

Un punt de vista dinàmic sobre la geometria*

MARÍA DEL CARMEN ROMERO FUSTER

1 Introducció

Són cada dia més comuns els problemes de detecció i reconeixement de formes i objectes a partir d'informacions obtingudes per mitjans tecnològics diversos: radars, satèl·lits, escàners, tomografies, etc. Totes aquestes aplicacions s'inclouen al món de la visió computacional i l'anàlisi d'imatges. Però observem que per darrere de tot això es troba la necessitat de descriure propietats topològiques i geomètriques d'objectes parcialment coneguts i que, en una bona part dels casos, es troben en moviment amb relació a l'observador. Aquestes consideracions ens condueixen de manera natural al plantejament de qüestions del tipus següent dins de l'estudi de la geometria:

- a)* Anàlisi de les característiques més típiques que podem esperar en la majoria dels fenòmens (genericitat).
- b)* Estabilitat de les característiques geomètriques dels objectes en relació a perturbacions ambientals diverses.
- c)* Possibilitat de reconstruir globalment un objecte a partir d'informacions locals que depenen del punt d'observació.
- d)* Descripció de l'evolució de la forma d'un objecte.

Aquests plantejaments ens indiquen la conveniència d'introduir una visió dinàmica en l'estudi de la geometria de les subvarietats de diversos espais (euclidià, afí o de Lorentz, segons les aplicacions d'interès).

L'objectiu d'aquest article consisteix a explicar com l'aplicació adequada de tècniques pròpies de la topologia diferencial (anàlisi de les singularitats i de l'estabilitat d'aplicacions diferenciables, caracterització dels fenòmens genèrics a través

* Conferència pronunciada a la Tercera Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de la Universitat de València el març de 2000. Treball parcialment subvencionat per la DGICYT beca núm. PB96-0785.

de transversalitat a subespais convenients dels espais de sortidors...) ens permet adoptar aquest punt de vista dinàmic sobre l'estudi dels fenòmens geomètrics exigint per les necessitats dels avenços tecnològics actuals. En aquest sentit, ens proposem, no ja entrar en la discussió concreta sobre possibles aplicacions, sinó establir el pont entre l'estudi de la geometria clàssica de les subvarietats (abordarem ací tan sols el cas de l'espai euclidià) i el llenguatge de la topologia diferencial, o més concretament el de la teoria de singularitats d'aplicacions diferenciables. Tal pont es construeix damunt de la idea de contacte entre subvarietats. De fet, veurem que aquest és el punt de partida per al desenvolupament de la geometria genèrica, ja que ens permet expressar conceptes típics de la geometria diferencial, com ara punts d'inflexió o vèrtexs de corbes o punts parabòlics i umbílics de superfícies en termes de singularitats de funcions. Una vegada en aquest terreny, trobem les condicions idònies per a tractar qüestions com la genericitat, l'estabilitat o l'evolució de propietats relatives a les formes dels objectes.

Cal afegir que aquest context resulta ser molt adequat no només de cara a possibles aplicacions, sinó també per a la formulació i obtenció de diverses conseqüències teòriques de tipus global, com il·lustrarem a la secció 6 amb la discussió d'alguns resultats i conjectures relatius a superfícies en $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

2 Geometria, contacte i singularitats

Seguint el model de F. Klein, podem dir que estudiar la geometria d'una subvarietat S de $\mathbb{R}^n$ consisteix a analitzar aquelles característiques de S que romanen invariants sota l'acció del grup de la geometria considerada (transformacions rígides, afins, grup de Lorentz, etc.). Doncs, per a estudiar les propietats de la subvarietat S sembla adequat aproximar-la en cada punt per algun objecte conegut (= model) invariant pel grup d'equivalències de l'esmentada geometria. Aleshores, les característiques pròpies del model que millor aproxima la subvarietat S en el punt p direm que són els invariants geomètrics locals de S en p . Podem, doncs, concloure que l'estudi de les propietats geomètriques locals de les subvarietats de $\mathbb{R}^n$ es redueix a l'estudi dels contactes d'aquestes subvarietats amb els models de la geometria en qüestió.

Siguin X i Y dues subvarietats de $\mathbb{R}^n$, que podem considerar localment definides com $X = g(\mathbb{R}^m)$, $Y = f^{-1}(0)$, on $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una immersió i $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és una submersió. Suposem que $p \in X \cap Y$, és a dir, $p = g(x)$ i $f \cdot g(x) = 0$. Podem detectar el *contacte* entre X i Y en el punt p , a través de l'aplicació composta, $f \cdot g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ observant que, per a existir algun tipus de contacte entre X i Y en p , el grau de tangència entre aquestes subvarietats en el punt p ha de ser major que el mínim possible. Ja que $T_p X$ no és transversal a $T_p Y$. Però això és equivalent a exigir que $\text{rang } d(f \cdot g)(x) < \min(m, k)$, o amb altres paraules: *l'aplicació $f \cdot g$ té una singularitat en el punt x* . Aquesta aplicació serà anomenada *aplicació de contacte* entre X i Y .

