

Els commutadors de l'anàlisi i interpolació*

JOAN CERDÀ

1 Introducció

Operadors com els de les classes següents, actuant sobre diversos espais de funcions (que per més simplicitat limitarem al cas d'una variable), són objectes bàsics de l'anàlisi:

- Els multiplicadors puntuals, $M_\nu f = \nu f$, multiplicació per una funció fixada, ν . S'obté $M_\nu: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ acotat si i només si la funció ν és acotada ($\nu \in L^\infty(\mathbb{R})$), amb $\|M_\nu\| = \|\nu\|_\infty$.
- Els multiplicadors de Fourier, T_μ , on μ és també una funció donada, anomenada símbol de l'operador, que multiplica «a l'altre costat de la transformada de Fourier», o sigui, $\widehat{T_\mu f} = \mu \hat{f}$, on

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

També en aquest cas s'obté un operador $T_\mu: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ acotat si i només si $\|T_\mu\| = \|\mu\|_\infty < \infty$.

- Les integrals singulars, de la forma

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy,$$

on el nucli integral $K(x, y)$ pot tenir una singularitat concentrada en y , x propers.

* Conferència pronunciada a la Quarta Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Escola Universitària Politècnica de Vilanova i la Geltrú l'abril de 2001.

- Els operadors pseudodiferencials, formalment del tipus

$$(\Psi_a f)(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx,$$

que, en funció de la naturalesa del símbol, $a(x, \xi)$, poden donar lloc a multiplicadors puntuals, a multiplicadors de Fourier, a integrals singulars o a operadors diferencials.

Aquí estem interessats en els commutadors $[T, M] = TM - MT$ de parells d'operadors (sempre lineals si no s'indica el contrari) en un espai de funcions complexes E com $L^2(\mathbb{R})$ o $L^p(\mathbb{R})$, els espais de Sobolev o els de Besov. Les seves propietats són d'importància central en camps molt diversos, com la mecànica quàntica, la teoria de funcions, les equacions en derivades parcials, l'anàlisi harmònica, etc.

Si T i M són acotats (o sigui, continus), $[T, M]$ també és acotat. Però suposem, per exemple, que M no és acotat (i definit sobre un subespai dens $D(M)$ de E). El domini de $[T, M]$ és

$$D[T, M] := \{f \in D(M); T(f) \in D(M)\},$$

que pot no ser dens i fins i tot reduir-se al zero, de manera que el primer problema que apareix és el de la seva definició.

Malgrat això, sortosament es presenten situacions en les quals $D[T, M]$ és dens i sobre ell, gràcies a determinades propietats de cancel·lació, el commutador és continu, o sigui, té una prolongació acotada ben determinada a tot l'espai E , que se segueix denotant $[T, M]$.

Això s'entendrà molt bé amb l'exemple elemental del commutador $[p, q]$ dels operadors moment i posició de la mecànica quàntica.

2 Commutadors de la mecànica quàntica

En mecànica quàntica, si $E = L^2(\mathbb{R})$ és «l'espai d'estats», espai de Hilbert amb el producte escalar $(f, g)_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$, un observable T és un operador autoadjunt i un valor observable és un valor propi corresponent a una funció pròpia $\psi \in D(T)$, a la qual podem imposar que $\|\psi\|_2 = 1$. La teoria espectral corresponent a l'observable permet associar a la funció d'estat ψ una distribució de probabilitat dP_ψ , d'esperança $\hat{T}_\psi = \int t dP_\psi(t) = (T\psi, \psi)_2$ i de variància $\delta_T^2 = \|T\psi - \hat{T}_\psi \psi\|_2^2$.

Són exemples d'observables la posició, q , i el moment, p , operadors definits per $q(f)(x) = xf(x)$ (o sigui, $q = M_x$) i $p(f) = -if'$ (derivada en el sentit distribucional), de dominis $\{f \in L^2; q(f) \in L^2\}$ i $\{f \in L^2; f' \in L^2\}$, respectivament. Malgrat que cap d'ells no és acotat, el domini del seu commutador conté les funcions de test $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, que són denses dins $L^2(\mathbb{R})$, i

$$[p, q]f(x) = -i(xf(x))' + xif'(x) = -if(x),$$

de manera que, gràcies a propietats de cancel·lació de la derivada, veiem que $[p, q]$ té la prolongació acotada única $-i \text{Id}$, es diu que es tracta d'un commutador acotat i s'escriu $[p, q] = -i \text{Id}$. Aquest fet implica, per exemple, que p i q no poden tenir una funció pròpia comuna ψ (seria $[p, q]\psi = 0$) i que se satisfà $\delta_p^2 \delta_q^2 \geq |([p, q]\psi, \psi)_2|/2 = 1/2$, la relació d'incertesa.

