombre enter. Sovint, aquests primers invariants no són prou fins per poder diferenciar objectes no equivalents. Aleshores, apareix la conveniència de disposar d'un altre tipus d'invariant, un invariant *continu*, que pot ser un nombre real o quelcom més complicat, com un punt sobre una varietat. Això és el que Riemann batejà amb el nom de *moduli*.

* Conferència pronunciada a la Segona Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans el març de 1999. Agraeixo a la Societat Catalana de Matemàtiques i en especial a en Jaume Aguadé l'oportunitat de contribuir a aquesta Trobada. Aquest treball esta parcialment subvencionat per la DGCYT beca PB93-0790.

Un exemple senzill que il·lustra aquestes idees és el de la classificació dels subespais lineals de $\mathbb{R}^n$. Un invariant clar associat a un subespai és la seva dimensió, que és un enter $d \in \{0, \ldots, n\}$. Fixada la dimensió, d, el conjunt dels subespais de $\mathbb{R}^n$ d'aquesta dimensió és, de manera natural, el conjunt de punts d'una varietat diferenciable connexa de dimensió $d(n-d)$, la Grassmaniana $\mathrm{Grass}_d(\mathbb{R}^n)$. Aquesta varietat és, per tant, l'espai de moduli de subespais de $\mathbb{R}^n$ de dimensió d. Un cas ben conegut el trobem posant $d = 1$: classifiquem aleshores les rectes de $\mathbb{R}^n$ que passen per l'origen, i obtenim, així, l'espai projectiu $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Grass}_1(\mathbb{R}^n)$.

En aquesta conferència volem explicar alguns fets bàsics de l'espai de moduli de corbes.

2 Les corbes

Els objectes que volem classificar són les corbes algebraiques. Hi ha diferents maneres de presentar aquests objectes, cadascuna de les quals té associada la noció d'equivalència corresponent. Presentem-les breument (la noció d'equivalència és l'evident en cada context):

1. Corbes algebraiques llises, projectives i connexes sobre un cos k. És a dir, subconjunts de l'espai projectiu $\mathbb{P}^n_k$ definits com a lloc de zeros d'equacions polinomials homogènies amb coeficients a k:

$$\left\{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n_k \mid P_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m\right\},$$

tals que el rang de la matriu $(\partial P_i / \partial x_j)$ sigui $n-1$ a qualsevol punt d'aquest lloc.

Els exemples més senzills corresponen a les corbes planes, és a dir, corbes de $\mathbb{P}^2_k$, definides per una sola equació. Per exemple:

(a) una recta: $x_0 = 0$,
(b) una cónica: $x_0^2 + x_1 x_2 = 0$,
(c) una cúbica: $x_1^2 x_0 = x_2(x_2 - x_0)(x_2 - \lambda x_0)$, per a $\lambda \in k - \{0, 1\}$,
(d) les corbes de Fermat: $x_0^n + x_1^n = x_2^n$, per a $n \in \mathbb{N}$.

2. Extensions de k de grau de transcendència 1. A una corba algebraica li podem associar el seu cos de funcions racionals, que és una extensió de k de grau de transcendència 1. Recíprocament, tota extensió de k de grau de transcendència 1 és el cos de funcions racionals d'una corba projectiva llisa.

En el cas en què $k = \mathbb{C}$, aquests llocs de zeros són, de manera natural, superfícies de Riemann compactes i connexes. De fet, en aquest cas, els objectes anteriors estan en bijecció amb:

3. Superfícies de Riemann compactes i connexes (és a dir, superfícies amb canvis de carta holomorfs).

Una superfície de Riemann és, en particular, una superfície orientable. Les diferents estructures holomorfes estan en bijecció amb les estructures conformes i, per tant, una altra forma de presentar les corbes algebraiques és:

4. Superfícies compactes, connexes i orientables amb una classe conforme de mètriques (i.e. $(X, g) \sim (X, e^{\psi} \cdot g)$ per $\psi \in C^\infty(X)$).

