Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 17, núm. 1, 2002. Pàg. 79–91

Paradoxes i problemes clàssics de geometria integral

Joaquim Gelabertó, David Juher

Aquest article està inspirat en una conferència pronunciada pel professor Joaquim Gelabertó el 16 de març de 2000, en el marc de la Càtedra Lluís Santaló i el seminari de matemàtiques del Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada de la Universitat de Girona. S'hi exposen el problema de l'agulla de Buffon (1777), el problema de Halphen (1872), la paradoxa de J. F. L. Bertrand (1889) i altres qüestions clàssiques relatives a les probabilitats geomètriques. Es proposen diverses maneres d'atacar cada problema, totes aparentment correctes des del punt de vista de la intuïció, que porten a resultats diferents. Es dóna una explicació formal d'aquestes paradoxes en termes de mesures que no són invariants respecte del grup de moviments rígids del pla.

D'alguna manera, també pretenem mostrar el nostre reconeixement a la figura del gran matemàtic català Lluís Santaló, investigador internacionalment reconegut en el camp de la geometria integral i renovador de l'ensenyament de les matemàtiques a tots els nivells educatius, que va morir el 22 de novembre de 2001 a l'Argentina, on vivia exiliat des de la fi de la Guerra Civil espanyola.

1 Mesura de conjunts de punts. El problema de Halphen (1872)

Per a formular adequadament qualsevol dels problemes clàssics de probabilitat geomètrica necessitem, en primer lloc, disposar d'algun tipus de noció de mesura d'un conjunt de punts de $\mathbb{R}^n$. Això ens permetrà «comptar» els «casos favorables» i els «casos possibles». D'aquesta manera, definirem la probabilitat que un element d'un conjunt A de $\mathbb{R}^n$ pertanyi també a un subconjunt B de A com el quocient entre les mesures de B i A.

Com a mesura d'un conjunt $X \subset \mathbb{R}^n$ (mesurable Lebesgue) podem prendre la integral sobre X de qualsevol funció positiva integrable f, que anomenarem *funció densitat* de la mesura:

$$m(X) = \int_X f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \,.$$

És molt raonable exigir que la mesura del conjunt X no canvïi després de sotmetre'l a qualsevol moviment rígid. Aquest requisit d'invariància, que també imposarem quan ens calgui definir la mesura d'un conjunt de rectes, s'estableix a les obres clàssiques de Lluís Santaló [4] i [5], i ens determina com ha de ser la funció densitat: en el cas que ens ocupa, un senzill càlcul mostra que f ha de ser constant. Prenem, doncs, per exemple, $f = 1$ i definim

$$m(X) = \int_X dx_1 \cdots dx_n \,.$$

Per exemple, presos un segment S de longitud L i un segment s de longitud $l < L$ contingut a S, la probabilitat que un punt de S pertanyi també a s és l/L, ja que la mesura del conjunt de punts d'un segment coincideix amb la longitud del segment. Un altre exemple: quina és la probabilitat que, triant a l'atzar dos punts d'un segment de longitud L, estiguin situats a una distància menor que un cert nombre $d < L$? Podem representar el conjunt de tots els possibles parells de punts com el quadrat $[0, L] \times [0, L]$ de $\mathbb{R}^2$. Per tant, el conjunt de tots els casos possibles té mesura L^2. El conjunt de casos favorables és exactament el conjunt de punts (x, y) del quadrat tals que $|x - y| < d$. Podeu comprovar fàcilment que l'àrea d'aquesta regió és $L^2 - (L - d)^2 = 2Ld - d^2$. De manera que la probabilitat demanada és $\frac{2Ld - d^2}{L^2}$.