Un altre observable bàsic és l'operador d'energia o Hamiltonià, un operador autoadjunt del tipus

$$\mathcal{H}f := -f'' + vf.$$

L'evolució de l'estat del sistema ve donada per la solució $\psi(t)(x) = \psi(x, t)$ de l'equació de Schrödinger amb un estat inicial ψ_0 ,

$$i \frac{d\psi}{dt} = \mathcal{H}\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0.$$

Sota hipòtesis adequades, el commutador $[\mathcal{H}, T]$ apareix en considerar l'esperança de l'observable T en l'estat $\psi(t)$, $\hat{T}(t) := \hat{T}_{\psi(t)}$, que satisfà

$$\frac{d}{dt} \hat{T}(t) = (i[\mathcal{H}, T]\psi(t), \psi(t))_2.$$

Per això, si $[\mathcal{H}, T] = 0$, T és una *constant del moviment* (per exemple, \mathcal{H} ho és).

Veiem així la importància de saber quan $[T, M] = -i \text{Id}$, quan $[T, M] = 0$ o, en general, quan $[T, M] = C$ per a C prefixat.

Des dels primers treballs de Weyl (1928) i von Neumann (1931) sobre mecànica quàntica es plantejà el problema de determinar els operadors autoadjunts T, M que satisfan la relació de commutació $[T, M] = -i \text{Id}$. És fàcil de comprovar que aquesta identitat és impossible per a operadors acotats, i un resultat profund de Brown i Pearcy estableix que un operador C és un commutador de dos operadors acotats si i només si no és del tipus $\lambda \text{Id} + K$ ($\lambda \neq 0$ i K compacte).

És més, sota determinades hipòtesis d'irreductibilitat, ja von Neumann va demostrar que per a operadors autoadjunts, necessàriament no acotats, només p i q satisfan la relació de commutació, mòdul equivalència unitària.

3 Commutadors d'operadors pseudodiferencials

Els operadors pseudodiferencials apareixen de manera natural amb la utilització de la integral de Fourier en l'estudi d'equacions diferencials en derivades parcials. Com hem indicat, admeten (en el nostre cas de funcions d'una variable) una descripció del tipus

$$(\Psi_a f)(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx,$$

amb restriccions sobre el símbol, $a(x, \xi)$, que fan que la integral estigui definida per a les funcions de la classe S de Schwartz, que és densa en nombrosos

espais funcionals. Això succeeix si és de classe C^∞ i satisfà les desigualtats

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{m-\alpha},$$

i aleshores es diu que es tracta d'un símbol estàndard d'ordre m , i s'escriu $a \in S^m$. En són exemples els polinomis $P = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(x) (2\pi i \xi)^\alpha$ de grau m en ξ amb coeficients funcions $a_\alpha(x)$ de classe C^∞ acotades elles i les derivades. En aquest cas, de les propietats de la integral de Fourier resulta que

$$(\Psi_P f)(x) = \int_{\mathbb{R}} P \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i x \xi} dx = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}} (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx,$$

o sigui, $(\Psi_P f)(x) = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha(x) f^{(\alpha)}(x)$, i $\Psi_P = P(x, D)$ és un operador diferencial d'ordre m amb coeficients variables.

Si el símbol no depèn de ξ , $a(x, \xi) = v(x)$, del teorema d'inversió de Fourier resulta

$$(\Psi_v f)(x) = v(x) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx = (M_v f)(x),$$

un multiplicador puntual. Si és independent de x , $a(x, \xi) = \mu(\xi)$, el que s'obté és

$$(\Psi_\mu f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx = (T_\mu f)(x),$$

un multiplicador de Fourier.