Les corbes algebraiques abunden a la matemàtica: on hi hagi equacions polinomials hi ha corbes algebraiques. A més, la darrera de les quatre caracteritzacions anteriors permet trobar exemples a la vida real: la vora d'un donut i la vora d'una tassa de café (llisa) són superfícies compactes i connexes que hereten una mètrica de $\mathbb{R}^3$ (figura 1). Prenent la classe conforme d'aquesta mètrica trobem exemples dels objectes que estem considerant. Observem, però, que tot i que ambdós objectes són homeomorfs, poden ésser no conformement equivalents i així donar lloc a corbes algebraiques no isomorfes.

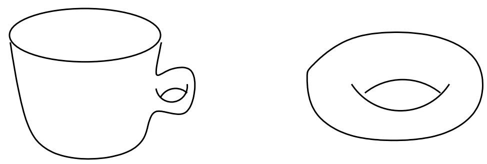

FIGURA 1: Dues superfícies de $\mathbb{R}^3$.

Cadascuna de les diferents maneres d'entendre una corba algebraica té interès propi, i totes resulten complementàries a l'hora d'estudiar diferents aspectes de les corbes algebraiques. De vegades, però, nosaltres preferim la primera descripció. El motiu és que amb un plantejament més algebraic podem admetre com a cos base no només el cos dels complexos, $\mathbb{C}$, sinó també qualsevol altre cos, com per exemple un cos finit. És un fet remarcable que resultats per a varietats complexes, en particular pels espais de moduli que considerarem, es poden provar per via de l'estudi de les varietats anàlogues definides sobre cossos finits. No obstant això, el lector amb poca familiaritat amb la geometria algebraica pot (abans de posar remei a aquesta mancança) suposar que $k = \mathbb{C}$.

3 Els espais de moduli

L'objectiu últim és classificar les corbes algebraiques. Per a $k = \mathbb{C}$ podem usar la topologia d'aquestes corbes per a trobar un invariant discret: en efecte, en aquest cas les corbes algebraiques són superfícies compactes i connexes. La classificació topològica ve aleshores donada per un invariant enter: el *gènere*.

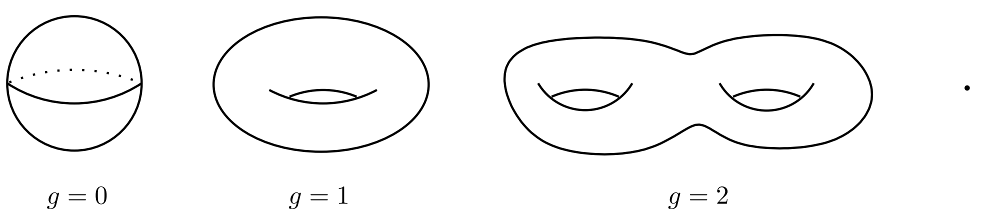

FIGURA 2: Superfícies de gèneres $0, 1$ i 2.

De fet, per a corbes a $\mathbb{P}^2$ disposem de la *fórmula del gènere* que ens permet calcular el gènere de la corba en funció del grau de l'equació polinomial que la defineix. Concretament, si una corba plana C està definida per un polinomi homogeni P de grau d, aleshores es té que $g = (d-1)(d-2)/2$. En particular, les rectes i les còniques tenen gènere 0 i les cúbiques, gènere 1. El gènere és pot definir d'altres maneres, *e. g.*, com la dimensió de l'espai de formes holomorfes definides sobre la superfície de Riemann corresponent, que tenen sentit sobre qualsevol cos i, per tant, es pot parlar de gènere en qualsevol dels contextos presentats.

Es pot veure que existeixen corbes que són homeomorfes, és a dir, del mateix gènere, però que no són isomorfes. L'objectiu és aleshores donar una estructura natural de varietat algebraica al conjunt

$$\mathcal{M}_g = \left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'isomorfia de corbes algebraiques} \\ \text{llises projectives de gènere } g \end{array} \right\}.$$

Aquest espai rebrà el nom d'*espai de moduli de corbes* (llises, projectives i connexes) de gènere g.