El problema de Halphen (*Bull. Societé Math. de France*, 1872) ens demana la probabilitat p que, dividint un segment en n trossos arbitraris, es pugui formar amb aquests trossos un polígon de n costats. Per conveniència, calcularem la probabilitat $1 - p$ de l'esdeveniment contrari (que no es pugui formar cap polígon). Sigui a la longitud del segment. Identifiquem el segment amb l'interval $[0, a]$ i pensem que hem indexat els $n - 1$ punts de divisió d'esquerra a dreta, de manera que el conjunt $\mathcal{P}$ de casos possibles serà el conjunt de punts $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tals que $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < a$. Tenim, doncs, que

$$m(\mathcal{P}) = \int_0^a \int_{x_1}^a \int_{x_2}^a \cdots \int_{x_{n-2}}^a dx_{n-1}\, dx_{n-2} \cdots dx_1 \,.$$

Un senzill càlcul iteratiu mostra que $m(\mathcal{P}) = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$.

Pel que fa al conjunt $\mathcal{F}$ de casos favorables, observem que el fet que no es pugui formar un polígon amb els trossos obtinguts és equivalent al fet que un dels trossos tingui longitud més gran que $a/2$. Com que la tria dels punts de tall és aleatòria, tots els trossos tenen la mateixa probabilitat de tenir longitud més gran que $a/2$. Així doncs, podem considerar la següent partició equiprobable de $\mathcal{F}$ (poseu $x_0 = 0$ i $x_n = a$):

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \,,$$

amb

$$\mathcal{F}_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{P} : x_{i-1} + \frac{a}{2} < x_i\}.$$

La mesura de $\mathcal{F}$ és n vegades la mesura de, per exemple, $\mathcal{F}_1$. Tenim

$$m(\mathcal{F}_1) = \int_{a/2}^{a}\int_{x_1}^{a}\int_{x_2}^{a}\cdots\int_{x_{n-2}}^{a} dx_{n-1}\, dx_{n-2} \cdots dx_1\,,$$

que és $\frac{(a/2)^{n-1}}{(n-1)!}$. Finalment, doncs, $m(\mathcal{F})=n\frac{(a/2)^{n-1}}{(n-1)!}$. Per tant, la probabilitat que demana el problema de Halphen és

$$1 - \frac{m(\mathcal{F})}{m(\mathcal{P})} = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

Per exemple, la probabilitat que trencant un segment en $n = 3$ trossos arbitraris puguem formar un triangle és $1/4$.

2 Mesura de conjunts de rectes al pla. El problema de l'agulla de Buffon (1777)

Tenim un pla ratllat amb rectes paral·leles, amb distància D entre dues de consecutives. Es demana la probabilitat p que una agulla de longitud l llançada a l'atzar al damunt del pla talli alguna de les rectes. Aquest problema fou plantejat (i resolt) pel cèlebre naturalista francès Georges Louis Leclerc (1707–1788), comte de Buffon, autor d'una monumental *Història natural* en 44 volums, que pretenia recopilar tot el coneixement científic de l'època amb finalitats divulgadores.

Ataquem primer el cas $l \leq D$. Es proposa la solució següent, original de Laplace (1779). Suposem que l'agulla ja ha estat llançada al damunt del pla, de manera que la seva posició està fixada, i incloem-la dins d'una circumferència qualsevol de diàmetre D, també fixada. Sigui C la circumferència i sigui C' l'agulla (vegeu la figura 1). Pres un ratllat amb rectes paral·leles a distància

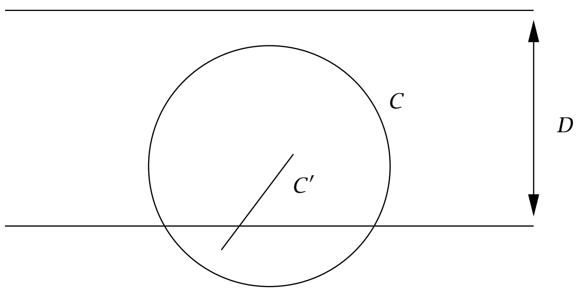

FIGURA 1: L'agulla de Buffon, en el cas $l \leq D$.