Un primer resultat bàsic de continuïtat d'aquests operadors estableix que, per a tot $a \in S^0$, Ψ_a és acotat en L^q si $1 < q < \infty$ i, si $a \in S^m$, $\Psi_a: W^{k,q}(\mathbb{R}) \rightarrow W^{k-m,q}(\mathbb{R})$ acotat ($1 < q < \infty$, $k \geq m$). Aquí $W^{k,q}(\mathbb{R})$ denota l'espai de Sobolev de les $f \in L^q$ tals que les derivades distribuïdors $f^{(\alpha)}$ per a $\alpha \leq k$ són totes de L^q , i està proveït de la norma $\|\cdot\|_{k,q}$ tal que $\|f\|_{k,q}^q = \sum_{\alpha=0}^k \|f^{(\alpha)}\|_q^q$.

Així, l'operador moment p és l'operador pseudodiferencial de símbol $2\pi\xi$ de S^1 i no és acotat en cap L^q , però $p: W^{k,q}(\mathbb{R}) \rightarrow W^{k-1,q}(\mathbb{R})$.

Per a qualsevol $a \in S^m$, $a = a(x, \xi)$, torna a aparèixer en

$$[\Psi_a, p]f(x) = -i \int_{\mathbb{R}} \left[a \widehat{f}'(\xi) e^{2\pi i x \xi} + \hat{f}(\xi) \frac{\partial}{\partial x} (a e^{2\pi i x \xi}) \right] dx$$

la cancel·lació deguda a la derivada i resulta

$$[\Psi_a, p]f(x) = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a(x, \xi)}{\partial x} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} dx,$$

o sigui, $[p, \Psi_a] = \Psi_{i\partial a/\partial x}$, de símbol estàndard també d'ordre m . En particular, si a és d'ordre 0, $[p, \Psi_a]$ també ho és, i és acotat en L^q (per a $1 < q < \infty$). Si $a(x, \xi) = v(x)$ té derivada acotada, $[p, M_v] = [p, \Psi_a] = iM_{v'}$ és acotat a $L^2(\mathbb{R})$.

De manera similar, en el cas de l'operador posició, $q = M_x$, resulta $[\Psi_a, q] = \Psi_b$ amb $b = -(2\pi i)^{-1} \partial a / \partial \xi$ d'ordre $m - 1$ si a és d'ordre m .

4 Commutadors de Calderón

Sigui γ una corba simple de classe C^1 en el pla complex, \mathbb{C} . La integral de Cauchy d'una funció f integrable sobre la corba és

$$(C_\gamma f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \notin \gamma).$$

Així, si γ és una corba tancada vora orientada d'un domini D i f és contínua en \overline{D} i analítica en D , la fórmula integral de Cauchy s'escriu $(C_\gamma f)(z) = f(z)$, per a tot $z \in D$.

En considerar punts $z = \gamma(t)$ sobre la corba resulta una integral singular (en el sentit que cal considerar valors principals de Cauchy) com

$$(S_\gamma f)(x) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(t)\gamma'(t)}{\gamma(x) - \gamma(t)} dt,$$

on escrivim $f(t)$ en lloc de $f(\gamma(t))$. Aquesta integral singular està vinculada al problema de la determinació dels límits no tangencials interior $C_\gamma^+ f$ i exterior $C_\gamma^- f$ quan $z \rightarrow \gamma$. Així, es té $C_\gamma^+ f = f$ si i només si se satisfan $C_\gamma^+ f \in L^1(\gamma)$ i $S_\gamma(C_\gamma^+ f) = C_\gamma^+ f$, i un resultat de Privalov estableix les identitats

$$C_\gamma^\pm f(z) = \pm \frac{f(z)}{2} + \frac{1}{2} S_\gamma f(z) \quad (z \in \gamma).$$