Per a gèneres baixos, aquest espai de moduli és especialment senzill:

- Totes les corbes de gènere 0 són isomorfes a $\mathbb{P}^1$; per tant, $\mathcal{M}_0$ té només un punt.
- Hem vist que les cúbiques C_λ d'equació

  $$x_1^2 x_0 = x_2(x_2 - x_0)(x_2 - \lambda x_0)$$

  amb $\lambda \in k - \{0,1\}$ són corbes de gènere 1. De fet, es pot provar sense dificultat que, sobre qualsevol cos algebraicament tancat, tota corba de gènere 1 és isomorfa a una d'aquestes, per a un cert λ, i que $C_\lambda \simeq C_{\lambda'}$ si, i només si, $j(\lambda) = j(\lambda')$, on definim

  $$j(\lambda) = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

  En conclusió, les corbes de gènere 1 estan classificades per un invariant, l'invariant $j \in k$. O, en d'altres paraules, es té que $\mathcal{M}_1 \simeq k$.

Per a $g \geq 2$ la situació no és tant senzilla. El principal resultat aleshores és el que garanteix l'existència de l'espai de moduli $\mathcal{M}_g$.

1 Teorema (Riemann, Teichmüller, Mumford). *Per a cada gènere g, existeix un espai de moduli groller, $\mathcal{M}_g$, de corbes projectives llises i connexes de gènere g.*

Expliquem breument què significa la noció d'espai de moduli *groller*. Per començar, vol dir que els punts de $\mathcal{M}_g$ estan en bijecció amb els objectes que volem classificar, és a dir, que tenim una bijecció de conjunts:

$$J : \left\{ \begin{array}{c} \text{Corbes projectives llises} \\ \text{de gènere } g \text{ sobre } \overline{k} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Punts de } \mathcal{M}_g \\ \text{sobre } \overline{k} \end{array} \right\}.$$

Aquesta condició és molt intuïtiva, però no té molt valor per si mateixa. En efecte, qualsevol varietat algebraica amb el mateix cardinal la verifica. Necessitem afegir-hi una condició de continuïtat. Requerim que per a qualsevol família de corbes π :

$C \longrightarrow S$ (és a dir, π és un morfisme de varietats algebraiques tal que, per a cada $s \in S$, la fibra $C_s = \pi^{-1}(s)$ és una corba projectiva llisa) l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathcal{M}_g \\ s & \longmapsto & J(C_s) \end{array}$$

sigui un morfisme de varietats algebraiques i que la varietat $\mathcal{M}_g$ sigui universal respecte d'aquesta propietat. (El terme *groller* s'utilitza en contraposició dels espais de moduli *fins*, que és un concepte que no necessitarem.)

Assegurada l'existència dels espais de moduli, voldríem conèixer les seves propietats. Els espais $\mathcal{M}_g$ són força interessants i complicats. Enumerem a continuació algunes propietats d'aquests espais.

1. A més d'aparèixer en geometria algebraica/complexa/conforme, l'espai $\mathcal{M}_g$ apareix en els contextos següents:

   Topologia. $\mathcal{M}_g$ té la mateixa cohomologia racional que l'espai classificador del *mapping class group*. Aquest grup és el grup d'automorfismes exteriors del grup fonamental d'una superfície topològica de gènere g.

   Teoria de nombres. On espais similars, anomenats *corbes modulars*, ocupen un lloc preeminent.

   Física. A la teoria de Feynmann s'integra l'acció sobre l'espai de tots els possibles camins entre dues posicions de masses puntuals. Si reemplacem les partícules per *cordes* la integral corresponent s'estén sobre l'espai de superfícies i, eventualment, s'obté una integral sobre $\mathcal{M}_g$. Aquesta integral s'anomena la *funció de partició de la corda bosònica de Polyakov*.