D, exactament una de les rectes del ratllats intersecarà amb C (o bé dues rectes del ratllat seran tangents a C). Per tant, el conjunt de totes les possibles maneres de ratllar el pla es pot identificar amb el conjunt de totes les rectes que s'intersequen amb C. Això constitueix el conjunt de casos possibles. El conjunt de casos favorables és el conjunt de rectes que s'intersequen alhora amb C i C'. Per a avaluar la probabilitat demanada, ens cal mesurar aquests conjunts de rectes, i fer el quocient entre les mesures dels casos favorables i els casos possibles.

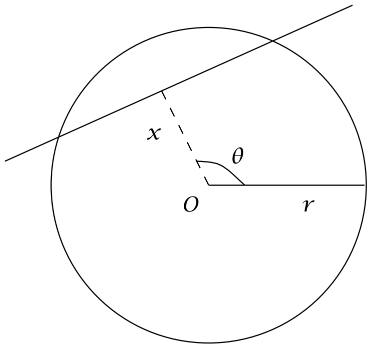

FIGURA 2: Coordenades de Santaló per al problema de l'agulla de Buffon.

Cal introduir, doncs, la noció de *mesura d'un conjunt de rectes*. Una recta del pla queda determinada per un parell de paràmetres. Per exemple, si fixem un punt del pla O i una semirecta r amb origen O, llavors podem determinar una recta qualsevol del pla mitjançant el parell (x, θ) on x és la distància de la recta a O i θ és l'angle d'inclinació de la normal de la recta respecte de r (vegeu la figura 2). A un conjunt donat de rectes del pla correspon un subconjunt $X \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ de paràmetres, i la mesura del conjunt de rectes respecte d'una densitat f serà

$$m(X) = \int_X f(x, \theta)\, dx\, d\theta\,.$$

Tal com ja s'ha dit, volem determinar quina ha de ser la funció f per tal que es compleixi el requisit d'invariància de la mesura quan se sotmet el conjunt de rectes a un moviment rígid del pla. Es pot demostrar (vegeu la pàg. 56 de [4], o bé [7]) que f ha de ser constant. Prenem, per exemple, $f = 1$ i definim

$$m(X) = \int_X dx\, d\theta\,.$$

Per comoditat, d'ara endavant el parell de paràmetres (x, θ) serà anomenat *coordenades de Santaló*. De fet, aquestes coordenades ja foren utilitzades a la segona meitat del segle XIX per Cauchy i Crofton (a qui hom considera l'iniciador de la geometria integral). Observeu que podríem haver escollit qualsevol altra manera (α, β) de parametritzar un conjunt de rectes del pla, potser fins i tot més natural *a priori* que la que acabem d'exposar. A l'hora de calcular, per a aquesta altra parametrització, la funció densitat $f(\alpha, \beta)$ resultant d'imposar el requisit d'invariància de la mesura per moviments rígids, podríem obtenir una funció no necessàriament constant. Això voldria dir que triar aleatòriament una recta del conjunt no seria equivalent a triar aleatòriament i de manera independent una α i una β del conjunt de paràmetres. Per a les coordenades de Santaló, el fet que la funció densitat resultant sigui 1 ens diu que obtenir aleatòriament rectes del conjunt és equivalent a triar aleatòriament x i θ. Triar un sistema de paràmetres adequat a l'hora d'escollir a l'atzar un conjunt de rectes és indispensable en algunes aplicacions d'informàtica gràfica que necessiten intersecar, de manera ràpida i eficient, un conjunt de rectes triades aleatòriament amb els objectes que componen una escena. Vegeu, per exemple, [1] o [6].

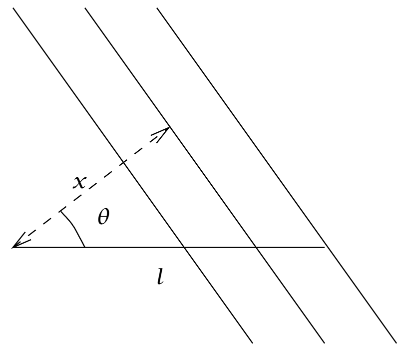

FIGURA 3: $(\theta, x) \in [0, \pi/2] \times [0, l\cos\theta]$ per a les rectes que tallen l'agulla.

