Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 17, núm. 1, 2002. Pàg. 65–78

Matemàtica en la creació musical

Salvador Comalada

Imagina per uns moments que has de compondre una peça de música. Les decisions que has de prendre tenen a veure bàsicament amb dos aspectes: el material que utilitzaràs (la paleta de sons) i com organitzaràs el material escollit (els principis organitzatius). Tots els moviments artístics han tingut i tenen profundes implicacions en cadascun d'aquests dos terrenys que, utilitzant un símil científic, podriem batejar com *la física i la química de la música*. A més, el mateix fet metafísic de decidir ja ha estat un objecte inspirador «per se» en alguns corrents artístics com, per exemple, la música aleatòria.

La meva exposició se centrarà només en l'aspecte «químic» i en el paper de les matemàtiques com a eina organitzadora. Si fulleges alguna revista de teoria musical, com ara *Journal of Music Theory*, *Music Theory Spectrum* o *Perspectives of New Music*, t'adonaràs de la important presència de la matemàtica tant en la formulació de teories noves i principis organitzatius nous, com en la formalització de noves tècniques d'anàlisi. De fet, anàlisi i composició musicals són dues cares de la mateixa moneda. Començaré analitzant un parell d'exemples musicals; es tracta de dues peces per a piano prou significatives com són la primera de les *Invencions a dues veus* de J. S. Bach i la primera de les *Tres peces per a piano Op. 11* d'A. Schönberg. Si bé totes dues estan estructurades a partir d'una cèl·lula musical bàsica (el motiu), presenten, en canvi, algunes diferències quant a la manera de teixir l'entramat motívic i sobretot quant a la pròpia concepció de l'espai musical on es representa el motiu.

1 Exemple primer

Un primer model d'espai sonor consisteix a identificar els sons (en aquest cas els del piano) segons la freqüència. De fet, és més convenient en molts casos utilitzar un model enter que s'obté, per exemple, mitjançant una trans-

$\lvert y-x \rvert$		$\lvert y-x \rvert$	
0	unison	12	octava justa
1	segona menor	11	setena major
2	segona major	10	setena menor
3	tercera menor	9	sisena major
4	tercera major	8	sisena menor
5	quarta justa	7	quinta justa
6	tritó		

TAULA 1: Intervals.

formació logarítmica de la forma:

$$x' = \log_{\sqrt[12]{2}} \frac{x}{261,63},$$

essent 261,63 Hz la freqüència del do_3, el do del mig del piano. D'aquesta manera, a cada tecla del piano correspon un únic nombre enter que s'anomena *nota*. Preses dues notes x, y definim l'interval ordenat o relatiu que formen, com la diferència $y - x$. Així mateix es defineix l'interval no ordenat o absolut entre x, y, com el valor absolut de la seva diferència. La teoria clàssica ha donat diferents noms als intervals, tal i com apareixen a la taula 1.

La figura 2 reprodueix els primers compassos de la *Invenció a dues veus, núm. 1* de J. S. Bach i la figura 1 representa el corresponent diagrama de notes en funció del temps. Les primeres set notes que s'escolten constitueixen una microestructura o cèl·lula musical que anomenem el *motiu* de la peça. Aquest motiu es transforma i evoluciona tot creant el teixit de l'obra. A la figura 3 es posa de relleu el motiu inicial A i algunes de les seves transformacions, clarament identificables en el diagrama de notes. En efecte, les figures B, C, D, E i F són desplaçaments de la figura A. Utilitzo el terme *desplaçament* en el seu sentit geomètric, és a dir, en el d'isometria del pla afí. Així, B, C i D són translacions d'A, mentre que E i F són simetries d'A respecte de l'eix horitzontal (l'eix del temps) seguides, naturalment, d'una translació en la direcció del mateix eix.

Ara deixem de banda la coordenada del temps i concentrem-nos només en les notes. La transformació que opera en les notes a B, C i D és, doncs, de la forma:

$$\mathcal{T}_n(x) = x + n \qquad x, n \in \mathbb{Z}\,.$$

En llenguatge musical $\mathcal{T}_n$ s'anomena *transposició* de n semitons o d'índex n. En canvi, en els casos E i F l'operació és de la forma:

$$\mathcal{I}_m(x) = m - x \qquad x, m \in \mathbb{Z}$$

i s'anomena una *inversió* d'índex m.