Tenim així que l'estudi de les singularitats de l'aplicació $f \cdot g$ ens proporciona una manera d'analitzar el tipus de contacte entre les subvarietats X i Y . Més formalment: donades les subvarietats X_i i Y_i , $i = 1, 2$ de $\mathbb{R}^n$ tals que $\dim X_1 = \dim X_2$ i $\dim Y_1 = \dim Y_2$, direm que el contacte de X_1 i Y_1 en un punt comú p_1 és del mateix tipus que el de X_2 i Y_2 en p_2 si existeix algun difeomorfisme local $H: (\mathbb{R}^n, p_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, p_2)$ tal que $H(X_1) = X_2$ i $H(Y_1) = Y_2$. La classe de contacte del parell (X, Y) en el punt y la denotarem per $\mathcal{K}(X, Y; y)$. J. Montaldi ([47]) va provar que:

- a) $\mathcal{K}(X, Y; \gamma)$ està completament determinada pel tipus de singularitat de l'aplicació de contacte del parell (X, Y) amb relació al grup $\mathcal{K}$ de Mather. (La condició de $\mathcal{K}$ -equivalència indica que les àlgebres locals de contacte de les dues aplicacions són isomorfs. Vegeu [42]). És a dir, si $g_i: (X_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \gamma_i)$, representa una immersió de la varietat X_i , $i = 1, 2$ i $f_i: (\mathbb{R}^n, \gamma_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ és tal que $Y_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$, llavors, es verifica que

$$\mathcal{K}(X_1, Y_1; \gamma_1) = \mathcal{K}(X_2, Y_2; \gamma_2) \Leftrightarrow f_1 \cdot g_1 \sim_{\mathcal{K}} f_2 \cdot g_2,$$

- b) la classe de contacte de X amb Y depèn exclusivament de X i Y i no de les aplicacions g i f triades per a representar-les.

En el cas que Y siga una hipersuperfície, tindrem que $q = 1$; per tant, l'aplicació de contacte és una funció, $f \cdot g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, que pren valors en $\mathbb{R}$. Aleshores, existirà un contacte especial entre X i Y sempre que aquesta funció tinga una singularitat degenerada (és a dir, no estable) en el punt x . En aquest cas, la forma quadràtica Hessiana, $\mathcal{H}(f \cdot g)(x)$, és degenerada sobre l'espai tangent a X en x ; llavors existeix $u \in T_x X$ tal que $\mathcal{H}(f \cdot g)(u, v) = 0$, $\forall v \in T_x X$. El vector u serà denominat *direcció de contacte* entre X i Y en $p = g(x)$. No és difícil verificar que la direcció de contacte és un invariant de la classe de contacte.

3 Contactes amb hiperesferes i hiperplans

D'acord amb les anteriors consideracions tenim que la geometria diferencial d'una subvarietat X de $\mathbb{R}^n$ està força lligada als seus contactes amb les hiperesferes i hiperplans de l'espai ambient.

Representem localment la subvarietat X com la imatge d'una immersió $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ i siga $S(a, r)$ una hiperesfera de centre $a \in \mathbb{R}^n$ i radi r , tangent a X . Llavors, la funció de contacte de X amb $S(a, r)$ ve donada per l'expressió següent:

$$d(x) = ||g(x) - a||^2 - r^2.$$

De la mateixa manera, la funció de contacte de X amb un hiperplà tangent de vector normal v i distància ρ a l'origen de coordenades ve donada per

$$h(x) = \langle g(x), v \rangle - \rho^2.$$

Així, si volem estudiar tots els possibles contactes de X amb les hiperesferes de $\mathbb{R}^n$ haurem de considerar la família de funcions distància al quadrat

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, b) &\longmapsto ||g(x) - b||^2. \end{aligned}$$

Anàlogament, els contactes de M amb els hiperplans de $\mathbb{R}^n$ vénen descrits per les singularitats de la família de funcions altura

$$\begin{aligned} \lambda: \quad \mathbb{R}^m \times S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto \langle g(x), v \rangle. \end{aligned}$$

Com que la classificació geomètrica dels diversos punts de la subvarietat X ve donada pel grau d'aproximació de X als models (hiperesferes i hiperplans) en cadascun d'ells, tenim que és possible redefinir conceptes com ara vèrtex i punt d'inflexió

d'una corba plana, punt de torsió nul·la d'una corba espacial, punts umbílics i parabòlics de superfícies, etc., a través de les diverses singularitats de les funcions anteriors.

4 Alguns comentaris sobre famílies de funcions

Introduïrem a continuació alguns conceptes rellevants en l'estudi de les famílies de funcions ([1], [14], [42], [51]):

Donada una família de funcions sobre X amb paràmetres en un espai C

$$\begin{aligned} F: \quad X \times C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, c) &\longmapsto F_c(x) \end{aligned}$$

considerem el subconjunt

$$\Sigma(F) = \{(x, c) \in X \times C : x \text{ és un punt singular de } F_c\}.$$

Amb condicions (genèriques) adequades sobre els sortidors de la família F , és a dir, si F és una família versal (vegeu [14] o [51]), es verifica que $\Sigma(F)$ és una subvarietat de $X \times C$ de la mateixa dimensió que C . La denominem *varietat catàstrofe* de F . En aquest cas, la restricció de la projecció $\pi: X \times C \rightarrow C$ a la subvarietat $\Sigma(F)$

$$\begin{aligned} \chi_F: \quad \Sigma(F) &\longrightarrow C \\ (x, c) &\longmapsto c \end{aligned}$$

és coneguda com l'*aplicació catàstrofe* associada a F .

La imatge en C del conjunt singular de χ_F ,

$$\mathcal{B}(F) = \{c \in C : F_c \text{ té alguna singularitat no estable}\},$$

és el *subconjunt de bifurcació* de la família F . Si F és una família genèrica, el subconjunt $\mathcal{B}(F)$ està estratificat d'acord amb les diverses singularitats de les funcions F_c . Alguns estrats d'interès són els $\mathcal{B}_k(F)$, definits com:

$$\{c \in \mathcal{B}(F) : F_c \text{ té alguna sing. de corang 1 i codim } k\},$$

és a dir, si $c \in \mathcal{B}_k(F)$ aleshores existeix algun $x \in X$ tal que el germen de la funció F_c en el punt x és $\mathcal{A}$ -equivalent al germen $x_1^{k+2} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_m^2$.

