

## Ruptura de la simetria, formació de patrons i caos simètric en sistemes dinàmics no lineals\*

IAN STEWART

### 1 Ruptura de la simetria

La simetria és un dels conceptes clau a la física, i està en el cor del coneixement de les lleis de la natura. Matemàticament, la simetria es defineix com la invariància sota un grup de transformacions. De moltes maneres, el progrés de la física consisteix en el reconeixement de grups més i més grans de simetries, des del grup de Lorenz de la relativitat especial fins als grups *gauge* en la teoria de mecànica quàntica de la teoria de partícules fonamentals.

El 1894 Pierre Curie va enunciar un principi bàsic referent a la simetria: «Si determinades causes produeixen determinats efectes, aleshores les simetries en les causes reapareixen en els efectes produïts». Aquest principi aixeca una qüestió interessant. Si les lleis de la natura són simètriques, i si les causes simètriques produeixen efectes igualment simètrics, aleshores com és que l'Univers és *menys* simètric que les seves lleis? Segons Albert Einstein les lleis de la física són idèntiques en tot punt de l'espai-temps —invariants sota el grup de Lorentz. Però l'Univers no és el mateix en cada punt de l'espai-temps, doncs, un univers així seria homogeni i estàtic.

El nostre Univers no és ni homogeni ni estàtic. És una font constant d'estructura i de patrons: penseu, per exemple, en una galàxia, on la matèria s'organitza en forma d'una espiral gegant. I l'Univers és dinàmic, canvia amb el temps: les galàxies roten i, fins i tot, poden col·lisionar.

La solució d'aquesta paradoxa és el fenomen de la *ruptura de la simetria*. Els efectes de les lleis simètriques poden ser *menys* simètrics que les lleis. Vol dir això que Curie estava equivocada? No exactament. El comportament d'un sistema físic no està determinat tan sols per les lleis. Les condicions inicials també estan involucrades. I les condicions inicials poden ser menys simètri-

---

\* Traducció de Joaquim Ortega-Cerdà

ques que les lleis, la qual cosa obre la porta a la ruptura de la simetria. Però això només és el començament i no el final de la història.

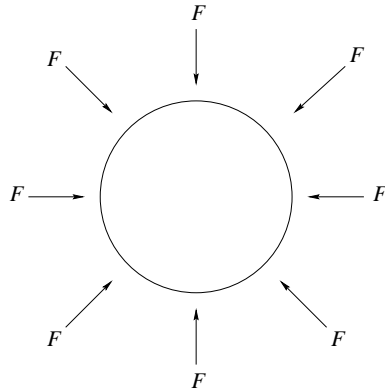


FIGURA 1: Una coberta esfèrica sotmesa a una compressió uniforme.

## 2 Exemples de ruptura de la simetria

Per adquirir intuïció començarem amb alguns exemples.

1 EXEMPLE (*L'esfera rebregada.*) Considerem una coberta esfèrica elàstica (figura 1) amb propietats elàstiques uniformes, comprimida per una força que en cada punt de la coberta té la mateixa magnitud  $F$  i actua perpendicularment a la coberta apuntant cap a l'interior. Les equacions que descriuen aquest sistema són invariants sota el grup  $O(3)$ , el grup ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ , que consisteix en totes les combinacions de rotacions i reflexions que fixen l'origen.

L'estat esfèric de la coberta és  $O(3)$ -simètric, d'acord amb el principi de Curie. No obstant això, experimentalment s'observa que la coberta no roman  $O(3)$ -simètrica quan  $F$  s'incrementa més enllà d'un valor crític  $F_{crit}$ . La coberta es rebrega.

La figura 2 mostra una simulació per ordinador de la forma immediatament després de rebregar-se; és a dir, amb  $F$  lleugerament més gran que  $F_{crit}$ . La característica fascinant d'aquest «mode rebregat» és que encara té simetria. Però el grup de simetria és  $O(2)$ , no pas  $O(3)$ . El grup  $O(2)$  és el grup ortogonal en  $\mathbb{R}^2$ , que està aquí realitzat com el subgrup de  $O(3)$  que fixa una recta que passa per l'origen —l'eix de simetria de la figura 2. El mode rebregat és una superfície esfèrica al voltant d'aquest eix.

Així sembla que Curie era parcialment encertat. Les causes simètriques poden produir efectes simètrics —però la simetria pot *canviar*.

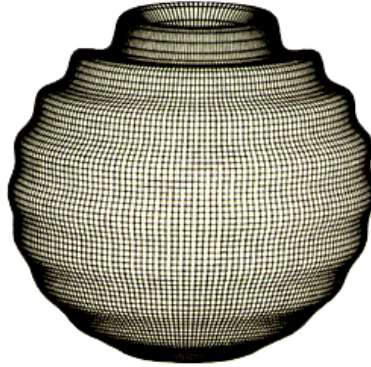


FIGURA 2: L'esfera rebregada. Cortesia de Thomson [20].

2 EXEMPLE (*El puntal voladís.*) Aquest exemple (figura 3) és un model molt simple de plegament elàstic. Consisteix en una barra de llargària unitat, que pivota verticalment en el pla, amb un fixament elàstic a la base que té com a constant d'elasticitat  $k$ . En la part de dalt de la barra es fixa una massa  $m$  que exerceix una força cap avall  $mg$  on  $g$  és l'acceleració deguda a la gravetat.

Si la barra es troba en un angle  $\theta$  respecte de la vertical, mesurat en sentit horari, aleshores el component angular de la massa exerceix una força  $mg \sin \theta$ , i l'elàstic una força en sentit antihorari  $k\theta$ . Aleshores la barra es trobarà en equilibri si, i només si,

$$k\theta = mg \sin \theta$$

o el que és equivalent

$$\sin \theta = \frac{k}{mg} \theta. \quad (1)$$

Podem deduir aquesta fórmula d'una manera més informativa considerant la *funció d'energia* del sistema:

$$E(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 + mg \cos \theta.$$

En un equilibri,  $E$  és estacionària:

$$0 = F(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dE}{d\theta} = k\theta - mg \sin \theta,$$

cosa que de nou ens porta a (1).