Reprenem el problema de l'agulla de Buffon. La mesura del conjunt $\mathcal{P}$ de rectes de $\mathbb{R}^2$ que tallen C és

$$m(\mathcal{P}) = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} d\theta \, dx = \pi D \, .$$

Els paràmetres (x, θ) prenen valors a $[0, D/2] \times [0, 2\pi]$ si prenem com a punt O i semirecta r de referència, respectivament, el centre de la circumferència i un radi qualsevol (vegeu la figura 2). Pel que fa als casos favorables $\mathcal{F}$, podem mesurar el conjunt de rectes que tallen l'agulla C' prenent com a punt O un extrem de l'agulla i com a semirecta de referència la pròpia agulla (vegeu la figura 3). Per simetria, podem prendre $[0, \pi/2]$ com a interval de variació de θ, i multiplicar per 2 la integral. Aleshores,

$$m(\mathcal{F}) = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{l\cos\theta} dx \, d\theta = 2\, l \, .$$

Finalment, la probabilitat que ens demanen és $p = m(\mathcal{F})/m(\mathcal{P}) = 2\,l/\pi D$. Observeu que en el cas $l = D$ s'obté $p = \frac{2}{\pi}$. Aquest fet ha estat utilitzat algunes vegades al llarg de la història per diversos personatges que han intentat calcular aproximacions de π experimentalment, és a dir, repetint moltes vegades l'experiment del llançament de l'agulla i comptant la freqüència de tall. Wolf (Zuric, 1850) va obtenir per a π el valor 3,1596 després de 5.000 llançaments, i els anglesos Smith (1855) i Fox (1864) obtingueren 3,1553 i 3,1419 amb 3.200 i 1.100 llançaments, respectivament. El rècord de precisió se l'emporta Mario Lazzarini que, l'any 1901, obtingué 3,1415929 després de 3.408 repeticions de l'experiment (vegeu [2]). Per cert: si voleu fer l'experiment vosaltres mateixos, només cal que us connecteu a l'adreça d'Internet [9]. Un petit programa us permetrà anar llançant a l'atzar grups d'1, 2, 10, 20 o 100 agulles, que cauran al damunt de la pantalla i es tornaran de color blau o vermell segons si tallen o no el ratllat. Després de cada llançament se us mostrarà la freqüència acumulada i l'aproximació de π resultant. Nosaltres hem tingut molt mala sort: després de 6.000 agulles hem obtingut el valor 3,21646512...

Suposem ara que $l > D$. En aquest cas no podem repetir els raonaments previs, però és suficient un argument directe, més senzill. Considerem que el punt mig de l'agulla està situat al damunt d'una recta r perpendicular a les paral·leles del ratllat. Sigui y la distància del punt mig de l'agulla a una paral·lela del ratllat. Per la simetria del problema, podem considerar que $y \in [0, D/2]$. I, si α és l'angle entre l'agulla i r, tenim que $\alpha \in [0, \pi]$. Per tant, la mesura del conjunt $\mathcal{P}$ de casos possibles és $\pi D/2$. Pel que fa als casos favorables, donada qualsevol $y \in [0, D/2]$, l'agulla tallarà la paral·lela quan $\alpha \in [0, \arccos(2y/l)] \cup [\pi - \arccos(2y/l), \pi]$. Per tant,

$$m(\mathcal{F}) = 2\int_0^{D/2}\int_0^{\arccos(2y/l)} d\alpha\, dy = D \arccos\left(\frac{D}{l}\right) + l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{D^2}{l^2}}\right),$$

i

$$p = \frac{m(\mathcal{F})}{m(\mathcal{P})} = \frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{D}{l}\right) + \frac{2l}{\pi D}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{D^2}{l^2}}\right).$$

3 La paradoxa de Bertrand (1889)

Es demana calcular la probabilitat p que la longitud d'una corda que prenem a l'atzar dins d'un cercle de radi 1 sigui més gran que $\sqrt{3}$, que és el costat del triangle equilàter inscrit al cercle.