Finalment, el *subconjunt de Maxwell* de la família F es defineix com

$$\mathcal{M}(F) = \{c \in C : F_c \text{ té algun valor crític múltiple}\}.$$

5 La família de funcions distància al quadrat

L'estudi de les singularitats genèriques de la família d va ser introduït per I. R. Porteous en ([49] (1971)). Posteriorment, E. Looijenga ([41]) i J. Montaldi ([46]) analitzaren separatament les condicions adequades sobre una immersió perquè les famílies d i λ associades siguin genèriques (la qual cosa implica versal com a germen en la majoria dels punts). En particular, van provar que existeix un subconjunt residual (i per tant dens) d'immersions d'una subvarietat X en $\mathbb{R}^n$ en la topologia C^∞ de

Whitney sobre $\text{Imm}(X, \mathbb{R}^n)$ amb aquestes condicions. Tals immersions seran dites *genèriques*.

El punt de partida en l'anàlisi de les singularitats de la família d consisteix en l'observació que la varietat catàstrofe corresponent,

$$\Sigma(d) = \left\{ (x, a) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : \frac{\partial d_a}{\partial x} = 0 \right\},$$

és precisament el fibrat normal a la subvarietat $X = \mathcal{G}(\mathbb{R}^m)$ en $\mathbb{R}^n$. Així, si denotem per π la projecció canònica de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sobre el segon factor, tenim que $\pi|_{\Sigma(d)}$ és l'aplicació exponencial normal. En conseqüència, les singularitats estables d'aquesta aplicació poden ser analitzades des del punt de vista de la teoria de famílies versals de funcions (en altres paraules, de la teoria de desdoblaments).

El conjunt de bifurcació de la família d ve donat per

$$\mathcal{B}(d) = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m \text{ amb } \frac{\partial d_a}{\partial x} = \frac{\partial^2 d_a}{\partial x^2} = 0 \right\}$$

i està format pels centres d'hiperesferes de $\mathbb{R}^n$ amb contacte d'ordre almenys 2 amb la subvarietat X . Aquest conjunt és clàssicament conegut com el *conjunt focal* de X en $\mathbb{R}^n$.

Segons els anteriors comentaris, per a una subvarietat genèrica de dimensió $m \geq 2$ en $\mathbb{R}^n$, es verifica que $\mathcal{B}(d)$ és un subconjunt estratificat de $\mathbb{R}^n$. Els seus estrats de dimensió superior són subvarietats $(n-1)$ -dimensionals compostes per punts que indueixen funcions distància al quadrat amb singularitats de tipus plec (A_2). És possible provar que els subconjunts, els quals anomenarem *eixos de regressió* o *arestes focals* de X ,

$$\mathcal{B}_k(d) = \{a \in \mathcal{B}(d) : d_a \text{ té una singularitat de tipus } A_k\}$$

són subvarietats de dimensió $n-k+1$ (vegeu [50] per al cas de superfícies en $\mathbb{R}^3$, o [58] per a hipersuperfícies en general). Per tant, $\mathcal{B}_n(d)$ és una unió de corbes. Els seus extrems són punts que determinen singularitats de tipus A_{n+1} (corang 1) o bé singularitats de corang almenys 2 (D_k , $k \geq 3$, E_k , $k \geq 6$, etc., vegeu la llista d'Arnold a [2]) per a la corresponent funció distància al quadrat sobre la subvarietat X . Aquests últims són els *punts umbílics* de la subvarietat X . En el cas d'una hipersuperfície podem caracteritzar-los geomètricament pel fet que almenys dues de les curvatures principals assumeixen el mateix valor en ells. Les estructures locals típiques tant del subconjunt focal com de les arestes focals per a diversos punts d'una varietat genèrica, en particular per als umbílics, poden ser ara obtingudes a través de les informacions generals proporcionades per la teoria de desdoblaments de funcions.

Les *crestes* de X són els punts singulars de les funcions d_a corresponents a les arestes. En altres paraules, les crestes són punts on l'ordre de contacte de X amb alguna de les seves esferes focals és almenys 3. En la mesura que aquest ordre de contacte augmenta direm que el punt cresta corresponent és d'ordre més alt. Els punts de les crestes es caracteritzen geomètricament com els extrems de les curvatures principals al llarg de les línies de curvatura associades (vegeu [50] per al cas de superfícies en $\mathbb{R}^3$, o [58] per a hipersuperfícies en general). En general són transversals a les línies de curvatura, excepte en punts aïllats (sobre les línies de curvatura) corresponents a crestes d'ordre almenys $n+1$.

És important observar que, igual que els umbílics de la superfície, les crestes són conformement invariants. Açò es pot interpretar en el sentit que són altament rellevants amb relació a la forma de la superfície en un sentit més ample (no rígid). Cal també mencionar que l'anàlisi clàssica de la geometria local de les subvarietats només prenia en compte, a través de la segona forma fonamental, els fenòmens relacionats amb la part quadràtica de la immersió; és a dir, només diferenciava entre ordres de contacte 2 i *més de 2* de la subvarietat amb les hiperesferes de l'espai ambient. Per tant, és en l'estudi i la descripció de les crestes i les arestes focals, on les tècniques de la Teoria de Singularitats es fan imprescindibles, la qual cosa explica el fet que aquests conceptes no haguessin estat contemplats per la geometria diferencial fins molt recentment, amb la introducció de la geometria genèrica. L'anàlisi de les crestes i de les arestes focals, tant com d'altres conceptes geomètrics caracteritzats en funció de contactes d'ordre més alt de les subvarietats amb k -plans o k -esferes, ha resultat ser, d'altra banda, de gran interès en el tractament d'imatges i reconeixement de formes amb l'ordinador en els últims anys, com podem veure en els treballs de Koenderink i Van Dorn ([36] (1976)), Koenderink ([35], (1990)) o Gordan ([27] (1991)). I a través d'aquests en l'estudi de fenòmens de ressonància magnètica en aplicacions a la medicina ([28] (1992) i Thirion i Gourdon [66] (1993)).