   Geometria enumerativa. Idees provinents de la física suggereixen un nou producte en l'espai de cohomologia d'una varietat projectiva llisa a partir d'espais de moduli similars a $\mathcal{M}_g$. L'anell resultant rep el nom de *cohomologia quàntica* de la varietat o també *invariants de Seiberg Witten*. M. Kontsevich ha mostrat com propietats elementals de la cohomologia quàntica revelen resultats inesperats en geometria enumerativa. Per exemple, la propietat associativa d'aquest producte ens dóna el nombre de corbes racionals per $3n-1$ punts genèrics de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

2. La varietat $\mathcal{M}_g$ és irreductible, en particular és connexa. No és llisa, peró és el quocient d'una varietat llisa per un grup finit. Aquest tipus de varietats, que s'anomenen V-varietats, tenen moltes de les propietats de les varietats llises. Per exemple, la seva cohomologia racional es comporta com la cohomologia d'una varietat llisa.
3. L'espai de moduli $\mathcal{M}_g$ té la dimensió suggerida pel còmput de Riemann, és a dir, $\dim \mathcal{M}_g = 3g-3$ si $g > 1$. Com hem vist abans, $\dim \mathcal{M}_0 = 0$ i $\dim \mathcal{M}_1 = 1$.
4. La cohomologia de $\mathcal{M}_g$ ha estat l'objecte d'estudi de molts investigadors, però roman un objecte misteriós. Algunes de les coses que en sabem són les següents:

   a) (Harer) Si $g > 2$, aleshores $H^0(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$, $H^1(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) = 0$, $H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$, $H^3(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) = 0$ i $H^4(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^2$.

b) (Teorema d'estabilitat de Harer) $H^i(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q})$ és independent de g per a $g \geq 3i - 1$. Aquest resultat permet definir l'anell de cohomologia estable: $\lim_{g\to\infty} H^*(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q})$. Mumford ha conjecturat la forma que ha de tenir aquest anell.

c) (Harer-Zagier) La característica d'Euler-Poincaré de $\mathcal{M}_g$ *com a orbifold* és

$$\chi(\mathcal{M}_g) = \frac{\zeta(1-2g)}{2-2g}.$$

Es coneixen també fórmules, molt més complicades, per a la característica d'Euler Poincaré de $\mathcal{M}_g$ com a varietat.

5. (Díaz) $\mathcal{M}_g$ no conté cap subvarietat compacta/projectiva de dimensió $> g - 2$. En particular $\mathcal{M}_g$ no és compacta/projectiva.

4 Altres espais de moduli relacionats

L'espai de moduli $\mathcal{M}_g$ no és compacte i això és així perquè hi ha corbes llises que degeneren a corbes singulars. Per compactificar $\mathcal{M}_g$ inclourem certes corbes singulars, les corbes estables.

2 Definició *Una corba C es diu que és* estable *si satisfà les dues condicions següents:*

1. És llisa o les seves singularitats són nodes ordinaris.

2. El seu grup d'automorfismes és finit.

Per a les corbes estables es té un teorema d'existència de l'espai de moduli anàleg a l'enunciat anteriorment.

3 Teorema *Per a cada gènere $g \geq 2$, existeix un espai de moduli groller de corbes estables $\overline{\mathcal{M}}_g$. És una varietat compacta/projectiva i conté $\mathcal{M}_g$ com a un obert dens.*

Observacions. 1. Amb la definició anterior una corba de génere 0 o 1 no és estable, ja que el seu grup d'automorfismes no és finit, i és per això que hem exclòs aquests dos casos en l'enunciat del teorema. De seguida aclarirem aquesta confusió.

2. Una qüestió que sorgeix de forma natural és: com és la vora $\partial\overline{\mathcal{M}}_g = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$? Lògicament, consisteix en corbes estables que no són llises. Considerem diversos casos:

(a) Per a gènere 1 tenim una única corba estable no llisa. S'obté identificant dos punts d'una corba de gènere 0.

Si afegim aquest punt a la recta afí $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{A}^1_k$, obtenim la recta projectiva. És a dir, en aquest cas trobem que $\overline{\mathcal{M}}_1 \simeq \mathbb{P}^1_k$.

(b) Per a gènere 2 hi ha cinc tipus topològics de corbes estables no llises. En la figura 4 en veiem tres exemples (en cada exemple hem indicat el gènere de la corba abans d'identificar els punts).

(c) En gènere 3 hi ha molts més tipus topològics de corbes estables. A la figura 5 podem veure, a títol d'exemple, set corbes d'aquestes.