Una primera manera d'obtenir aleatòriament una corda consisteix a triar a l'atzar (uniformement) un radi del cercle i, tot seguit, triar a l'atzar (uniformement) un punt sobre aquest radi. Aleshores triem la corda que passa per aquest punt i que és perpendicular al radi. Exactament la meitat de les cordes triades d'aquesta manera (les que passen pels punts del radi més propers al centre que a la frontera del cercle) compleixen la condició que ens demanen. Per tant, $p = 1/2$. La formalització d'aquesta idea és la següent: la mesura de

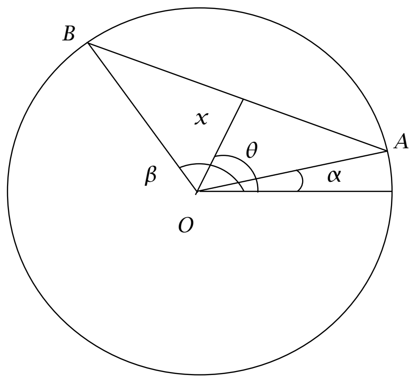

FIGURA 4: Segona solució al problema de Bertrand.

totes les cordes del cercle és

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta\, dx = 2\pi\,,$$

on x és la distància de la corda al centre del cercle i θ és la inclinació, respecte d'una direcció fixada, del radi perpendicular a la corda. La mesura dels casos favorables és

$$\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} d\theta\, dx = \pi\,.$$

Per tant, $p = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$. Observeu que estem parametritzat els conjunts de cordes fent servir les coordenades de Santaló, per a les quals ja sabíem que el requisit d'invariància de la mesura ens portava a una funció densitat constant. Això ens permet considerar que la solució obtinguda és correcta des del punt de vista de la geometria integral. Per a adonar-nos de la importància que té triar una bona parametrització dels conjunts de rectes tot seguit proposarem dues aproximacions diferents al problema, que condueixen a solucions diferents, i que també va proposar Bertrand en el seu *Calcul des probabilités* de 1889. Va ser Poincaré, el 1912, qui finalment va treure'n l'entrellat (vegeu [3]).

Presa una corda, siguin A i B els seus extrems, i sigui O el centre del cercle. Definim els angles α i β com els angles d'inclinació, respectivament, dels costats OA i OB respecte d'un radi fixat (vegeu la figura 4). Podem triar aleatòriament el punt A, cosa que equival a triar aleatòriament un angle α qualsevol, i tot seguit triar també aleatòriament un punt B o, equivalentment, un angle β qualsevol. Si considerem l'angle $\beta - \alpha$ definit pels costats OA i OB, podeu comprovar que el conjunt de casos favorables té mesura $\pi/3$, mentre que el conjunt de casos possibles va de 0 a π. Això ens dóna una probabilitat $p = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}$, diferent de la que havíem obtingut amb el raonament anterior.

En aquesta nova aproximació al problema, estem parametritzant els conjunts de cordes per la parella d'angles (α, β). Per a aquest sistema de paràmetres, quina és la funció densitat $f(\alpha, \beta)$ de la mesura que compleix el requisit d'invariància? Ja que coneixem la mesura quan fem servir les coordenades (x, θ) de Santaló, només ens cal fer un canvi de variables. Observeu la figura 4 i us adonareu que

$$x = \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right), \qquad \theta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Per tant, calculant el jacobià del canvi de variable que expressa x i θ en funció de α i β tenim que

$$dx\, d\theta = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) d\alpha\, d\beta.$$

Així doncs, en coordenades (α, β) la mesura que compleix el requisit d'invariància té densitat no constant $f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})$. De manera que triar aleatòriament i de manera independent una α i després una β (cosa que equival a utilitzar una densitat constant) no és una manera correcta de triar aleatòriament una corda. Des del punt de vista de la geometria integral, doncs, aquesta solució no és correcta.