D'altra banda, l'estudi més detallat de les hipersuperfícies focals està connectat amb el problema de la propagació de fronts d'ones en l'espai euclidià, amb els corresponents fenòmens de concentració de raigs en les càustiques de llum. Aquest tema, aparentment ben conegut per l'òptica geomètrica clàssica, ha estat una font de sorpreses i objecte d'interès intensiu en els últims anys, per part de l'escola russa dirigida per V. I. Arnold, com mostren nombroses publicacions (citarem [2], [3], [4], [5], [6], [7], [38], [60], [61] o [62] per posar-ne algunes).

El *subconjunt de simetria* d'una *figura* (corba, superfície...) es defineix com l'adherència del conjunt dels punts equidistants d'almenys dos punts de la figura, de manera que les distàncies corresponents representen extrems locals. Tenim, doncs, que aquest subconjunt és precisament l'adherència del subconjunt de Maxwell, o amb altres paraules, l'adherència del conjunt dels centres de les esferes bitangents a la figura. Aquest subconjunt està estretament relacionat amb un concepte ben conegut al terreny de l'anàlisi d'imatges amb l'ordinador: l'*esquelet* o *eix medial*. L'esquelet d'un objecte representat per una imatge a l'ordinador està format per aquells punts del subconjunt de simetria que es troben a l'interior de la figura. Es pot dir que els esquelets *representen la forma sense volum*. De fet, l'esquelet junt amb els radis de bitangència pot ser utilitzat per reconstruir la forma original de la figura (com a l'envolvent de la família d'esferes centrades en els punts de l'esquelet amb els corresponents radis).

És interessant observar que els primers estudis sobre els subconjunts de simetria van estar motivats per investigacions en biologia (H. Blum [12] (1973)). Segons aquest punt de vista, sembla que els sistemes visuals biològics focalitzen millor sobre els punts dels eixos medials de les figures (I. Kovács i B. Julesz, [37] (1994), T. S. Lee, S. C. Zhu, V. Lamme i D. Mumford [39] (1997)). Un estudi extensiu sobre la determinació dels esquelets des del punt de vista de l'anàlisi d'imatges es pot trobar en els llibres de J. Serra, ([59]). Per a un estudi des del punt de vista geomètric remetem a [10], [16] i [24].

6 La família de funcions altura

Passarem ara a analitzar les singularitats genèriques de les funcions altura. (Referències: [15] i [53] per a hipersuperfícies en $\mathbb{R}^n$, [55] per a corbes en $\mathbb{R}^3$, [43] per a superfícies en $\mathbb{R}^4$ i [54], [44] i [45] per a subvarietats genèriques de codimensió major o igual que 2.)

Observem, en aquest cas, que el conjunt singular de la deformació, $\lambda^*: \mathbb{R}^m \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \times S^{n-1}$, associada a la família λ de funcions altura sobre la varietat X ,

$$\Sigma(\lambda^*) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^m \times S^{n-1} \mid \frac{\partial \lambda_v}{\partial x} = Dg(x) \cdot v = 0 \right\},$$

és precisament el fibrat normal unitari de X . La immersió difeomòrfica d'aquest fibrat unitari en $\mathbb{R}^n$ l'anomenem *hipersuperfície canal* de X en $\mathbb{R}^n$ i la denotem per CX .

Podem veure CX com el subconjunt

$$CX = \{g(x) + \epsilon v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ és un vector unitari normal a } X \text{ en } g(x)\},$$

on ϵ és un nombre real positiu suficientment petit.

El conjunt singular $\Sigma(\lambda^*)$ coincideix, per definició, amb la subvarietat catàstrofe de λ com a família de funcions sobre $\mathbb{R}^m$ amb paràmetres en S^{n-1} . La corresponent aplicació catàstrofe és la projecció

$$\begin{aligned} \chi: \Sigma(\lambda^*) &\rightarrow S^{n-1} \\ (x, v) &\mapsto v. \end{aligned}$$

Observem que si $m = n - 1$, és a dir, quan X és una hipersuperfície, tenim el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(\lambda^*) & & \\ \nu \uparrow & & \\ X & \xrightarrow{\gamma} & S^{n-1} \end{array}$$

on $\nu: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times S^{n-1}$ està definida com $\nu(x) = (x, v)$, amb v el vector unitari orientat normal a X en $g(x)$ i γ l'aplicació normal de Gauss associada a la immersió difeomòrfica g . Clarament, ν és una immersió difeomòrfica que té per imatge el subconjunt $\Sigma(\lambda^*)$. Llavors, la commutativitat del diagrama anterior ens diu que l'aplicació normal de Gauss sobre X és equivalent a una aplicació catàstrofe. Per tant, l'estudi de les singularitats estables de les aplicacions de Gauss sobre hipersuperfícies pot ser realitzat a través de la consideració de les singularitats estables de les aplicacions catàstrofe, que són ben conegudes, pel que fa a dimensions suficientment petites (teorema de Thom sobre classificació de catàstrofes elementals [14], [51]).