El problema bàsic resulta ser el de l'acotació en L^2 dels operadors C_γ^\pm , o sigui, de S_γ . Si γ és de classe C^2 , el problema equival al de l'acotació en $L^2(\mathbb{R})$ de la transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y} dy,$$

multiplicador de Fourier de símbol la funció acotada $\mu(x) = (1/\pi) \text{signe}(x)$ i que és acotat en tots els espais $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Però si γ és de classe C^1 la situació és essencialment més complicada i porta al cas de corbes del tipus $\gamma = A(x)$ amb A' acotada, o sigui, del tipus

$$\gamma(x) = x + ia(x), \quad \gamma'(x) = 1 + ia'(x) \quad (a \in L^\infty(\mathbb{R})),$$

de manera que, prescindint del factor $1/\pi i$, s'arriba a la consideració de la integral singular

$$(S_\gamma f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)(1 + ia'(t))}{x - t + i(A(x) - A(t))} dt$$

en la qual l'acotació de a permet incorporar el factor $1 + ia'(t)$ a la funció $f(t)$ i el seu nucli integral és

$$K(x, y) = \frac{1}{x - y} \frac{1}{1 + i \frac{A(x) - A(y)}{x - y}}.$$

Si $|A'(x)| \leq M < 1$, tenim el desenvolupament convergent

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k K_k(x, y), \quad K_k(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{A(x) - A(y)}{x-y} \right)^k$$

i s'estudia l'acotació en $L^2(\mathbb{R})$ de S_y considerant la de les integrals singulars

$$(S_k f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K_k(x, y) f(y) dy.$$

Observem que $S_0 = H$, la transformada de Hilbert, i que

$$S_1 f(x) = A(x) \int \frac{f(y)}{(x-y)^2} dy - \int \frac{A(y)f(y)}{(x-y)^2} dy = [H_2, M_A]f(x),$$

el commutador del multiplicador puntual M_A amb l'operador integral singular $H_2 f(x) = \int (x-y)^{-2} f(y) dy$.

Els operadors S_k s'anomenen commutadors de Calderón i una demostració de l'acotació a $L^2(\mathbb{R})$ de l'operador S_y es basa a obtenir estimacions

$$\|S_k\| \leq CL^k M^k.$$

L'any 1977, Calderón va demostrar l'acotació de S_y si M és petit, i ja abans (el 1965) havia provat l'acotació del primer commutador S_1 . El resultat complet, per a tot M , és degut a Coifman, McIntosh i Meyer (1982).

5 Commutadors i interpolació complexa

Un multiplicador puntual M_b és acotat en $L^2(\mathbb{R})$ si i només si b és (essencialment) acotada; així, $M_{\log|x|}$ no ho és. En canvi, si H és la transformada de Hilbert, s'obté $[H, M_{\log|x|}]: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ acotat. Aquest fet és un cas especial d'un resultat obtingut el 1976 per Coifman, Rochberg i Weiss [5] en relació amb un problema de l'anàlisi harmònica referent a la factorització de funcions d'un espai de Hardy de diverses variables. Varen establir que, si b és localment integrable i per a cada interval I es denota $b_I := (1/|I|) \int_I b$, la mitjana de b sobre I , s'obté $[H, M_b]: L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ acotat (per a qualsevol $1 < p < \infty$) si i només si se satisfà

$$\|b\|_{BMO} := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |b - b_I| < \infty.$$

Es diu llavors que b és d'oscil·lació mitjana acotada, s'escriu $b \in BMO$, les funcions acotades en són exemples trivials i $\log|x|$ n'és un de típic.

El 1983, els dos últims autors varen mostrar ([7]) com la teoria d'interpolació complexa desenvolupada per Calderón, Lions i S. G. Krein, a partir del mètode de Thorin basat en el teorema de les tres rectes per a obtenir la desigualtat de convexitat de Riesz, en el context de famílies d'espais de Banach

abstractes, s'aplica per donar una estimació d'uns commutadors $[T, \Omega]$, per a certs operadors Ω no acotats i no és necessàriament lineal.

Així, com a cas particular dels resultats de Calderón resulta que, donats dos pesos ω_0, ω_1 i $0 < \theta < 1$, per a tot operador acotat $T: L^p(\omega_0) \rightarrow L^p(\omega_0)$ i $T: L^p(\omega_1) \rightarrow L^p(\omega_1)$ resulta automàticament $T: L^p(\omega) \rightarrow L^p(\omega)$ acotat, amb $\omega = \omega_0^{1-\theta} \omega_1^\theta$.