El fet que el compositor utilitzi de manera preferent aquestes dues operacions —transposició i inversió— a l'hora de construir l'entramat de la peça, no

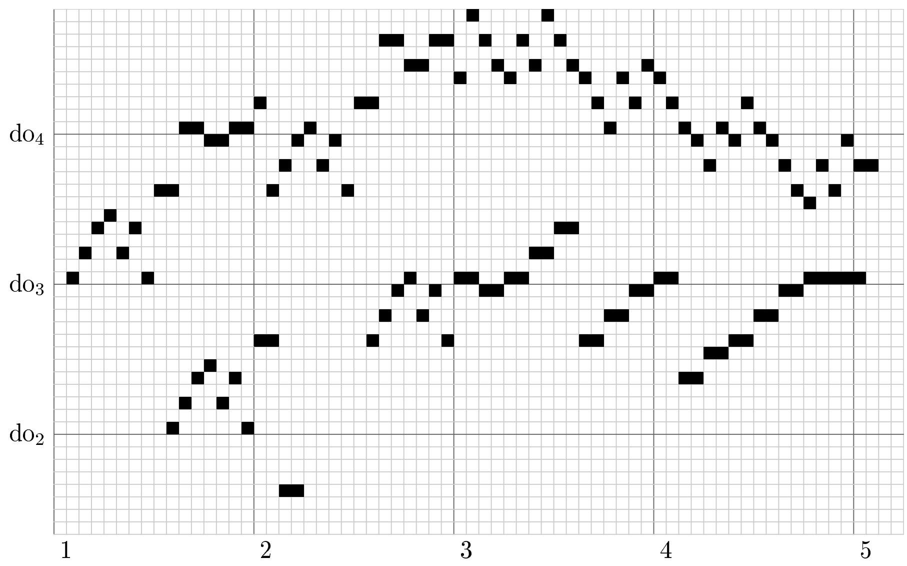

FIGURA 1: J. S. Bach. *Invenció a dues veus, núm. 1.*

FIGURA 2: J. S. Bach. *Invenció a dues veus, núm. 1.*

és de cap manera una decisió arbitrària, sinó que obeeix a una necessitat imposada per la mateixa tècnica de la composició motívica: el reconeixement del motiu i els seus transformats dins del teixit general de l'obra. En aquest sentit s'estableix el *principi de conservació intervàlica*: «els intervals absoluts entre les notes del motiu es mantenen constants respecte de les transformacions». El principi de conservació intervàlica és una llei de conservació de l'estructura horitzontal de l'obra, és a dir, de la línia melòdica. Les transposicions i les inversions segueixen clarament el principi de conservació intervàlica. De fet, és molt senzill de veure que $\mathcal{T}_n$ i $\mathcal{I}_m$ són les úniques aplicacions de $\mathbb{Z}$ amb aquesta propietat.

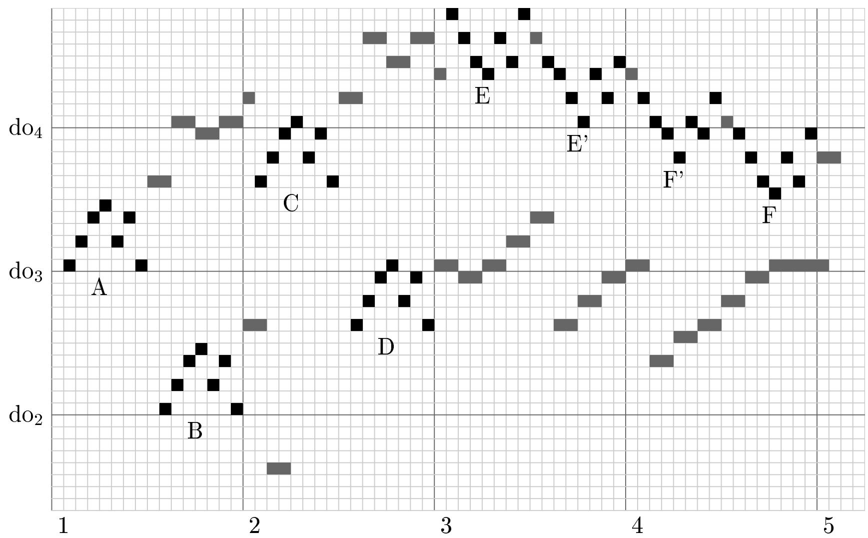

FIGURA 3: L'entramat motívic.