En aquest cas, els punts d'interès geomètric són els *punts parabòlics* de X . Aquests són els punts singulars de l'aplicació γ , que també estan caracteritzats com els zeros de la curvatura gaussiana. En termes de contacte podem veure'ls com aquells punts on l'ordre de contacte de la hipersuperfície amb el seu hiperplà tangent és almenys 3. En general, els punts parabòlics provenen de singularitats de

tipus plec (A_2) per a la funció altura en la direcció del vector normal a la hipersuperfície. Tanmateix, en alguns punts on el contacte de la subvarietat amb l'hiperplà tangent es fa major, apareixen singularitats més degenerades per aquestes funcions. Aquests punts solen formar un subconjunt de mesura nul·la dins del conjunt dels punts parabòlics. Per exemple, en el cas d'una superfície genèricament immersa en $\mathbb{R}^3$, són punts aïllats coneguts com a cùspides de l'aplicació normal de Gauss (perquè aquesta aplicació hi presenta una singularitat del tipus cuspide de Whitney, [26]). Un estudi exhaustiu d'aquests punts i llurs propietats es troba en el llibre de Banchoff, Gaffney i McCrory ([9]).

En el cas d'una subvarietat X de codimensió major que 1 en $\mathbb{R}^n$ definim l'aplicació normal de Gauss generalitzada de X com l'aplicació normal de Gauss sobre la hipersuperfície canal de X ,

$$\begin{aligned} \gamma: C(X) &\longrightarrow S^{n-1} \\ g(x) + \epsilon v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

És immediat veure que també en aquest cas l'aplicació de Gauss és equivalent a una aplicació catàstrofe i el problema de l'estabilitat i el tipus de singularitats es redueix al d'aquestes últimes.

L'anàlisi de les diverses singularitats de les funcions altura sobre una subvarietat X de $\mathbb{R}^n$ ens va permetre construir a [53] dues estratificacions sobre l'espai de paràmetres S^{n-1} de la família λ : l'estratificació de Gauss i l'estratificació de Maxwell (anomenada *corestratificació* en el treball original). La primera ve donada per l'estratificació natural del subconjunt de bifurcació de la família λ . Mentre que la segona està lligada a la consideració d'únicament els mínims absoluts de les funcions altura; de fet, ve donada per una estratificació d'un subconjunt del conjunt de Maxwell de la família λ . La importància d'aquesta última prové del fet de contenir totes les informacions necessàries per a descriure l'estructura qualitativa global de l'envoltura convexa de la subvarietat. Un estudi d'aquestes estructures per al cas de les hipersuperfícies genèriques pot ser trobat a [52].

D'altra banda, les estratificacions de Maxwell resulten ser també d'interès per a obtenir propietats globals de corbes. Per exemple, en [55], va ser l'anàlisi de les propietats topològiques de l'estratificació de Maxwell associada a una corba genèrica tancada en $\mathbb{R}^3$ (grafs de Maxwell en la 2-esfera, en aquest cas) el que ens va permetre arribar al següent teorema dels 4 vèrtex per a corbes espacials convexes (en el sentit que es troben sobre la seva envoltura convexa):

Qualsevol corba genèrica tancada i convexa en $\mathbb{R}^3$ té almenys 4 punts de torsió nul·la.

Posteriorment i prenent en compte que tota corba és un límit en la topologia C^∞ de Whitney de corbes genèriques, s'han obtingut extensions d'aquest resultat a categories més amples ([48], [56] i [21]).

Observem que un punt de torsió nul·la es caracteritza pel fet que la funció altura en la direcció binormal té una singularitat del tipus $A_{k \geq 3}$. En el cas d'una corba en $\mathbb{R}^n$, aquest concepte es generalitza com a *punt d'aplanament*, és a dir, un punt on la funció altura en la direcció de la binormal té una singularitat de tipus $A_{k \geq n}$. Alguns resultats globals relatius a punts d'aplanament de corbes en $\mathbb{R}^{2n+1}$ poden ser trobats en [8] i [11].

Il·lustrarem a continuació la correspondència entre els llenguatges de la geometria diferencial clàssica i la geometria genèrica per a les hipersuperfícies en $\mathbb{R}^n$:

Diccionari

Geom. dif. clàssica

Aplic. exponencial normal.

Conjunt focal.

Punt umbílic.

Direccions principals.

Aplic. normal de Gauss.

Punts parabòlics.

Direccions principals.

No definit.

No definit.

Geometria genèrica

Aplicació catàstrofe de la família d .Subconjunt de bifurcació de d ($\mathcal{B}(d)$).

Singularitats de corang 2 de les funcions distància al quadrat.

Direccions de contacte de X amb esferes osculatris.Aplicació catàstrofe de λ .Punts singulars de χ_λ .Direccions de contacte de X amb asimptòtiques hiperplans.Subconjunt de Maxwell de d ($\mathcal{M}(d)$).Crestes i arestes focals ($\mathcal{B}_k(d)$).

El problema de l'evolució dels fenòmens geomètrics estables en famílies uniparamètriques de superfícies en $\mathbb{R}^3$ ha estat analitzat en els treballs: [17], [18], [19] i [20].

7 Propietats globals relatives a les direccions de contacte

a) Umbílics de superfícies en $\mathbb{R}^3$

Els camps de direccions principals estan globalment definits sobre qualsevol superfície X i els umbílics són els seus punts crítics. Llavors, si X és compacta i sense vora, la fórmula de Poincaré-Hopf ens diu:

$$\chi(X) = \sum_p \text{ind } V(p),$$

on p es fa variar entre tots els umbílics de X , V és un dels dos camps de direccions principals i $\chi(X)$ denota la característica d'Euler de la superfície X .