Ens preguntem ara com canvia la solució amb  $m$  i  $k$ . Per a fer això, diem  $\lambda = \frac{mg}{k}$  i tractem  $\lambda$  com un paràmetre. L'equació (1) té una solució  $\theta = 0$  per a tots els valors de  $\lambda$ . Per simplicitat, considerarem només el cas en què  $\theta$  és

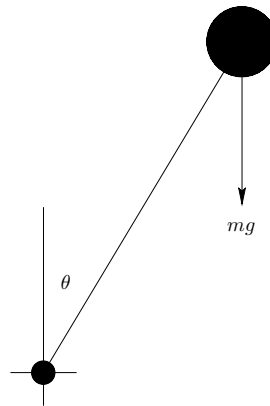


FIGURA 3: El puntal voladís.

a prop de 0. El pendent de la gràfica de  $y = \sin(\theta)$  en el punt  $\theta = 0$  és 1, i se segueix immediatament per a inspecció visual de la gràfica (1) que només té una solució,  $\theta = 0$  quan  $\lambda \leq 1$ , però té tres solucions per a  $\lambda > 1$ . Es diu que  $\lambda = 1$  és un *punt de bifurcació*.

Per entendre la geometria de les solucions a prop del punt de bifurcació, aproximem  $\sin \theta$  pel seu desenvolupament de Taylor de tercer ordre:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3.$$

Aleshores (1) esdevé

$$\lambda^{-1}\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3,$$

que, simplificant, ens dóna, o bé

$$\theta = 0,$$

o bé

$$\theta = \pm \sqrt{\frac{6(\lambda - 1)}{\lambda}} = \pm \alpha.$$

La segona equació té solucions només quan  $\lambda \geq 1$ . Es dedueix que el gràfic de les solucions  $\theta$  per a diversos valors de  $\lambda$ , que es coneix com a *diagrama de bifurcació*, és com a la figura 4.

Hi ha tres solucions per a  $\lambda > 1$  i una solució per a  $\lambda \geq 1$ , i això confirma el resultat gràfic. Les solucions no nul·les formen una paràbola (que en el sistema original és només aproximada).

A continuació considerem l'estabilitat de les solucions. Un equilibri és *estable* si el sistema retorna a ell quan se'l pertorba lleugerament, i *inestable* si no hi retorna. Suposem que  $\theta = \theta_0$  és un equilibri. Aleshores és estable si  $\theta_0$  és

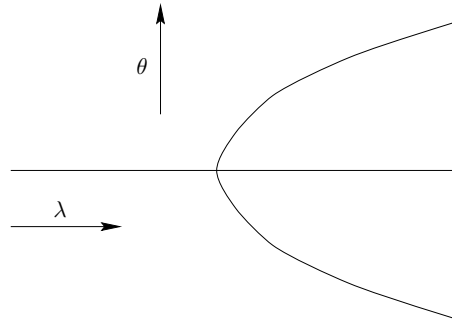


FIGURA 4: Diagrama de bifurcació per al puntal voladís.

un mínim local de  $E$ , i inestable si no ho és. Se'n segueix que  $\theta = 0$  és estable per a  $\lambda \leq 1$  però inestable si  $\lambda > 1$ , mentre que els dos equilibris no nuls són estables quan existeixen (això és, quan  $\lambda > 1$ ).

Suposem, en un experiment, que la massa  $m$  augmenta contínuament de manera que  $\lambda$  passa per 1 des d'un valor inferior. Per exemple, la massa pot ser un cub, al qual anem afegint aigua a poc a poc. Aleshores inicialment la barra és estable en la posició vertical  $\theta = 0$ . Tanmateix, quan  $\lambda$  supera 1, aquest estat esdevé inestable. La més petita pertorbació (un ventijol, o fins i tot només la col·lisió amb una molècula d'aire) farà que la barra es mogui cap un dels equilibris no nuls. La barra s'ha *plegat* quan la massa  $m$  excedeix el valor crític de la massa  $m = \frac{k}{g}$ .

Aquest exemple estableix la possibilitat d'una *bifurcació*: el nombre d'equilibris (o, més generalment, la topologia del conjunt de solucions) canvia mentre el paràmetre canvia contínuament. Més interessant encara, també estableix la possibilitat d'una ruptura de la simetria. Per a explicar el que volem dir amb això, hem de mirar les propietats de simetria de les equacions.

El grup cíclic  $\mathbb{Z}_2$  d'ordre 2 actua en la recta real  $\mathbb{R}$ . Si denotem  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}$  aleshores aquesta acció està definida mitjançant

$$\begin{aligned} 1.x &= x \\ \sigma.x &= -x \end{aligned}$$

La funció energia  $E$  és *invariant* sota aquesta acció; és a dir,

$$E(\gamma.x) = E(x) \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

Atès que 1 actua com la identitat, l'aspecte rellevant d'aquesta propietat és la invariància sota  $\sigma$ :

$$E(-x) = E(x)$$

És a dir,  $E$  és una funció parella. Se'n dedueix que  $F$  és *equivariant* sota  $\mathbb{Z}_2$ , que vol dir que

$$F(\gamma.x) = \gamma.F(x) \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

De nou, l'únic punt no trivial, és que  $F$  és una funció senar:

$$F(-x) = F(x).$$

Definim ara el *grup de simetria*  $\Sigma_{\theta_0}$  d'una solució  $\theta = \theta_0$  de  $F(\theta) = 0$  com

$$\Sigma_{\theta_0} = \{\gamma \in \mathbb{Z}_2 : \gamma \cdot \theta_0 = \theta_0\},$$

que sempre és un subgrup de  $\mathbb{Z}_2$ , de manera que ha de ser o bé  $\mathbb{Z}_2$  o bé  $\{1\}$ . De fet, és fàcil veure que

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \mathbb{Z}_2 \\ \Sigma_\alpha &= \{1\} \\ \Sigma_{-\alpha} &= \{1\}.\end{aligned}$$

És a dir, la solució trivial  $\theta = 0$  és simètrica sota la reflexió  $x \rightarrow -x$ , però les solucions no trivials no tenen cap altra simetria fora de l'identitat.

On ha anat a parar la simetria? Òbviament,

$$\sigma(\alpha) = -\alpha$$

i

$$\sigma(-\alpha) = \alpha.$$

Així tenim que  $\sigma$  *intercanvia* les dues solucions no trivials  $\alpha, -\alpha$ . Per tant, el *conjunt* de totes les solucions és invariant sota  $\mathbb{Z}_2$ , però una solució individual pot no ser invariant.