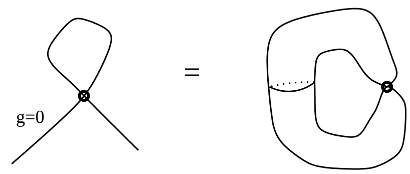

FIGURA 3: Corba estable no llisa de gènere 1.

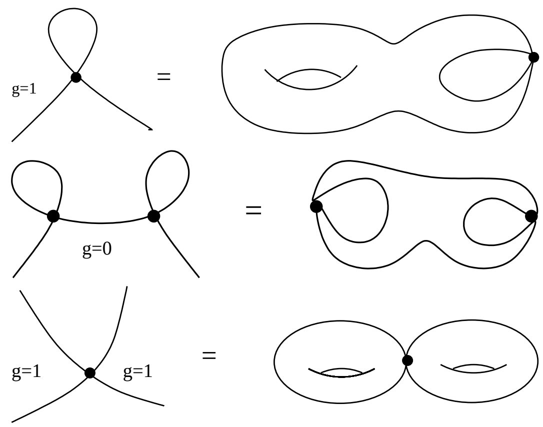

FIGURA 4: Algunes corbes estables de gènere 2.

En tots aquests exemples veiem que les corbes estables a $\partial\overline{\mathcal{M}}_g$ s'obtenen a partir de corbes llises de gènere menor, per identificació de parelles de punts. Així, l'estudi de la vora de l'espai de moduli està lligat a l'estudi de l'espai de moduli de corbes amb punts marcats.

Definim una corba marcada estable com una corba amb nodes ordinaris C, marcada en n punts diferents $x_1, \dots, x_n \in C$, de manera que el grup d'automorfismes $\mathrm{Aut}(C, x_1, \dots, x_n)$ és finit. Les tècniques que s'utilitzen per demostrar l'existència dels espais de moduli anteriors permeten, un cop més, provar l'existència de l'espai de moduli de corbes marcades estables.

4 TEOREMA *Existeixen espais de moduli grollers de corbes llises marcades* $(C, x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{M}_{g,n}$. *I de corbes marcades estables en* n *punts llisos,* $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. *A més,* $\dim \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g - 3 + n$.

OBSERVACIONS 1. Com que un automorfisme de $\mathbb{P}^1$ porta qualssevol tres punts de $\mathbb{P}^1$ a $0, 1, \infty$, veiem que $\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}_{0,1} \simeq \mathcal{M}_{0,2} \simeq \mathcal{M}_{0,3}$. A més $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1, 0, 1, \infty) = \{1\}$, que és estable. Recuperem així els espais de moduli $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_{0,1}$ i $\mathcal{M}_{0,2}$, que havíem exclòs anteriorment.

2. De manera anàloga, els automorfismes d'un tor porten qualsevol punt a un de prefixat. Per tant $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_{1,1}$. Oblidarem $\mathcal{M}_1$, i només considerarem $\mathcal{M}_{1,1}$, que parametritza corbes estables.

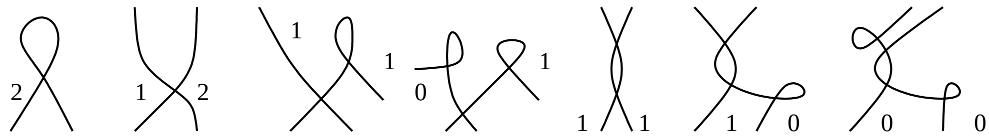

FIGURA 5: Corbes estables de gènere 3.

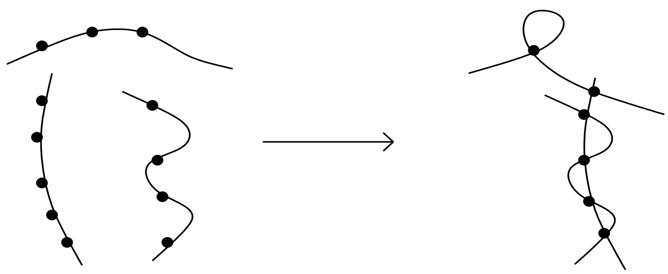

FIGURA 6: Una corba estable s'obté enganxant corbes llises marcades.