Tot i que, doncs, les transposicions i les inversions són els dos grans aliats del compositor a l'hora de difondre de manera fidel la línia melòdica del motiu a través de la peça, és molt corrent observar altres transformacions del motiu que no es corresponen ni amb transposicions ni amb inversions exactes sinó que presenten petites «deformacions». A la figura 3, les figures E' i F' són un exemple de «quasi-inversions» d'A. Aquestes deformacions tenen a veure amb l'anomenat efecte gravitatori de la tonalitat.

Una tonalitat o escala és un subconjunt dels enters que s'utilitza com a suport preferent de les notes en una composició. Durant l'època barroca es practicaven sobretot els modes major i menor (vegeu el quadre 5). Tant el mode major com el menor estan determinats per una nota i les seves octaves: les tòniques. Entre una tònica (que podem centrar sempre en el zero, fent un canvi de coordenades) i la seva octava s'intercalen sis notes més, tot seguint una relació intervàlica fixa per a cada mode. La *Invenció 1* està escrita en do major, és a dir, en mode major de tònica do. Aquesta és la tonalitat global de la peça encara que, localment, el compositor modula a altres tonalitats com la de sol major, re menor, la menor i fa major, seguint l'habitual cicle de les quintes.

Així doncs, part de l'ofici de compondre amb motius consisteix a saber compaginar les exigències del principi de conservació intervàlica amb les restriccions de la pròpia tonalitat o tonalitats que s'han escollit. Fins ara, però, només hem parlat de l'aspecte horitzontal o melòdic de la tècnica motívica en l'exemple que examinem. Hi ha una segona lectura: la lectura vertical o harmònica, que consisteix a analitzar els acords que es formen per la simultaneïtat dels sons. Aquesta és una peça de textura polifònica a dues veus i de tipus imitatiu, és a dir, a la manera d'un cànon o d'una fuga. Això vol dir que el gruix harmònic s'obté mitjançant la superposició de les línies melòdiques de les dues veus. Fàcilment es pot comprovar que la majoria de les notes incidents presenten entre si unes relacions intervàliques ben definides. Es diu en aquest cas que l'harmonia pertany al sistema dels acords tríades, un sistema molt emprat en les èpoques barroca i clàssica (vegeu el quadre 5).

La confecció de l'estructura vertical de l'obra ofereix una dificultat afegida al compositor, que ha de procurar dissenyar els dibuixos melòdics de les veus de manera que en els blocs sonors resultants hi predominin acords consonants, és a dir, acords del sistema dels tríades, naturalment, en la tonalitat que hi pertoqui. El tractament motívic de la melodia influeix, per tant, en el resultat harmònic. En aquest sentit cal remarcar el bon comportament harmònic de les dues eines per excel·lència de transformació de la línia melòdica, com ja s'ha vist que ho són les transposicions i les inversions.

En efecte, les transposicions conserven els intervals ordenats (o relatius) i, per tant, conserven el mode de la tonalitat i el sistema d'acords tríades, transformant els acords majors en majors i els menors en menors. Deixo com un exercici senzill per al lector comprovar que les inversions intercanvien els modes i els sistemes d'acords, tot essent les inversions d'acords majors, acords menors, i viceversa.

2 Exemple segon

La primera de les *Tres peces per a piano op. 11* d'A. Schönberg és, com en l'exemple anterior, una composició de tractament motívic. El model d'espai sonor en el qual està escrita, però, no és el de l'espai de les notes sinó el de les classes de notes. Aquest model s'obté per identificació de les notes mòdul octaves: preses dues notes x, y, diem que són de la mateixa classe si la seva diferència $x - y$ és múltiple de 12. L'espai quocient respecte de l'anterior relació d'equivalència és justament l'espai de les classes de restes mòdul 12, el qual, respecte de la suma, és isomorf al grup cíclic de dotze elements C_{12}.