Si (E_0, E_1) és un parell d'espais de funcions, el mètode es basa en la consideració d'un cert espai de Banach $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ de funcions vectorials $F: S \rightarrow E_0 + E_1$ analítiques sobre la banda $S = \{z; 0 < \Re z < 1\}$ i tals que estan definides $f_j(t) = F(j + it)$ ($j = 0, 1$) com a prolongacions contínues fins a les vores de la banda i $f_j: \mathbb{R} \rightarrow E_j$ són contínues, amb norma $\|F\|_{\mathcal{F}} := \max(\|f_0\|_0, \|f_1\|_1) < \infty$ ($\|f_j\|_j = \sup_t \|f_j(t)\|_{E_j}$), de manera que també $T \circ F \in \mathcal{F}(E_0, E_1)$ si $T: E_j \rightarrow E_j$ són contínues.

Així, si es defineix l'espai interpolat $E_\theta = \{F(\theta); F \in \mathcal{F}(E_0, E_1)\}$ amb la norma quocient $\|u\|_\theta = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}}; F(\theta) = u\}$, per a cada $u \in E_\theta$ es pot prendre $F_u \in \mathcal{F}(E_0, E_1)$ tal que $F_u(\theta) = u$ i sigui «extremal», $\|u\|_\theta \simeq \|F_u\|_{\mathcal{F}}$ ($\|u\|_\theta \leq \|F_u\|_{\mathcal{F}} \leq c \|u\|_\theta$ amb $c > 1$ fixat). Les propietats d'acotació de T sobre els espais E_j es transmeten a E_θ mitjançant $T \circ F_u$.

En el cas $(E_0, E_1) = (L^p(\omega_0), L^p(\omega_1))$ s'obté $E_\theta = L^p(\omega)$ de manera que resulta $\|u\|_{L^p(\omega)} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}}; F(\theta) = u\}$, i hi ha $F_u \in \mathcal{F}(L^p(\omega_0), L^p(\omega_1))$ tal que $F_u(\theta) = u$ extremal del tipus

$$F_u(z) = \omega_0^{(1-z)/2} \omega_1^{z/2} u.$$

La idea de Rochberg i Weiss es basà en la consideració de la derivada i, en definir $\Omega(u) := F'_u(\theta)$, tornen a aparèixer unes propietats de cancel·lació que fan que, malgrat que $\Omega: E_\theta \rightarrow E_0 + E_1$ sigui no acotat com a operador de E_θ , ho és el commutador $[T, \Omega]$. Això els permeté obtenir importants estimacions de l'anàlisi.

En l'exemple concret de $(L^p(\omega_0), L^p(\omega_1))$ i $F_u(z) = \omega_0^{(1-z)/2} \omega_1^{z/2} u$, si $\theta = 1/2$, en derivar s'obté $\Omega u = M_v$ amb $v = (1/2) \log(\omega_1/\omega_0)$. Si $\|b\|_{BMO}$ és prou petita (restricció que després desapareix per homogeneïtat), un resultat ben conegut de Muckenhoupt estableix que la transformada de Hilbert, H , és acotada en $L^p(e^b)$ i, si es prenen $\omega_0 = e^b$ i $\omega_1 = e^{-b}$, resulta $(1/2) \log(\omega_1/\omega_0) = b$, o sigui, $[H, \Omega] = [H, M_b]$ i es recupera el resultat de Coifman, Rochberg i Weiss.

En [1] es consideren diverses variants d'aquest mètode que proporcionen noves estimacions de commutadors. Així, en una d'aquestes variants se substitueix l'espai interpolat $E_\theta = \{F(\theta); F \in \mathcal{F}(E_0, E_1)\}$ per $E_{\theta,n} = \{F^{(n)}(\theta); F \in \mathcal{F}(E_0, E_1)\}$ i, definint $\Omega(u) := F_u^{(n+1)}(\theta)$, resulta també $[T, \Omega]: E_{\theta,n} \rightarrow E_{\theta,n}$ acotat, que en el cas especial $(L^p(\omega_0), L^p(\omega_1))$ proporciona l'acotació amb «pesos» del commutador

$$[H, M_b]: L^p\left(\frac{1}{1+|b|^n}\right) \rightarrow L^p\left(\frac{1}{1+|b|^n}\right),$$

per a tota $b \in BMO$, que és una extensió del resultat de Coifman, Rochberg i Weiss.