Proposem encara una tercera solució al problema. Presa una corda, siguin (X, Y) les coordenades cartesianes (respecte d'O) del seu punt mig. El conjunt de casos favorables està format pels punts (X, Y) que pertanyen al cercle de centre O i radi $1/2$, mentre que tots els punts del cercle de centre O i radi 1 són casos possibles. La probabilitat p és, doncs, $p = \frac{\pi/4}{\pi} = \frac{1}{4}$. En aquest cas, com que $X = x\cos\theta$ i $Y = x\sin\theta$, la nostra mesura esdevé

$$dx\, d\theta = \frac{dX\, dY}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

amb funció densitat no constant. De manera que $p = 1/4$ tampoc no es pot considerar una solució correcta.

Si voleu experimentar amb la paradoxa de Bertrand, podeu entrar en una adreça d'Internet [8], on un petit programa us permetrà, de manera interactiva, anar traçant aleatòriament conjunts de cordes segons cada una de les parametritzacions que hem proposat. Vegeu també [10].

4 Probabilitat de separació de dos punts interiors a un cercle per una corda arbitrària

Ens demanen que calculem la probabilitat p que, triant aleatòriament una corda AB d'un cercle de radi r i dos punts M i N interiors al cercle, la corda separi els dos punts. Mesurem primer el conjunt $\mathcal{P}$ dels casos possibles.

Pel que fa a la parella de punts M i N, la mesura dels casos possibles és $\frac{1}{2}(\pi r^2 \cdot \pi r^2)$ (cal dividir per 2 perquè el producte d'àrees compta dues vegades cada parella de punts). Pel que fa a les cordes, la mesura del conjunt de casos possibles per al punt A és πr (també cal dividir per 2 per a evitar repetició de cordes), i, pres A, el conjunt de valors possibles per a l'angle φ que formen la corda i la recta tangent al cercle que passa per A és $0 < \varphi < \pi$. Aleshores, la mesura total de cordes possibles és $\pi r \cdot \pi = \pi^2 r$. És a dir, prenem d'espai mostral el conjunt de quaternes (M, N, A, φ) tals que M és qualsevol punt del semicercle, N és qualsevol punt del cercle, A és qualsevol punt de la semicircumferència, i φ varia entre 0 i π. La mesura total $m(\mathcal{P})$ per als 2 punts i la corda és, doncs, $\pi^4 r^5/2$. Pel que fa al conjunt $\mathcal{F}$ de casos favorables, ens cal tenir M en un dels dos segments circulars determinats per la corda AB, i N en l'altre. Fixats A i B, les àrees dels dos segments circulars definits per AB són $r^2\varphi - r^2 \cos\varphi \sin\varphi$ i $r^2(\pi - \varphi) + r^2 \cos\varphi \sin\varphi$ (penseu que φ és, també, l'angle format pel radi perpendicular a la corda i el segment OA: vegeu la figura 5). Així doncs, la mesura dels parells M, N separats per una corda AB fixada és $r^4(\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi)$. Per a considerar totes les cordes, només ens cal fer variar φ entre 0 i π (cosa que equival a pensar que A està fixat i B varia),

$$r^4 \int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi)\, d\varphi$$

i finalment fer variar A, que equival a multiplicar per la mesura, πr, de tots els possibles punts A:

$$m(\mathcal{F}) = \pi r^5 \int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi)\, d\varphi$$

de manera que la probabilitat que ens demanen és

$$\begin{aligned} p = \frac{m(\mathcal{F})}{m(\mathcal{P})} &= \frac{\pi r^5}{\pi^4 r^5/2} \int_0^\pi (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5}{4\pi^2} \approx 0{,}2067\,. \end{aligned}$$

Proposem una segona solució al problema, tot utilitzant les coordenades de Santaló (x, θ). Recordem que x és la distància de la corda al centre del cercle i θ és la inclinació de la perpendicular a la corda respecte d'un radi fixat (vegeu la figura 5). En aquestes coordenades, la mesura de totes les cordes possibles és