La tria de la solució està determinada per les *condicions inicials*. Si inicialment  $\theta = \theta_0 > 0$  aleshores la barra es bellugarà fins a la solució estable  $\theta = \alpha$ ; d'altra banda, si inicialment  $\theta = \theta_0 < 0$  aleshores la barra es mourà fins a la solució estable  $\theta = -\alpha$ . Noteu que cadascuna d'aquestes condicions inicials és *asimètrica*, és a dir, no és invariant sota  $\mathbb{Z}_2$ . L'única condició inicial  $\mathbb{Z}_2$ -invariant és  $\theta = \theta_0 = 0$ . És així que l'asimetria de les condicions inicials és responsable de la ruptura de la simetria en aquest cas. Curie tenia raó.

Tanmateix, aquesta asimetria en les condicions inicials pot ser arbitràriament petita i tot i això el sistema evitarà la solució inestable (però simètrica)  $\theta = 0$ . És a dir, si  $\theta_0 > 0$  però  $\theta_0$  és molt petita —tan petita per a distingir-la experimentalment de zero— aleshores la barra es mourà cap a  $\theta = \alpha$ , i per a petits valors inicials negatius, la barra es mourà cap a  $\theta = -\alpha$ . És així que una asimetria en les condicions inicials que és indetectable pot portar envers estats asimètrics. Així, el principi de Curie és tècnicament correcte, però de fet enganyós: amb tota seguretat tindrem un efecte asimètric, encara que la causa no tingui cap asimetria detectable.

### 3 Formalisme de teoria de grups

Descrivim ara una part de la teoria bàsica de sistemes dinàmics, amb èmfasi en la teoria de grups subjacent. Per simplicitat, ens concentrarem en els sistemes

on l'espai de fases és  $\mathbb{R}^n$ . També es poden enunciar generalitzacions on l'espai de fases és una varietat regular arbitrària.

Suposem que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una funció regular i considerem la EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2)$$

Sigui  $\Gamma$  un grup de Lie compacte que actua linealment en  $\mathbb{R}^n$ . Aleshores existeix un producte escalar  $\Gamma$ -invariant (prenent la mitjana de qualsevol producte escalar al llarg de  $\Gamma$ ) de manera que sense pèrdua de generalitat  $\Gamma$  actua ortogonalment. Diem que (2) és  $\Gamma$ -equivariant si

$$f(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \Gamma.$$

Si  $x \in \mathbb{R}^n$  aleshores el *grup de simetria* o *grup d'isotropia* de  $x$  és

$$\Sigma_x = \{\sigma \in \Gamma : \sigma \cdot x = x\}.$$

Si  $\Sigma$  és un subgrup qualsevol de  $\Gamma$  aleshores *l'espai de punts fixos* de  $x$  és

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma \cdot x = x \quad \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Considerem ara una *família*  $\Gamma$ -equivariant d'EDOs

$$\frac{dx}{dt} + f(x, \lambda) = 0, \quad (3)$$

on  $x \in \mathbb{R}^n$ , i el «paràmetre de bifurcació»  $\lambda \in \mathbb{R}$  parametriza la família. Suposem que  $f$  és  $\Gamma$ -equivariant en  $x$  per a tot  $\lambda$ ; és a dir,  $f(\gamma \cdot x, \lambda) = \gamma \cdot f(x, \lambda)$  per a tot  $\lambda$ . Per simplicitat, suposem que  $f(0, \lambda) \equiv 0$ , així que existeix una «branca trivial» de solucions  $x = 0$ . La *linealització* de  $f$  és

$$L_\lambda = D_x f|_{0, \lambda}.$$

Una bifurcació local al punt  $\lambda = 0$  apareix quan la branca trivial pateix un canvi d'estabilitat lineal, de manera que  $L_0$  té valors propis en l'eix imaginari (moltes vegades anomenats *valors propis crítics*). Hi ha dos casos:

- Bifurcació d'equilibri:  $L_0$  té un valor propi nul.
- Bifurcació de Hopf:  $L_0$  té un parell de valors propis conjugats  $\pm i\omega$ , on  $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$ .

Per a estudiar aquestes bifurcacions, mirarem l'espai *crític*: l'espai  $E$  associat als valors propis crítics. Aquest és el nucli de  $(L_0 + \omega^2 I)^n$ , tot prenent  $\omega = 0$  en el cas de bifurcació d'equilibri. Per equivariància,  $E$  és un subespai  $\Gamma$ -invariant de  $\mathbb{R}^n$ . Diversos procediments de reducció (reducció de Liapunov-Schmidt, reducció de la varietat central, forma normal de Poincaré-Birkhoff) ens permeten projectar la dinàmica rellevant sobre  $E$ , i la EDO resultant roman  $\Gamma$ -equivariant.

En altres paraules, podem suposar sense pèrdua de generalitat que l'espai de fases és  $E$ . En la bifurcació d'equilibri, de manera genèrica, l'acció de  $\Gamma$  sobre  $E$  és *absolutament irreducible*: les úniques aplicacions  $\Gamma$ -invariants lineals en  $E$  són els múltiples reals de la identitat. En la bifurcació de Hopf, una restricció sobre  $E$  similar però més complicada és vàlida genèricament.

La característica més important dels subespais de punts fixos és que són dinàmicament invariants:

**1 PROPOSICIÓ** *Si  $f$  és  $\Gamma$ -invariant i  $H$  és un subgrup de  $\Gamma$ , aleshores  $f$  deixa invariant  $\text{Fix}(H)$ .*

La prova d'aquesta propietat important és trivial. Sigui  $y \in H$ ,  $x \in \text{Fix}(H)$ . Aleshores  $yf(x) = f(yx) = f(x)$  i, per tant,  $f(x) \in \text{Fix}(H)$ . Tot i aquesta prova trivial, el fet anterior és molt útil. Suposem, per exemple, que busquem una branca de solucions en equilibri a un problema de bifurcació  $\Gamma$ -invariant  $f(x, \lambda) = 0$ , trencant la simetria a  $H$ . Aleshores  $x \in \text{Fix}(H)$ , i és suficient resoldre  $f|_{\text{Fix}(H)} = 0$ . Normalment aquest és un problema més simple de resoldre que  $f = 0$  perquè la dimensió és més baixa.