6 Multiplicadors de Fourier, espais de Besov i interpolació

En el cas del multiplicador de Fourier, $\widehat{T_\mu f} = \mu \widehat{f}$, també hi ha acotació L^2 si i només si el símbol és acotat, ja que la transformació de Fourier és una isometria lineal bijectiva de L^2 . Un resultat de Marcinkiewicz estableix que s'obté $T_\mu: L^p \rightarrow L^p$ acotat per a tot $1 < p < \infty$ si μ satisfà les dues condicions següents:

- Acotació: $\|\mu\|_\infty < \infty$.
- Variació uniformement acotada sobre els intervals diàdics:

$$V(\mu) = \sup_n V_{\Delta(n)}(\mu) < \infty,$$

on denotem $\Delta(n) = [-2^n, -2^{n-1}] \cup [2^{n-1}, 2^n]$ si $n = 1, 2, \dots$ i $\Delta(0) = [-1, 1]$, i $V_{\Delta(n)}(\mu)$ és la variació total de μ sobre $\Delta(n)$.

Si μ no és acotat, T_μ no pot ser acotat a cap L^p , ja que aleshores no és difícil veure que ho hauria de ser a L^2 . Però per a funcions com $\mu(t) = \log^+ |t|$, que no és acotada però satisfà $V(\mu) < \infty$, cal esperar propietats d'acotació de commutadors com $[H, T_\mu]$. Si no se'n troben per a espais L^p , en són uns bons substituïts els anomenats espais de Besov i de Sobolev dels problemes de contorn en equacions en derivades parcials.

De les diverses descripcions que existeixen dels espais de Besov, ens convé la que prové de la teoria d'aproximació. En primer lloc fixem un espai $L^p(\mathbb{R})$ amb $1 < p < \infty$ (ens interessarà disposar del teorema de Marcinkiewicz que hem esmentat) i, per a cada $r > 0$, considerem amb la norma de L^p la distància

$$E_p(r, f) := \inf_{g \in V(r)} \|f - g\|_p$$

de $f \in L^p$ arbitrària al subespai $V(r) := \{g \in L^p; \text{suport } \widehat{g} \subset [-r, r]\}$ ($V(0) := 0$). Si $\sigma > 0$ i $1 \leq q < \infty$, denotem

$$\|f\|_{\sigma, q} := \left(\int_0^\infty [r^\sigma E_p(r, f)]^q \frac{dr}{r} \right)^{1/q} \simeq \left(\sum_n [2^{n\sigma} E_p(2^n, f)]^q \right)^{1/q}$$

i l'espai de Besov corresponent és

$$B_p^{\sigma, q} := \{f \in L^p; \|f\|_{\sigma, q} < \infty\}.$$

Aquesta escala d'espais està íntimament relacionada amb la dels de Sobolev

$$W^{n, p} = \{f \in L^p; f', \dots, f^{(n)} \in L^p\},$$

amb $\|f\|_{(n, p)} = \left(\|f\|_p^p + \|f'\|_p^p + \dots + \|f^{(n)}\|_p^p \right)^{1/p}$ (les derivades, en sentit de les distribucions). Així, si $\sigma = n$, natural, i $q = p = 2$, es té $B_2^{n, 2} = W^{n, 2}$ amb equivalència de normes.

En problemes de contorn, els espais de Besov apareixen espontàniament com a traces d'espais de Sobolev; per exemple, l'aplicació $f(x, y) \mapsto f(x, 0)$, ben definida entre les classes de Schwartz $S(\mathbb{R}^2)$ i $S(\mathbb{R})$, s'estén a un únic operador acotat $\text{Tr}: W^{n,p}(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_p^{n-1/2,p}(\mathbb{R})$. De fet, els espais de Besov s'han de considerar com interpolats dels de Sobolev: si un operador T és acotat entre dos espais de Sobolev

$$T: W^{n_0,p} \rightarrow W^{m_0,p}, \quad T: W^{n_1,p} \rightarrow W^{m_1,p}$$

i es consideren paràmetres $\sigma = (1 - \theta)n_0 + \theta n_1$, $\bar{\sigma} = (1 - \theta)m_0 + \theta m_1$ ($0 < \theta < 1$), aleshores es té automàticament $T: B_p^{\sigma,q} \rightarrow B_p^{\bar{\sigma},q}$ acotat per a tot $q \geq 1$.