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} d\theta\, dx = 2\pi r\,.$$

D'altra banda, la mesura de totes les parelles M, N possibles és, com abans, $\frac{1}{2}(\pi r^2)^2$. Per tant, $m(\mathcal{P}) = \pi^3 r^5$. Mesurem tot seguit el conjunt $\mathcal{F}$ de casos favorables. Com abans, la mesura dels parells M, N separats per una corda donada serà el producte de les àrees dels dos sectors circulars definits per la corda. Aquestes àrees només depenen de x, i no pas de la inclinació θ de la corda. Per tant, només ens cal calcular el producte d'aquestes àrees en

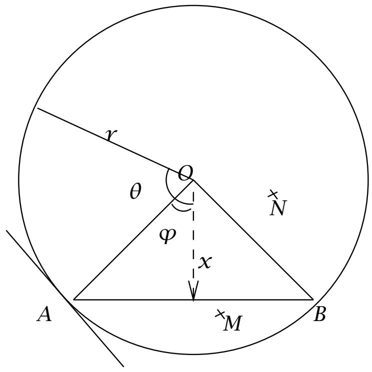

Figura 5: Separació de dos punts M i N per una corda.

funció de x, integrar per a tots els valors de x entre 0 i r i finalment, multiplicar per 2π per a recollir totes les possibles inclinacions. Això ens dóna

$$m(\mathcal{F}) = 2\pi r^4 \int_0^r (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi)\, dx\,,$$

on $x = r\cos\varphi$, de manera que $dx = -r\sin\varphi\, d\varphi$ i la integral esdevé (prescindint del signe)

$$2\pi r^5 \int_0^{\pi/2} (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \sin\varphi\, d\varphi\,.$$

Finalment, doncs, la probabilitat que ens demanen és

$$p = \frac{m(\mathcal{F})}{m(\mathcal{P})} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} (\varphi - \cos\varphi \sin\varphi)(\pi - \varphi + \cos\varphi \sin\varphi) \sin\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{128}{45\pi^2} \approx 0,2882\,.$$

En aquest cas, de les dues solucions presentades només és correcta la segona. En la primera, la mesura del conjunt de cordes conté el factor π, que és la mesura de l'interval d'angles possibles entre la corda i la tangent al cercle en el punt A, quan B fa una rotació completa al voltant del cercle. Si componem aquesta rotació amb una rotació de centre i angle arbitraris, obtenim una tercera rotació, amb un interval d'angles possibles per a B no necessàriament de mesura π. Novament, doncs, la utilització d'una parametrització per a la qual la mesura de densitat 1 no és invariant per moviments rígids.

Finalment, presentem dos problemes en els quals ens caldrà mesurar conjunts de rectes de $\mathbb{R}^3$. Sense entrar en massa detalls, exposarem dues solucions contradictòries per a cada problema, una de les quals és la correcta des del punt de vista de la geometria integral. El lector interessat cal que consulti les referències.

5 Probabilitat d'inclinació menor que α d'un pla arbitrari respecte a l'horitzó

Si prenem a l'atzar un pla arbitrari a l'espai, se'ns demana la probabilitat p que formi un angle agut menor que α respecte a l'horitzó.

Si considerem la secció meridiana del problema, hem d'avaluar simplement la probabilitat que una recta de $\mathbb{R}^2$ que passi per l'origen tingui un angle d'inclinació menor que α respecte a l'eix de les abscises. Òbviament aquesta probabilitat és $\frac{\alpha}{\pi/2} = \frac{2\alpha}{\pi}$. Per exemple, si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $p = \frac{1}{2}$. Aquesta reducció del problema, però, no és pas correcta.

Pres un pla que passa per l'origen, sigui ω la seva direcció normal. Sigui θ la inclinació de ω respecte a la recta que passa per l'origen i és perpendicular a l'horitzó (que també és la inclinació del pla respecte de l'horitzó), i sigui φ la inclinació de la recta intersecció del pla i l'horitzó respecte d'una direcció fixada continguda a l'horitzó (vegeu la figura 6).