Se sap, per altra banda, que l'índex d'un umbílic en una superfície genèrica és $\pm \frac{1}{2}$. Per tant,

$$\# \text{umbílics} \geq 2\chi(X)$$

i com a conseqüència tenim el resultat següent (Feldman [22] (1977)):

1 TEOREMA *Tota 2-esfera genèricament immersa en $\mathbb{R}^3$ té almenys 4 punts umbílics.*

Aquesta afirmació representa una versió genèrica d'una altra de més general, coneguda com

CONJECTURA DE CARATHÉODORY *El nombre d'umbílics d'una 2-esfera convexa en $\mathbb{R}^3$ és almenys 2.*

Una manera d'abordar aquesta conjectura consisteix a investigar els possibles índexs dels umbílics de les superfícies en $\mathbb{R}^3$ en general. Se sap que és possible definir immersions (locals) de superfícies amb umbílics de qualsevol índex $j \leq 1$. Així, l'afirmació següent es pot considerar com una versió local (més forta) de la conjectura anterior:

CONJECTURA DE LOEWNER *L'índex d'un camp de direccions principals en un umbílic d'una superfície és sempre menor o igual que 1.*

L'estudi d'aquesta última conjectura per a superfícies analítiques ha estat tractat per diversos autors: Hamburguer [33] (1940-41), Bol [13] (1943-44), Klotz [34] (1959), Titus [65] (1973), Scherbel [63] (1995).

Per a les superfícies de tipus C^r , Smyth i Xavier [64] van provar que la conjectura de Loewner és vertadera sota una condició (genèrica) feble sobre les derivades d'ordre menor o igual que 3 d'una certa funció.

D'altra banda, Gutiérrez, Mercuri i Sánchez-Bringas ([29](1996)) van provar que la resposta positiva a la conjectura de Loewner analítica implica la resposta positiva a la conjectura de Loewner C^r (sota una condició (genèrica) feble de no- degeneració). Altres treballs d'aquests autors relacionats amb aquest problema són [31] i [32].

Analitzarem a continuació com és possible posar aquestes qüestions en un context més ample, utilitzant el fet que les direccions principals d'una superfície en $\mathbb{R}^3$ són les direccions de contacte de la superfície amb les esferes de l'espai ambient.

b) Umbílics de superfícies en $\mathbb{R}^4$

Siga X una superfície en $\mathbb{R}^4$ i denotem per $S_\nu: T_p X \rightarrow T_p X$ l'operador de forma associat a un camp normal ν sobre X . Aquest operador ve donat per $S_\nu(\xi) = -(\bar{\nabla}_\xi \nu)^\top$. No és difícil verificar que S_ν és autoadjunt. Els seus autovectors defineixen les direccions ν -principals i els seus autovalors, les corresponents ν -curvatures principals. Els punts crítics d'aquests camps són anomenats ν -umbílics.

C. Gutiérrez i F. Sánchez-Bringas proven en ([30]) el resultat següent:

2 TEOREMA *Per a qualsevol $n \in \mathbb{Z}$, existeix una immersió analítica $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ amb un camp normal ν i un punt ν -umbílic d'índex $\frac{n}{2}$.*

Per tant, la conjectura de Loewner no és vertadera per a una superfície X en $\mathbb{R}^4$ amb un camp normal ν qualsevol.

D. Mochida, M. C. Romero Fuster i M. A. Ruas estudiaren les singularitats genèriques de la família de funcions altura sobre una superfície genèrica en $\mathbb{R}^4$ ([43]) i introduïren el concepte de *direcció binormal* com una direcció normal a la superfície en un punt, per a la qual la funció altura corresponent té una singularitat degenerada. L'hiperplà ortogonal a una direcció binormal en un punt s'anomena *hiperplà osculador*. Això es deu al fet que el seu contacte amb la superfície en el punt considerat és d'ordre més alt que el dels altres hiperplans tangents. Les corresponents direccions de contacte són les *direccions asimptòtiques* (la definició clàssica per aquestes direccions en termes de l'el·lipse de curvatura es pot trobar a [40]). Els punts crítics dels camps de direccions asimptòtiques són els *punts d'inflexió* de la superfície ([40]). És interessant observar que si ν és un camp binormal sobre una superfície X en tots els punts, una de les famílies de línies de ν -curvatura coincideix amb les línies asimptòtiques corresponents a la binormal ν ([57]) i per tant els punts d'inflexió són ν -umbílics.

En general un camp binormal (i per tant el corresponent camp de direccions asimptòtiques) no té per què estar globalment definit sobre una superfície. Tanmateix, Mochida, Romero Fuster i Ruas proven en ([43]):

3 TEOREMA *Els camps de direccions asimptòtiques estan globalment definits sobre la superfície X si i només si X és localment convexa en $\mathbb{R}^4$.*

On per localment convexa entenem que admet un hiperplà tangent de suport local (en el sentit que deixa a la varietat localment continguda en un dels dos hiperplans determinats per ell en $\mathbb{R}^4$) en cada punt.

D'altra banda, Garcia, Mochida, Romero Fuster i Ruas analitzen en [23] l'estructura dels camps de direccions asimptòtiques sobre una superfície genèrica i arriben a la conclusió següent:

4 TEOREMA *L'índex del camp de direccions asimptòtiques en un punt d'inflexió d'una superfície genèrica és $\pm \frac{1}{2}$.*

I s'obté com a conseqüència:

5 TEOREMA *En una superfície genèrica convexa, compacta i sense vora X en $\mathbb{R}^4$, es verifica la relació següent:*

$$\# \text{punts d'inflexió de } X \geq 2\chi(X).$$

Sobre la base d'aquestes conclusions proposem:

A) *Conjectura de tipus Loewner per als camps de binormals sobre una superfície en $\mathbb{R}^4$: l'índex dels camps de direccions asimptòtiques en els punts d'inflexió és sempre menor o igual que 1.*

B) *Conjectura de tipus Carathéodory per a 2-esferes convexes en $\mathbb{R}^4$:*

$$\# \text{punts d'inflexió} \geq 2.$$

OBSERVACIÓ: la projecció estereogràfica transforma les línies asimptòtiques i els punts d'inflexió d'una superfície en $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ en les línies de curvatura i els punts umbílics de la seva imatge en $\mathbb{R}^3$. Per tant, les conjectures en $\mathbb{R}^4$ inclouen les conjectures en $\mathbb{R}^3$ com a casos particulars.