Pel que fa als commutadors de multiplicadors puntuals, ja Calderón (1965) va demostrar que $[H, M_b]: L^2 \rightarrow W^{1,2}$, és acotat, si b és Lipschitz; Coifman i Muray (1988) varen caracteritzar les funcions b per a les quals resulta $[H, M_b]: B_p^{\sigma,q} \rightarrow B_p^{\sigma,q}$ acotat, i l'acotació de commutadors $[T, M_b]: X \rightarrow X$ per a classes generals d'espais funcionals X ha estat àmpliament estudiada recentment per diversos autors (Bourdaud, Moussai, Li, McIntosh, Wu, Zhang, etc.).

Per a commutadors $[H, T_\mu]$ de multiplicadors de Fourier amb símbol no acotat no es disposen de teoremes d'acotació sobre espais L^p , però en [3] es demostra, amb l'única hipòtesi sobre μ de ser admissible, que si T és qualsevol operador acotat entre dos parells d'espais de Besov

$$T: B_p^{\sigma_0,q_0} \rightarrow B_p^{\bar{\sigma}_0,q_0}, \quad T: B_p^{\sigma_1,q_1} \rightarrow B_p^{\bar{\sigma}_1,q_1},$$

llavors també resulta $[T, T_\mu]: B_p^{\sigma,q} \rightarrow B_p^{\bar{\sigma},q}$ per a tot $q \geq 1$ si $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$ i $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_1$ són tals que $\sigma = (1 - \theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$ i $\bar{\sigma} = (1 - \theta)\bar{\sigma}_0 + \theta\bar{\sigma}_1$ per a un mateix θ (això engloba el cas $T = H$ o qualsevol multiplicador de Fourier acotat i admissible).

Aquest resultat admet la versió anàloga per a espais de Besov de funcions periòdiques ([4]).

Si $Sf(x) = f(-x)$ i $Df(x) = f(2x)$, S i D són operadors acotats en tots els espais de Besov i la continuïtat de $[S, T_\mu]$ i de $[D, T_\mu]$ implica l'admissibilitat de μ , de manera que aquests teoremes de commutadors per a multiplicadors de Fourier no són millorables en el context dels espais de Besov de funcions d'una variable.

Tanmateix, són problemes pendents els de trobar els teoremes corresponents per a funcions de diverses variables i, el que seria encara més interessant, per a espais L^p . La seva validesa per a espais de Besov prové de la seva descripció com a espais d'aproximació, que permet obtenir unes certes seleccions extremals per al mètode d'interpolació real amb unes propietats de cancellació com les descrites en el nostre treball [2], on s'estenen i unifiquen els diversos teoremes de commutadors de la teoria d'interpolació d'operadors que havien aparegut amb anterioritat, com les de [7, 6], sense connexió aparent entre elles.

Referències

- [1] CARRO, M.; CERDÀ, J.; MILMAN, M.; SORIA, J. «The relationship between Schechter methods of interpolation and commutators theorems». *Math. Nachr.*, 174 (1995), 35-53.
- [2] CARRO, M.; CERDÀ, J.; SORIA, J. «Commutators and interpolation methods». *Ark. Mat.*, 33 (1995), 199-216.
- [3] CERDÀ, J.; MARTÍN, J. *Commutators for Fourier Multipliers on Besov Spaces on R*. Preprint.
- [4] CERDÀ, J.; MARTÍN, J.; KRUGLJAK, N. YA. «Commutators for Approximation Spaces and Marcinkiewicz-Type Multipliers». *J. Approx. Theory*, 100 (1999), 251-265.
- [5] ROIFMAN, R.; ROCHBERG, R.; WEISS, G. «Factorization theorems for Hardy spaces in several variables». *Ann. of Math.*, 103 (1976), 611-635.
- [6] JAWERTH, B.; ROCHBERG, R.; WEISS, G. «Commutators and other second order estimates in real interpolation theory». *Ark. Mat.*, 24 (1986), 191-219.
- [7] ROCHBERG, R.; WEISS, G. «Derivatives of analytic families of Banach spaces». *Ann. of Math.*, 118 (1983), 315-347.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I ANÀLISI
UNIVERSITAT DE BARCELONA
08007 BARCELONA
cerda@mat.ub.es