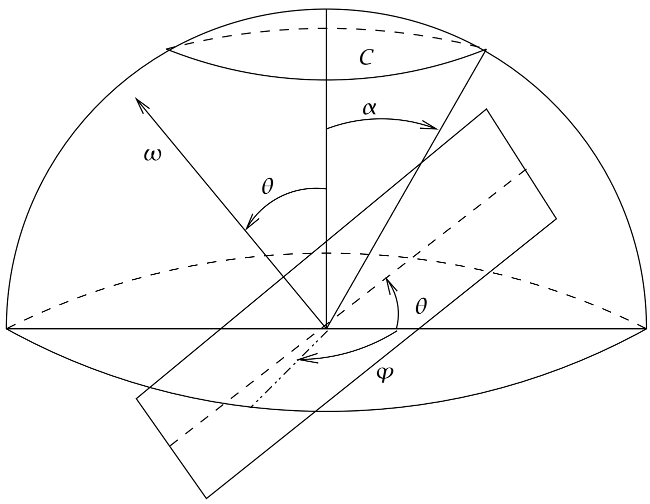

FIGURA 6: Inclinació d'un pla respecte a l'horitzó.

Aleshores, $d\omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$ és l'element de superfície esfèrica de radi 1, o *element d'angle sòlid*. Aleshores, és clar que el conjunt de resultats favorables per a ω té mesura

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)\,,$$

mentre que la mesura de les ω possibles és

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = 2\pi\,.$$

Per tant, el quocient és $p = \frac{2\pi(1-\cos\alpha)}{2\pi} = 1 - \cos\alpha$. Per exemple, si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, que no coincideix amb la solució que havíem obtingut prèviament.

6 Probabilitat de distància angular menor que α entre dos punts arbitraris d'una esfera

Volem calcular la probabilitat p que, triats aleatòriament dos punts sobre una superfície esfèrica, estiguin situats a una distància angular no més gran que α. Considerant la secció meridiana del problema, trobareu sense dificultat que $p = \alpha/\pi$. En canvi, amb la notació introduïda a la secció anterior (θ és ara la inclinació, respecte de la recta que passa per l'origen i és perpendicular a l'horitzó, del segment que uneix un punt de l'esfera amb l'origen), tenim que les ω favorables són

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

mentre que les ω possibles tenen mesura

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi$$

de manera que $p = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. En aquest cas, doncs, podeu comprovar que el problema tampoc no és reduïble a una secció meridiana.

Referències

[1] Cazals, F.; Sbert, M. *Some integral geometry tools to estimate the complexity of 3D scenes.* Report de recerca IIiA 97-04-RR. Universitat de Girona, 1997. [També com a INRIA Research Report RR-3204.]

[2] Gasull, A. [ed.] *Fes matemàtiques.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, 2001.

[3] Poincaré, H. *Calcul des probabilités.* (Reimpressió de l'edició de 1912). Les grands classiques Gauthier-Villars. París: Editions Jacques Gabay, 1987.

[4] Rey-Pastor, J.; Santaló, L. A. *Geometría integral.* Madrid: Espasa-Calpe, 1951.

[5] Santaló, L. A. *Integral Geometry and Geometric Probability.* Massachussets: Addison–Wesley, Reading, 1976.

[6] Sbert, M. *An Integral Geometry Method for Fast Form Factor Computation.* Eurographics'93.

[7] Solomon, H. *Geometric probability.* SIAM–CBMS 28, Filadèlfia, 1978.

[8] `http://www.cut-the-knot.com/bertrand.html`

[9] `http://www.ideamas.cl/cursoProb/javaEstat/buffon/buffon.html`
[10] `http://ima.udg.es/~mateu/egtutorial`

Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada
Universitat de Girona
Lluís Santaló, s/n, 17071 Girona
`juher@ima.udg.es`