Finalment, destaquem que és possible veure la Conjectura de Carathéodory com un problema global sobre el contacte d'una superfície X amb subvarietats especials: hiperesferes en $\mathbb{R}^3$ (o hiperplans en $\mathbb{R}^4$).

En un context més general podem considerar l'estudi dels contactes d'una varietat amb subvarietats invariants per algun grup de transformacions i els corresponents camps de direccions de contacte. Els punts crítics d'aquests camps són invariants per al grup de transformacions considerat i tenen especial interès geomètric. Aleshores, l'anàlisi de l'estructura dels esmentats camps i dels seus possibles índexs en els punts crítics deurà conduir a resultats del tipus anterior on es relaciona la topologia de la varietat amb la seva geometria.

Referències

- [1] ARNOLD, V. I., GUSEIN-ZADE, S. M., VARCHENKO, A.N. *Singularities of Differentiable Maps*, vol. I, Birkhäuser Inc., Boston, 1985.
- [2] ARNOLD, V. I. «Wave front evolution and equivariant Morse lemma», *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (1976), 557-582.
- [3] ARNOLD, V. I. «Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups and singular projections of smooth surfaces», *Russian Math. Surveys* 34 (1979), 1-42.
- [4] ARNOLD, V. I. «Singularities of Legendre varieties of evolvents and of fronts at an obstacle», *Ergodic Theory and Dynam. Systems* 2 (1982), 301-309.
- [5] ARNOLD, V. I. «Singularities of Systems of rays», *Russian Math. Surveys* 38:2 (1983), 87-176.
- [6] ARNOLD, V. I. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [7] ARNOLD, V. I. *Singularities of caustics and Wavefronts*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [8] ARNOLD, V. I. «On the Number of Flattening Points on Space Curves», *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 171 (1996), 11-22.
- [9] BANCHOFF, T., GAFFNEY, T., MCCRORY, C. *Cusps of Gauss Mappings*, Research Notes in Maths 55, Pitman, New York, 1982.
- [10] BANCHOFF, T. F., GIBLIN, P. J. «Global theorems for symmetry sets of smooth curves and polygons in the plane», *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A* 106 (1987).
- [11] BARNER, M. «Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegeebenen bei geschlossenen strems-konvexen Raumkurven», *Abh. Math. Sem. univ. Hamburg* 20 (1956), 196-215.
- [12] BLUM, H. «Biological shape and visual science», *J. Theoretical Biology* 38 (1973).
- [13] BOL, G. «Über Nabelpunkte auf einer Eiflache», *Math. Z.* 49 (1943/1944).
- [14] BROCKER, TH., LANDER, L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc. LNS 17, Cambridge U. P., 1975.
- [15] BRUCE, J. W. «The duals of generic hypersurfaces», *Math. Scand.* 49 (1981).
- [16] BRUCE, J. W., GIBLIN, P. J., GIBSON, C. G. «Symmetry sets», *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A* 101 (1985).
- [17] BRUCE, J. W., GIBLIN, P. J., TARI, F. «Families of Surfaces: Height functions, Gauss Maps and Duals» a *Real and Complex Singularities* ed. per W. L. Marar, Pitman Res. Notes Math. Ser. 333 (1995), 148-178.
- [18] BRUCE, J. W., GIBLIN, P. J., TARI, F. «Parabolic Curves of Evolving Surfaces», *Internat. J. of Comput. Vision* 17 (3) (1996), 291-306.
- [19] BRUCE, J. W., GIBLIN, P. J., TARI, F. «Families of Surfaces: Height functions and projections to Planes», *Math. Scand.* 82 (1998), 165-185.
- [20] BRUCE, J. W., GIBLIN, P. J., TARI, F., «Families of Surfaces: focal sets, ridges and umbilics», *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 125 (1999), 243-268.
- [21] COSTA, S. I. R., ROMERO FUSTER, M. C. «Nonvanishing torsion closed curves always hide twice», *Geom. Dedicata* 66 (1997), 1-17.
- [22] FELDMAN, E. A. «On parabolic and umbilic points of immersed hypersurfaces», *Trans. AMS* 127 (1977), 1-28.