Una conseqüència molt útil d'aquesta proposició és l'anomenat *lema de bifurcació equivariant*, que és el teorema bàsic d'existència per a ruptures de simetria en bifurcacions d'equilibri. Per a enunciar-lo necessitem una definició. Un subgrup *axial* és un subgrup d'isotropia  $\Sigma$  amb  $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$ . Per a aquests grups d'isotropia tenim el teorema següent d'existència bàsic gràcies a Vanderbauwhede [21] i Cicogna [4]:

**2 TEOREMA (LEMA DE BIFURCACIÓ EQUIVARIANT)** *Sigui  $f(x, \lambda) = 0$  un problema de bifurcació  $\Gamma$ -equivariant on  $\text{Fix}(\Gamma) = 0$ . Sigui  $\Sigma$  un subgrup axial. Aleshores de manera genèrica existeix una branca de solucions de  $f(x, \lambda) = 0$  que surt de l'origen amb grup de simetria  $\Sigma$ .*

Hi ha un teorema d'existència anàleg per a les bifurcacions de Hopf que trenquen la simetria, el *teorema equivariant de Hopf*. Involucra el concepte de *simetria espai-temporal*, que és una combinació de la simetria a l'espai i un desplaçament de la fase (una translació en el temps). Vegeu Golubitsky *et al.* [15].

**3 EXEMPLE** Sigui  $\Gamma = \mathbb{D}_m$  que actua en  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ . L'acció en  $\mathbb{C}$  està generada per:

$$\theta z \equiv e^{i\theta} z, \quad \theta = 2\pi/m$$

i

$$\kappa z = \bar{z}.$$

Quan  $\Sigma = \mathbb{Z}_2(\kappa)$ , tenim  $\text{Fix}(\Sigma) = \mathbb{R}$ , i existeixen solucions amb simetria especular.



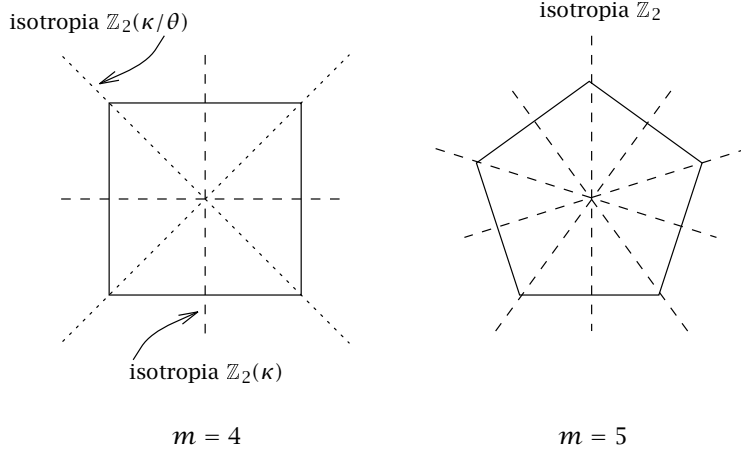


FIGURA 5: Gràfics dels subgrups d'isotropia per a  $\mathbb{D}_m$  que actuen en  $\mathbb{R}^2$ .

Considerem a continuació  $\mathbb{D}_m$ -simetria per a  $m = 4$  i  $5$ . (Notem que  $m = 4$  és un cas model per a  $m$  parell i  $m = 5$  ho és per a  $m$  senar.)

Les solucions relacionades per al grup tenen subgrups d'isotropia conjugats. Si  $f(v, \lambda) = 0$ , aleshores  $f(\gamma v, \lambda) = \gamma f(v, \lambda) = 0$ . Suposem que  $\sigma v = v$ , aleshores  $(\gamma \sigma \gamma^{-1}) \gamma v = \gamma \sigma v = \gamma v$ . Per tant,

$$\Sigma_{\gamma v} = \gamma \Sigma_v \gamma^{-1}. \tag{4}$$

També si  $T = \gamma \Sigma \gamma^{-1}$  aleshores  $\text{Fix}(T) = \gamma(\text{Fix}(\Sigma))$ . De manera que quan  $m = 5$  hi ha una única classe de conjugació de subgrups d'isotropia. En canvi, quan  $m = 4$  hi ha dues classes de conjugació. Els diagrames de bifurcació es troben a la figura 6.

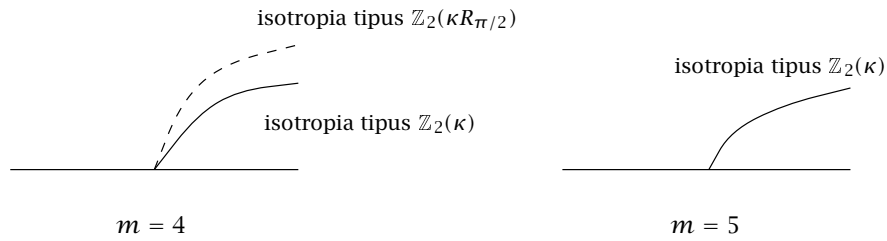


FIGURA 6: Diagrames de bifurcació per a  $\mathbb{D}_m$  que actuen en  $\mathbb{R}^2$ .

Per comprovar aquest enunciat notem que quan  $m = 4$  hi ha dos tipus de línies de simetria: les que connecten vèrtexs i les que connecten els punts

mitjos de costats oposats. Aquesta és la realització geomètrica de les dues classes de conjugació. Quan  $m = 5$  hi ha un únic tipus de línia de simetria.

El lema de bifurcació equivariant explica les solucions trobades als exemples 1 i 2.

#### 4 El flux de Couette-Taylor

Un dels exemples clàssics de creació de patrons en un sistema físic és l'experiment de Couette-Taylor. El 1888 Maurice Couette va introduir un aparell per a estudiar el flux en un fluid, on les capes del fluid llisquen l'una sobre l'altra. La idea era utilitzar l'aparell per a mesurar la viscositat. (Aquest sistema de dos cilindres va ser prèviament estudiat per Isaac Newton el 1687, i Arnulph Mallock, ajudant de Lord Rayleigh, el va utilitzar amb la mateixa intenció que Couette el mateix any, el 1888.) L'aparell consistia en dos cilindres coaxials (figura 7). El cilindre exterior és fix; l'interior pot rotar. L'espai entre ells, que és relativament estret, s'omple amb un fluid, habitualment aigua. S'afegeixen flocs d'alumini al fluid per a fer visibles les formes que adquireixi el flux.

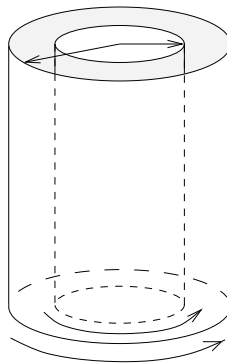


FIGURA 7: L'aparell de Couette-Taylor.