Un problema molt interessant és el de l'estudi de la cohomologia dels espais $\mathcal{M}_{g,n}$ i $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Com mostren els exemples previs, el problema de relacionar ambdós espais té una gran complicació combinatòria.

Per als espais de gènere 0, aquest problema ha estat resolt per Y. Manin. L'espai $\mathcal{M}_{0,n}$ és un espai de configuracions i la seva cohomologia es pot trobar fàcilment a partir de resultats de V. Arnold sobre el grup de trenes acolorides. En aquest cas, la vora de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ consisteix en corbes com la presentada en la figura 7. La vora es

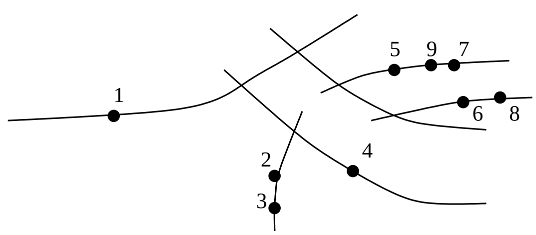

FIGURA 7: Corba marcada estable de gènere 0.

pot descompondre en estrats indexats per arbres de n branques. L'estudi d'aquesta estructura en funció dels arbres que apareixen dóna lloc a una recurrència que permet trobar la següent fórmula pel polinomi de Poincaré de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. Si posem

$$\varphi(T,t) := T + \sum_{n=2}^{\infty} P_t(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \cdot \frac{T^n}{n!},$$

aleshores φ és l'única solució a $T + T^2\mathbb{Q}[t][[T]]$ de l'equació diferencial

$$(1 + t^2T - t^2\varphi)\varphi_T = 1 + \varphi.$$

D'altra banda, E. Getzler ha trobat expressions per a la cohomologia de $\mathcal{M}_{0,n}$ i de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ com a representacions del grup simètric $\mathfrak{S}_n$, que actua permutant els punts marcats.

Per a gèneres superiors, aquesta combinatòria es complica molt i els estrats vénen parametritzats per grafs. Mitjançant la teoria de les *modular operads* Getzler i M. Kapranov han donat una fórmula explícita que relaciona les cohomologies de $\mathcal{M}_{g,n}$ i $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Tot això més la teoria d'Eichler i Shimura, permet trobar la cohomologia de $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ amb la $\mathfrak{S}_n$-acció obtinguda per permutació dels punts marcats.

Per a gènere 2, la cohomologia (i, fins i tot, els grups de Chow) de $\overline{\mathcal{M}}_2$ i $\overline{\mathcal{M}}_{2,1}$ són ben coneguts. Getzler ha trobat la cohomologia de $\overline{\mathcal{M}}_{2,2}$ i $\overline{\mathcal{M}}_{2,3}$ amb l'acció dels grups simètrics respectius.

Un aspecte interessant de la cohomologia de les varietats algebraiques és el concepte de *cohomologia algebraica*. Anomenem així el subespai de la cohomologia format pels cocicles representats per subvarietats algebraiques. Es pot veure sense dificultat que tota la cohomologia de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ és algebraica. Per a gènere 1, gràcies als resultats de Getzler, sabem que la cohomologia de $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ és tota algebraica si $n < 11$ i que per a $n \geq 11$ apareix cohomologia no algebraica. El mateix Getzler ha provat també que $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ només té cohomologia algebraica per a $n \leq 3$.

La nostra contribució a l'estudi d'aquests grups de cohomologia la dóna el resultat següent:

5 Teorema (S. del Baño, C. Faber i G. van der Geer, treball en curs). *L'espai $\overline{\mathcal{M}}_{2,10}$ té cohomologia no algebraica. (A més hi ha fortes indicacions que $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ per a $n < 10$ només té cohomologia algebraica i es té una descripció d'aquesta.)*

La prova d'aquest resultat es realitza especialitzant l'espai de moduli corresponent sobre cossos finits on, aplicant les conjectures de Weil, podem reduir el problema a comptar el nombre de punts de certs stacks algebraics.

Max-Planck-Institut für Mathematik
Vivatsgasse 7
53111 Bonn
Alemanya
Sebas@mpim-bonn.mpg.de