- [23] GARCÍA, R. A., MOCHIDA, D. K. H., ROMERO FUSTER, M. C., RUAS, M. A. S. «Inflection Points and Topology of Surfaces in 4-space», *Transactions of AMS* (2000).
- [24] GIBLIN, P. J., SAPIRO, G. «Affine-Invariant Distances, Envelopes and Symmetry Sets», *Geom. Dedicata* 71 (1998).
- [25] GUÉZIEC, A. *Large deformable splines, crest lines and matching*, Rapports de Recherche, No 1782, INRIA, Le Chesnay, 1992.
- [26] GOLUBITSKY, M., GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. GTM 14, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [27] GORDAN, C. G. «Face recognition from depth maps and surface curvature», a *Proceedings of SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, 1991.
- [28] GUÉZIEC, A. «Large deformable splines, crest lines and matching», Rapports de Recherche, No 1782, INRIA, Le Chesnay, 1992.
- [29] GUTIÉRREZ, C., MERCURI, F., SÁNCHEZ-BRINGAS, F. «On a Carathéodory's Conjecture: analiticity versus smoothness», *Experimental Math.* 5, No. 1 (1996), 33-38.
- [30] GUTIÉRREZ, C., SÁNCHEZ-BRINGAS, F. «On a Loewner's Umbilic-Index-Conjecture for Surfaces Immersed in $\mathbb{R}^4$ », preprint (1998).
- [31] GUTIÉRREZ, C., SÁNCHEZ-BRINGAS, F. «On a Carathéodory's Conjecture on umbilics: representing ovaloids», preprint (1998).
- [32] GUTIÉRREZ, C., SÁNCHEZ-BRINGAS, F. «Planar Vector Field versions of Carathéodory's and Loewner's Conjectures», preprint (1998).
- [33] HAMBURGER, H. «Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung I», *Ann. of Math.* 41 (1940), 63-68, II, III, *Acta Math.* (1941), 174-332.
- [34] KLOTZ, T. «On Bol's proof of Carathéodory's Conjecture», *Comm. Pure Appl. Math.* 12 (1959), 277-311.
- [35] KOENDERINK, J. J. *Solid Shape*, The MIT Press, Cambridge, Mass. 1990.
- [36] KOENDERINK, J. J., DOORN, A. J. VAN «The singularities of the visual mapping», *Biol. Cybernetics* 24 (1976).
- [37] KOVÁCS, I., JULESZ, B. *Nature* (1994).
- [38] LANDIS, E. «Tangential singularities», *Funct. Anal. and Appl.* 15 (1981), 103-114.
- [39] LEE, T. S., ZHU, S. C., LAMME, V., MUMFORD, D. *Computational Neuroscience*, Plenum Press, 1997.
- [40] LITTLE, J. A. «On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces», *Annali Mat. Pura ed Appl. (ser. A)* 83 (1969), 261-336.
- [41] LOOIJENGA, E. J. N. *Structural stability of smooth families of C^∞ -functions*, tesi, Univ. Amsterdam, 1974.
- [42] MARTINET, J. *Singularities of smooth functions and maps*. London Math. Soc. LNS 58 (1982).
- [43] MOCHIDA, D. K. H., ROMERO FUSTER, M. C., RUAS, M. A. S. «The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint», *Geom. Dedicata* 54 (1995), 323-332.

- [44] MOCHIDA, D. K. H., ROMERO FUSTER, M. C., RUAS, M. A. S., «Osculating hyperplanes and asymptotic directions of codimension 2 submanifolds of euclidean spaces», *Geom. Dedicata* (1999).
- [45] MOCHIDA, D. K. H., ROMERO FUSTER, M. C., RUAS, M. A. S., «Singularities and duality in the flat geometry of submanifolds in euclidean spaces». Apareixerà a *Beiträge zur Algebra und Geometrie*.
- [46] MONTALDI, J. A. *Contact, with applications to submanifolds of $\mathbb{R}^n$* , tesi, University of Liverpool (1983).
- [47] MONTALDI, J. A. «On contact between submanifolds», *Michigan Math. J.* 33 (1986), 195–199.
- [48] NUÑO BALLESTEROS, J. J., ROMERO FUSTER, M. C. «A four vertex Theorem for strictly convex space curves», *J. of Geometry* 46 (1993), 119–126.
- [49] PORTEOUS, I. R. «The normal singularities of a submanifold», *J. Diff. Geom.* 5 (1971), 543–564.
- [50] PORTEOUS, I. R., *Geometric Differentiation*. Cambridge University Press, 1994.
- [51] POSTON, T., STEWART, I. *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London, 1978.
- [52] ROBERTSON, S. A., ROMERO FUSTER, M. C. «The convex hull of a hypersurface», *Proc. London Math. Soc.* (1985), 81–94.
- [53] ROMERO FUSTER, M. C. «Sphere stratifications and the Gauss map», *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 95A (1983), 115–136.
- [54] ROMERO FUSTER, M. C. «Generic embeddings, stratifications and Gauss maps», *Proc. Symp. Diff. Geom., Peñíscola, 1982*. Springer LNM 1054 (1984), 164–181.
- [55] ROMERO FUSTER, M. C. «Convexly-generic curves in $\mathbb{R}^3$ », *Geometriae Dedicata* 26 (1988), 1–22.
- [56] ROMERO FUSTER, M. C., COSTA, S. I. R., NUÑO BALLESTEROS, J. J. «Some global properties of curves in $\mathbb{R}^n$ », *Proc. III Internat. Symp. on Diff. Geom., Peñíscola, 1988*. Springer LNM, (1989).
- [57] ROMERO FUSTER, M. C., SÁNCHEZ-BRINGAS, F. «Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in $\mathbb{R}^4$ ». Preprint.
- [58] SANABRIA CODESAL, E. tesi doctoral, Universitat de València, 2000.
- [59] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Vol. 1 i 2, Academic Press, 1982 i 1988.
- [60] SCHERBACK, O. P. «Singularities of a family of evolvents in the neighbourhood of a point of inflection of a curve, and the group H_3 generated by reflections», *Funct. Anal. and Appl.* 17 (1983), 301–303.
- [61] SCHERBACK, O. P. « H_4 in the problem of avoiding an obstacle», *Uspekhi Mat. Nauk* 39:5 (1984), 256.
- [62] SCHERBACK, O. P. «Wavefronts and reflection groups», *Russian Math. Surveys* 43:3 (1988), 149–194.
- [63] SHERBEL, H. *A New proof of Hamburger's Index Theorem on umbilical points*. Dissertation No. 10281, ETH, Zürich.
- [64] SMYTH, B., XAVIER, F. «A geometric estimate for the index of an umbilic point on a smooth surface», *Bull. Lon. Math. Soc.* 24 (1992).

- [65] TITUS, C. J. «A proof of a conjecture of Carathéodory on umbilic points», *Acta Math.* 131 (1973).
- [66] THIRION, J. P., GOURDON, A. «The Marching Lines Algorithm: new results and proofs», *Rapports de Recherche*, No 1881, INRIA, Le Chesnay.

DEPARTAMENT DE GEOMETRIA I TOPOLOGIA
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
46100 BURJASSOT, VALÈNCIA
romero@uv.es