Quan el cilindre interior rota suaument, no es crea cap patró, i el flux sembla suau i uniforme (la figura 8 a l'esquerra). Això era el que Couette volia, i sembla que no va experimentar més enllà. Però el 1923 Geoffrey Ingram Taylor va descobrir que incrementar la velocitat de rotació portava a l'aparició d'alguns patrons. Més específicament, un cop la velocitat superava un cert valor crític, el flux estratificava en el que ara s'anomenen *remolins de Taylor* (vegeu la figura 8 al mig). Taylor va ser capaç de calcular la velocitat crítica, i va utilitzar aquest experiment per a validar les equacions de Navier-Stokes per a un flux d'un fluid.

Al llarg dels anys, els experimentadors van desenvolupar més l'aparell de Couette-Taylor, i van permetre que el cilindre exterior rotés. Si el cilindre inte-

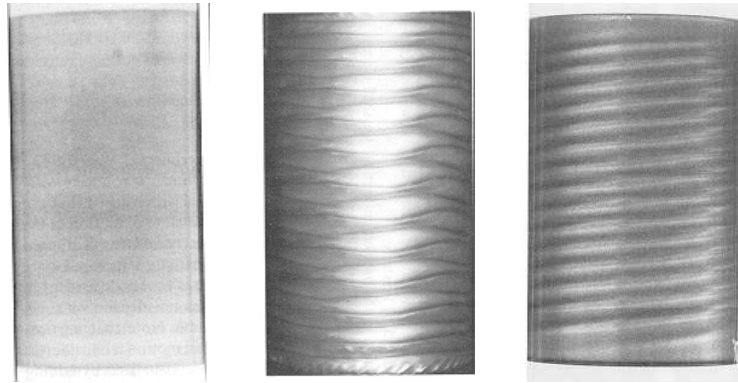


FIGURA 8: L'experiment de Couette-Taylor. D'esquerra a dreta: flux de Couette, remolins de Taylor i remolins espirals. Cortesia de H. L. Swinney.

rior rota en un sentit i l'exterior rota en direcció oposada, aleshores un patró típic del flux que s'observa són les *espirals* (figura 8 la dreta), una ona rotatòria helicoidal que (a causa d'una il·lusió òptica molt coneguda) sembla que es bellugui al llarg de l'eix del cilindre.

Si fem variar les velocitats de rotació dels cilindre, apareixen nombrosos patrons diferents en el flux. La figura 9 mostra una classificació experimental dels estats observats en funció de les velocitats angulars dels dos cilindres:  $R_0$  denota el nombre de Reynolds del cilindre exterior i  $R_1$  el nombre de Reynolds del cilindre interior.

La descripció més coherent d'aquest catàleg de comportaments s'obté interpretant-los com a ruptures de la simetria: vegeu Chossat i Iooss [3], Schecter [19], i Golubitsky i Stewart [13]. Les simetries del sistema són de tres tipus:

- Simetries reals de l'aparell. Aquestes són totes les rotacions respecte de l'eix, i la reflexió respecte d'un pla horitzontal situat al mig de l'eix.
- Simetries d'un model ideal. El model de Taylor, que és apropiat per a cilindres llargs, suposa que el cilindre és infinitament llarg i es concentra en els patrons espacials periòdics. Podem treballar de manera equivalent, amb un cilindre finit i imposem condicions frontera periòdiques als dos extrems. En aquest model, totes les translacions verticals són simetries.
- Simetries temporals. Els patrons que apareixen són bàsicament de dos tipus. En un (com en els remolins de Taylor) el camp de velocitat del fluid és independent del temps. En l'altre tipus (com en les espirals) el camp de velocitat és periòdic en el temps. En aquest últim cas, apareixen simetries de translacions en el temps (desplaçaments de la fase), tot sovint combinades amb simetries espacials.

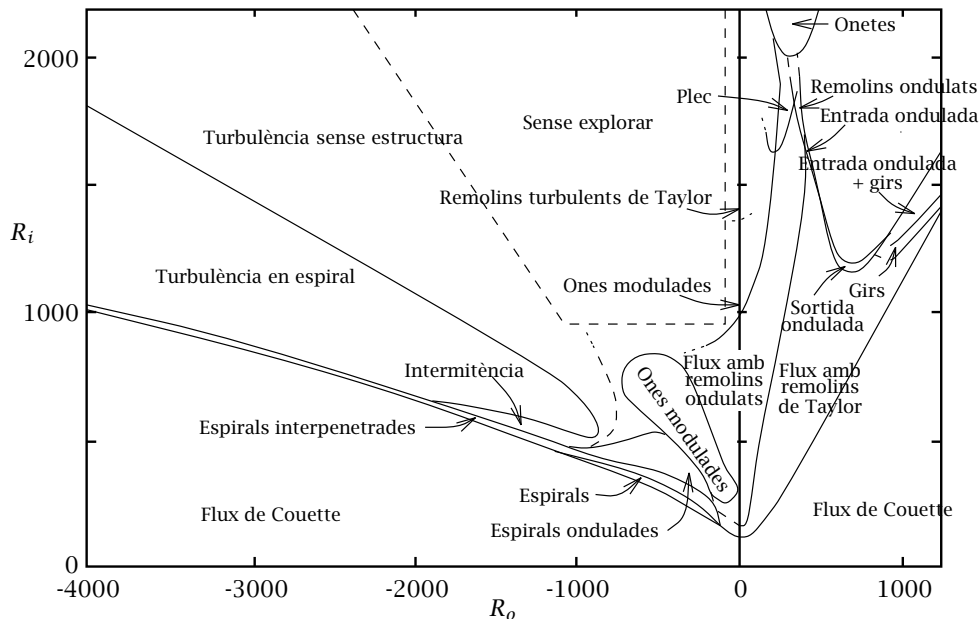


FIGURA 9: Estats del flux en l'experiment de Couette-Taylor. Segons Andereck *et al.* [1].

Ara ja sabem que molts dels patrons que apareixen en el sistema de Couette-Taylor poden ser explicats com a ruptura de simetries. Per exemple, els remolins de Taylor trenquen la simetria de les translacions verticals. I les espirals tenen la simetria espai-temporal següent: rotem en l'espai una porció de tota la circumferència i traslladem el temps la mateixa porció del període temporal. En termes més planers, l'espiral és una ona que gira.

El model de ruptura de simetries s'ha relacionat amb d'altres de quantitius; vegeu, per exemple, Golubitsky i Langford [11]. L'anàlisi de la simetria ha permès la predicció d'un nou patró, les *cintes*, gràcies a Demay i Iooss [7]. Aquest estat apareix de manera estable només per a alguns aparells de certes dimensions, i ha estat observat experimentalment. Per a més detalls, vegeu Golubitsky i Stewart [13, 14].