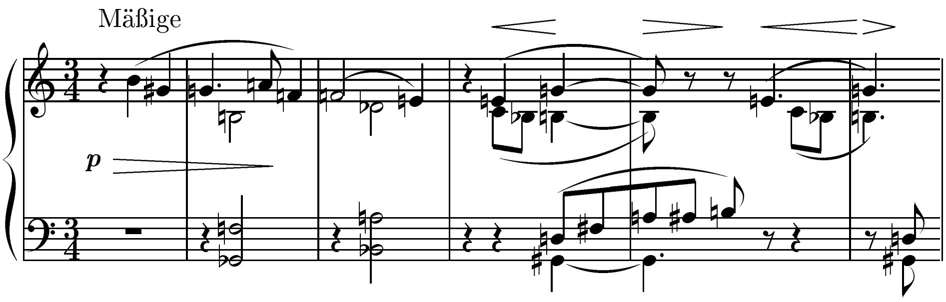

FIGURA 4: A. Schönberg. *Tres peces per a piano op. 11.*

A l'espai de les classes de notes (*cnotes*, per abreujar) té sentit, també, definir-hi el concepte d'interval per a tota parella de cnotes $x, y \in \{0, 1, \ldots\}$:

$$\textit{Interval ordenat o relatiu:}\quad \mathrm{i}\langle x, y\rangle = y - x \pmod{12}$$

$$\textit{Interval no ordenat o absolut:}\quad \mathrm{i}(x, y) = \min(\mathrm{i}\langle x, y\rangle, \mathrm{i}\langle y, x\rangle).$$

Tornem a la peça de l'exemple. Els quadres 4 i 6 n'il·lustren, respectivament, els primers compassos i la seva transcripció en la xarxa de cnotes corresponent. No només el model d'espai sonor sinó també alguns principis organitzatius són diferents dels de l'exemple primer:

- El motiu ja no és una unitat ritmicomelòdica, sinó que es defineix com el conjunt de tres cnotes {11, 8, 7}, que corresponen als tres primers sons que s'escolten.
- El motiu i els seus transformats ja no estan subjectes a cap tonalitat ni sistema d'acords imposats des de fora.
- El motiu i els seus transformats creen els suports melòdic i harmònic de l'obra en tant que cadascun d'ells pot actuar indistintament com a línia, acord o combinació línia-acord. A través del motiu s'unifiquen, doncs, les lectures horitzontal i vertical de l'obra musical. Aquest s'anomena *principi d'unificació de l'espai musical*.
- Els transformats del motiu s'obtenen, fonamentalment, de dues operacions: les transposicions T_n i les inversions I_m, que es defineixen a l'espai de les cnotes, de la manera següent:

$$T_n(x) = x + n \pmod{12},$$

$$I_m(x) = m - x \pmod{12},$$

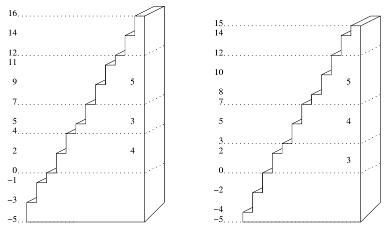

FIGURA 5: Mode major i mode menor. Acords tríades.

on $x, n, m \in \{0, \ldots, 11\}$. Així, per exemple, totes les transposicions del motiu {11, 8, 7} són:

$$\{11, 8, 7\}, \{0, 9, 8\}, \{1, 10, 9\}, \{2, 11, 10\}, \{3, 0, 11\}, \{4, 1, 0\},$$

$$\{5, 2, 1\}, \{6, 3, 2\}, \{7, 4, 3\}, \{8, 5, 4\}, \{9, 6, 5\}, \{10, 7, 6\}$$

Totes les inversions de {11, 8, 7} són:

$$\{1, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 7, 8\}, \{5, 8, 9\}, \{6, 9, 10\},$$

$$\{7, 10, 11\}, \{8, 11, 0\}, \{9, 0, 1\}, \{10, 1, 2\}, \{11, 2, 3\}, \{0, 3, 4\}$$

11	8	7	9	5	5	4	4		7					4		7	
		11			1		0	10	11					0	10	11	
		5			9				2	6	9	10	11				2
		6			10				8								8

FIGURA 6: A. Schönberg. *Tres peces per a piano, op. 11.*

La presència de les transposicions i les inversions del motiu inicial i el paper substancial en la formació de l'entramat motívic queden ben palesos a les il·lustracions 7 i 8, en les quals es reflecteix, també clarament, el principi d'unificació de l'espai musical.