## 5 Verdet de llim

El verdet de llim és un exemple molt conegut de formació de patrons biològics. El verdet de llim és una colònia d'amebes. El cicle vital del verdet de llim comença (en la mesura que es pugui parlar de l'inici d'un cicle) amb una espora, una ameba seca. Quan l'espóra s'humiteja, esdevé una veritable ameba i es divideix repetidament, i forma una pel·lícula viscosa. Quan la densitat de les amebes és suficientment gran, s'agreguen en peces per a formar colònies

anomenades *pseudoplasmodies* en forma de monedes i emigren a terreny sec. Un cop allà, més o menys la meitat de les amebes formen una tija i les altres es disposen sobre la tija formant una mena de cos en forma de fruit rodó. Es formen espores en el cos en forma de fruit que s'alliberen al vent per a continuar el cicle.



FIGURA 10: Patrons en el verdet de llim.

Durant la fase d'agregació, el verdet de llim forma patrons sorprenents, com a la figura 10. Aquí veiem majoritàriament *espirals*, que en la pràctica giren lentament. Però també veiem *patrons en diana*, discos concèntrics.

Les figures que s'observen en el verdet de llim apareixen també en la reacció química de Belousov-Zhabotinskii. El 1958 Belousov va descobrir que si es dissol una barreja d'àcid cítric i àcid sulfúric en aigua amb bromat de potassi i una sal de ceri, aleshores el color de la barreja oscil·la periòdicament amb el temps. L'interès en aquest fenomen va augmentar quan Zhabotinskii [23] va trobar que unes reaccions similars produïen patrons espacials. En una versió moderna d'aquest famós experiment, tres productes químics es dissolen en aigua i es barregen en una cubeta en proporcions adients: bromat de sodi (dissolt en àcid sulfúric), bromur de sodi i àcid malònic. Vegeu Cohen i Stewart [5] per a la recepta completa. La barreja esdevé groga, i mentre perd bromina es torna de color palla o incolora. En aquest punt, s'hi afegeix un indicador de color: complex 1,10 de fenantrolina ferrosa. Aquest es torna blau o vermell, depenent si la reacció s'oxida o es redueix. Aquest líquid es barreja i es diposita en un disc de Petri, on sembla que roman en un estat d'equilibri espacialment uniforme. Tanmateix, al cap del temps —entre 1 i 10 minuts, normalment— un patró en forma d'anells concèntrics blaus i vermells apareix: patrons en diana. Si un dels anells es trenca amb cura, per exemple arrossegant un filfer-

ro a través d'ell, aleshores el patró es trenca en una sèrie d'espivals rotatòries, sovint lligades en parelles. Vegeu la figura 11.

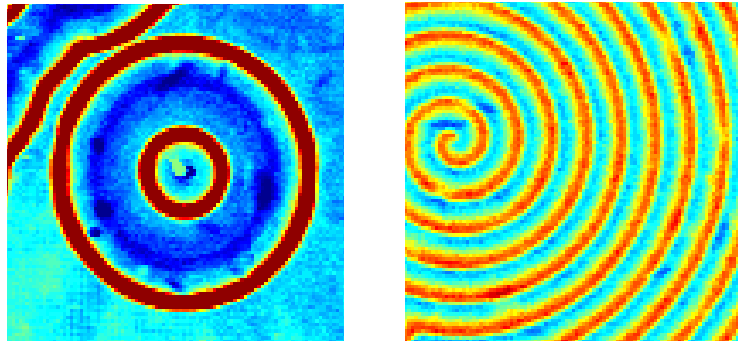


FIGURA 11: Reacció de Belousov-Zhabotinskii: (esquerra) patró en diana; (dreta) ones espivals. Cortesia d'A. L. Lin i H. L. Swinney.

Cadascun d'aquests patrons és periòdic en el temps i té simetria. Els patrons en diana tenen una simetria espacial: a cada instant del temps el patró és invariant sota  $O(2)$ . Les espivals tenen una simetria espai-temporal més interessant. A cada instant del temps l'espival té la simetria trivial en l'espai. Tanmateix, les espivals giren «rígidament» —és a dir, sense canviar de forma— de manera que una translació en el temps és equivalent a una rotació en  $SO(2)$ . De fet, l'angle de rotació és proporcional al temps de translació: és a dir, la velocitat de rotació del patró és constant.

Tots dos patrons, el de diana i l'espival en la reacció de BZ es poden modelar mitjançant bifurcacions de Hopf, vegeu Dellnitz *et al.* [6], Golubitsky *et al.* [10]. Un model de reacció-difusió per a la formació de patrons en verdet de llim ha estat estudiat per Höfer *et al.* [16]. Vegeu també Maini [18] i Weijer [22]. En particular, Weijer modela el moviment d'un *pseudoplasmodium* com una ona lliscant en un sistema tridimensional de reacció-difusió.

## 6 Caos simètric

Des dels anys seixanta, amb antecessors que es remunten fins al 1890, se sap que un fenomen típic dels sistemes dinàmics és el caos. La dinàmica caòtica té trets aleatoris, i pot ser definida com a *dependència molt acusada de les condicions inicials*. És a dir, trajectòries que comencen molt juntes divergeixen exponencialment l'una de l'altra.

Els sistemes dinàmics simètrics mostren certs patrons; el caos sembla l'oposat d'un patró. Es poden combinar el caos i la simetria d'alguna manera útil? Sorprenentment, sí es pot, com va observar Chossat i Golubitsky [2]. Van demostrar que els atractors simètrics són habituals en les iteracions d'aplica-

cions equivariants (no invertibles) del pla. (Més tard, King i Stewart [17] van trobar exemples per a difeomorfismes en  $\mathbb{R}^4$ ) Chossat i Golubitsky iteren aplicacions planars  $\mathbb{D}_m$ -equivariants de la forma

$$f(z) = (\lambda + \alpha|z|^2 + \beta \operatorname{Re}(z^m))z + \gamma \bar{z}^{m-1} \quad (5)$$

on  $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$  són constants reals i  $z \in \mathbb{C}$ . A la figura 12 podem veure imatges d'atractors formades per iteració de  $f$ . Anomenem *icones* els atractors caòtics  $\mathbb{D}_m$ -simètrics.

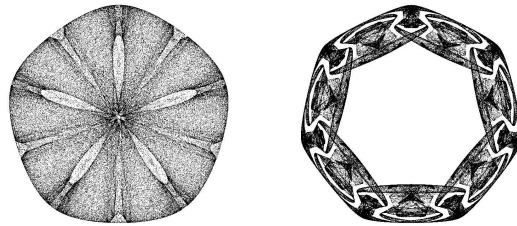


FIGURA 12: Atractor per a (5) on  $(m, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$  valen: (esquerra) els dòlar de sorra  $(5, -2, 34, 2, 0, 0, 2, 0, 1)$ ; (dreta) la polsera maia  $(7, -2, 08, 1, 0, -0, 1, 0, 167)$ . Cortesia de Field i Golubitsky.

Noteu que no tan sols les icones de la figura 12 són  $\mathbb{D}_m$ -simètriques; també tenen una estructura interna sofisticada —la densitat dels punts obtinguda per iteració està lluny de ser uniforme. De fet, la probabilitat que els iterats vagin a parar a una certa regió petita del conjunt atractor varia de regió a regió.

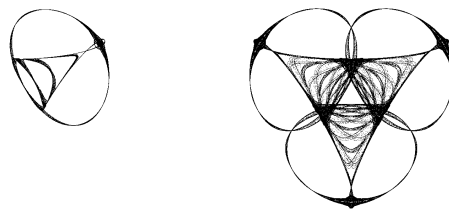


FIGURA 13: Atractor per a (5) on  $(m, \alpha, \beta, \gamma) = (3, -1, 21, -0, 09, -0, 8)$ . (Esquerra)  $\lambda = 1, 40$ , atractor amb simetria  $\mathbb{D}_1$ ; (dreta)  $\lambda = 1, 52$ , atractor amb simetria  $\mathbb{D}_3$ . Cortesia de Field i Golubitsky.

Existeix una mesura de probabilitat natural en el conjunt atractor, i aquesta mesura pot ser aproximada de la manera següent: iterem (5) un bon nombre

de vegades, contem el nombre de vegades que cada *pixel* del conjunt atractor és visitat en el procés d'iteració, donen color als *pixels* segons aquest nombre. D'aquesta manera, igual color vol dir que ha estat visitat un nombre igual de vegades. Aquest procés l'han dut a terme Field i Golubitsky [8], que obtenen molts dibuixos de mesures invariants simètriques d'aquesta manera. De fet, les figures que mostrem aquí han estat produïdes mitjançant el programa ITER, fet per Mike Field.

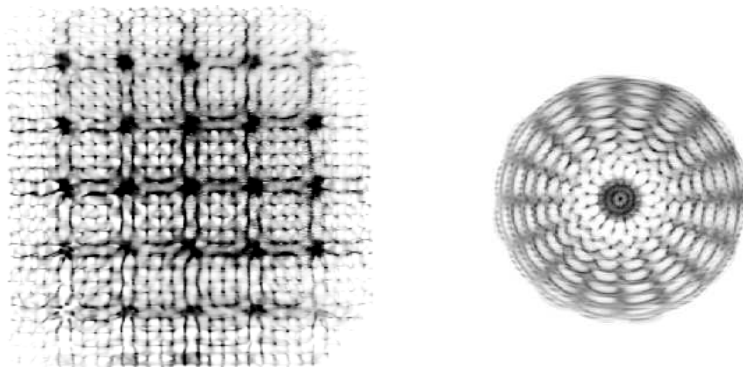


FIGURA 14: Experiment de Faraday realitzat per Gluckman *et al.* [9] prop de les bifurcacions primàries de ruptura de la simetria en recipients amb secció quadrada i circular. Cortesia de J. P. Gollub.

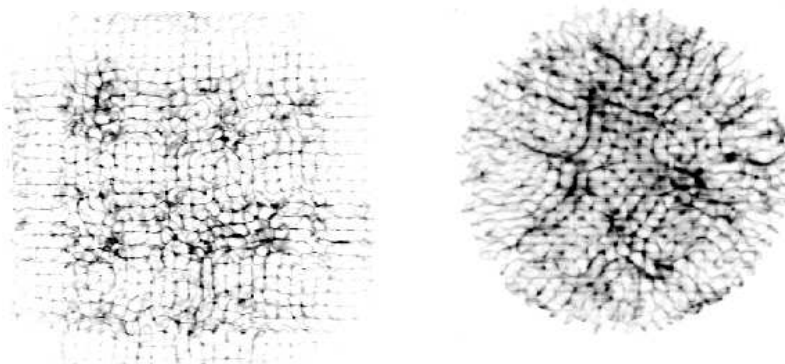


FIGURA 15: Experiment de Faraday realitzat per Gluckman *et al.* [9] en règim de caos espaciotemporal en recipients amb secció quadrada i circular. Cortesia de J. P. Gollub.



Poden aparèixer nous tipus de bifurcació que alteren la simetria, com l'increment de simetria que es mostra a la figura 13. En aquesta figura, tres atractors amb simetria  $\mathbb{Z}_2$  (dos d'ells no són dibuixats) «collisionen» quan el paràmetre varia, per a formar un atractor amb simetria  $\mathbb{D}_3$ .

Podem motivar el concepte de caos simètric basant-nos en experiments. L'experiment de l'ona superficial de Faraday consisteix en una capa de fluid que vibra sinusoidalment amb una amplitud i freqüència fixa. Quan la freqüència de vibració és petita, la capa de fluid roman plana i sense deformar, però quan la freqüència s'incrementa la superfície es deforma en ones que formen patrons consistents amb la simetria de la frontera. La figura 14 mostra dues imatges dels experiments de Gluckman *et al.* [9] —una d'un experiment utilitzant un recipient amb secció quadrada i una altra amb el recipient de secció circular.

Quan la freqüència s'incrementa més, les ones superficials bifurquen fins que les ones assoleixen un estat de *caos espaciotemporal*. A aquest estat, tant la dinàmica temporal com la dinàmica espacial canvien caòticament. En la figura 15 veiem uns dibuixos del caos espaciotemporal en recipients amb secció quadrada i circular.

On són ara els patrons simètrics que eren tan visibles amb vibracions de baixa freqüència? La simetria de l'atractor caòtic es posa de manifest present *mitjanes temporals* dels estats observats. Veieu els detalls en Golubitsky i Stewart [14].

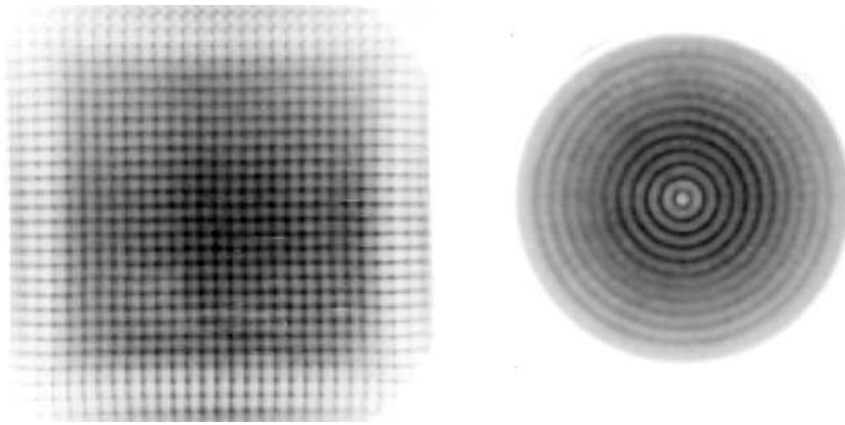


FIGURA 16: Mitjana temporal de la intensitat de llum reflectida en el règim de caos espaciotemporal de l'experiment de Faraday realitzat per Gluckman *et al.* [9]. Cortesia de J. P. Gollub.

En l'experiment de Faraday trobem un exemple de formacions del fenomen de formació de patrons en la mitjana temporal. En l'experiment [9], la mitjana temporal de la intensitat lluminosa reflectida resulta ser simètrica (figura 16), mentre que les fotografies instantànies eren desordenades (figura 15). Així doncs, veiem com la simetria d'un atractor en l'espai de fase es manifesta en l'espai físic a través de les mitjanes temporals.

## Referències

- [1] ANDERECK, D. C. D.; LIU, S. S.; SWINNEY, H. L. «Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders». *J. Fluid Mech.*, 164 (1986), 155-183.
- [2] CHOSSAT, P.; GOLUBITSKY, M. «Symmetry increasing bifurcation of chaotic attractors». *Physica D*, 32 (1988), 423-436.
- [3] CHOSSAT, P.; IOOSS, G. «Primary and secondary bifurcations in the Couette-Taylor problem». *Japan J. Appl. Math.*, 2 (1985), 37-68.
- [4] CICOONA, G. «Symmetry breakdown from bifurcations». *Lett. Nuovo Cimento*, 31 (1981), 600-602.
- [5] COHEN, J.; STEWART, I. *The Collapse of Chaos*. Nova York: Viking, 1994.
- [6] DELLNITZ, M.; GOLUBITSKY, M.; HOHMANN, A.; STEWART, I. «Spirals in scalar reaction-diffusion equations». *Internat. J. Bif. Chaos*, 5 (1995), 1487-1501.
- [7] DEMAY, Y.; IOOSS, G. «Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette-Taylor avec les deux cylindres en rotation». *J. Meca. Th. Appl.* Special volume 'Bifurcations et Comportements Chaotiques', (1985), 193-216.
- [8] FIELD, M. J.; GOLUBITSKY, M. *Symmetry in Chaos: A Search for Pattern in Mathematics, Art, and Nature*. Oxford: Oxford U Press, 1992.
- [9] GLUCKMAN, B. J.; MARCQ, P.; BRIDGE, J.; GOLLUB, J. P. «Time-averaging of chaotic spatiotemporal wave patterns». *Phys. Rev. Lett.*, 71 (1993), 75-98.
- [10] GOLUBITSKY, M.; KNOBLOCH, E.; STEWART, I. «Target patterns and spirals in planar reaction-diffusion systems». *J. Nonlin. Sci.*, 10 (2000), 333-354.
- [11] GOLUBITSKY, M.; LANGFORD, W. F. «Pattern formation and bistability in flow between counterrotating cylinders». *Physica D*, 32 (1988), 362-392.
- [12] GOLUBITSKY, M.; STEWART, I. N. «Hopf bifurcation in the presence of symmetry». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 87 (1985), 107-165.
- [13] GOLUBITSKY, M.; STEWART, I. «Symmetry and stability in Taylor-Couette flow». *SIAM J. Math. Anal.*, 17 (1986), 249-288.
- [14] GOLUBITSKY, M.; STEWART, I. *The Symmetry Perspective: from equilibrium to chaos in phase space and physical space*, Basel: Birkhäuser, 2002.

- [15] GOLUBITSKY, M.; STEWART, I. N.; SCHAEFFER, D. G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. II, *Appl. Math. Sci.*, 69, Nova York: Springer-Verlag, (1988).
- [16] HÖFER, T.; SHERRATT, J. A.; MAINI, P. K. «Cellular pattern formation during *Dictyostelium* aggregation». *Physica D*, 85, 425-444.
- [17] KING, G. P.; STEWART, I. «Symmetric chaos». A: *Nonlinear Equations in the Applied Sciences* (ed. W. F. Ames i C. F. Rogers). Nova York: Academic Press, 1991, 257-315.
- [18] MAINI, P. K. «Some mathematical models for biological pattern formation». A: *On Growth and Form* (ed. M. A. J. Chaplain, G. D. Singh, i J. C. McLachlan), Chichester: Wiley, 1999, 111-128.
- [19] SCHECTER, S. «Bifurcation with symmetry». A: *The Hopf Bifurcation and Its Applications* (ed. J. E. Marsden i M. McCracken), Nova York: Springer-Verlag, 1976, 224-249.
- [20] THOMPSON, J. M. T. *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*. Chichester: Wiley, 1982.
- [21] VANDERBAUWHEDÉ, A. *Local Bifurcation and Symmetry*, Habilitation Thesis, Rijksuniversiteit Gent, 1980; també *Res. Notes Math.* 75, [Boston: Pitman], (1982).
- [22] WEIJER C. «The role of chemotactic cell movement in *Dictyostelium* morphogenesis». A: *On Growth and Form* (ed. M. A. J. Chaplain, G. D. Singh, i J. C. McLachlan). Chichester: Wiley, 1999, 173-199.
- [23] ZHABOTINSKII, A. M. «A study of self-oscillatory chemical reaction III: space behavior». A: *Biochemical Oscillators, Proceedings of the 1968 Prague Symposium* (ed. B. Chance et al.) 1973.

MATHEMATICS INSTITUTE  
UNIVERSITY OF WARWICK  
COVENTRY CV4 7AL  
UNITED KINGDOM  
ins@maths.warwick.ac.uk