L'evolució del llenguatge de Schönberg arriba, anys més tard, a la creació de la sèrie (motiu amb les dotze cnotes). A partir dels anys cinquanta, els compositors serialistes utilitzen dues operacions més per a la transformació

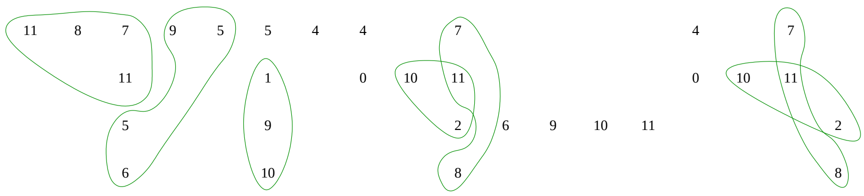

FIGURA 7: L'entramat motívic. Transposicions del motiu.

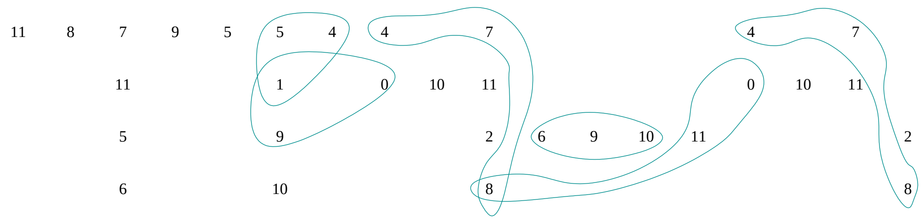

FIGURA 8: L'entramat motívic. Inversions del motiu.

del motiu. Són les anomenades *operacions multiplicatives* M_5, M_7:

$$M_5(x) = 5x \pmod{12},$$

$$M_7(x) = 7x \pmod{12}.$$

Aquestes noves operacions —a diferència de T_n, I_m— no conserven intervals. Tot i així ens permeten operar-hi directament. En efecte, qualsevol element $M_* \in \{T_0, I_0, M_5, M_7\}$ satisfà la propietat següent:

$$M_*(i\langle x, y\rangle) = i\langle M_*(x), M_*(y)\rangle .$$

De fet, T_0, I_0, M_5 i M_7 són tots els possibles automorfismes del grup cíclic C_{12}. Finalment, el grup generat per les quatre operacions anteriors i les transposicions consta de 48 elements i s'anomena el *grup dels TTO*.[1]

3 Teoria d'acords

Els dos exemples anteriors volen oferir una primera aproximació al treball organitzatiu del compositor pel que fa al material sonor, despullat del paràmetre tímbric i sense tenir en compte l'estructura rítmica de l'obra. En cada exemple el compositor utilitza un model matemàtic de l'espai sonor, que suposa diferents graus d'abstracció, però que sempre es fonamenta en l'orella: Tant en la

1 TTO és la sigla de *twelve tone operators*.

identificació dels sons per les seves freqüències com en la identificació de les freqüències mòdul octaves. Es pot dir, igualment, que cada model és adequat per a treballar certs aspectes de l'expressió musical. Així, per exemple, si el model de les notes és bo per al treball de les línies melòdiques, el model de les classes de notes és més aconsellable, en molts casos, per a simplificar el procés d'organització de les relacions intervàliques.

En aquesta segona part vull parlar sobre l'organització de l'estructura harmònica en la composició, i donar algunes estratègies matemàtiques que formen part de la meva contribució personal en aquest camp.

L'adveniment de la música anomenada *atonal*, aquella música no subjecta als filtres de la tonalitat clàssica ni dels sistemes d'acords tríades, ha significat per al compositor un veritable repte pel que fa a la recerca de nous principis d'organització del suport melòdic i harmònic, entre altres aspectes. En aquest sentit, ja a principis del segle XX, músics com Debussy o Bussoni fan importants aportacions a la *teoria d'escales*, teoria també impulsada per la música jazzística i, més tard, continuada per Messiaen i per Xenakis, el qual n'ha donat la darrera versió formal. D'altra banda, la que jo anomeno *teoria d'acords* ha format part, fins ara, del corpus general de la teoria atonal, referència bàsica dels músics serialistes. La Teoria Atonal s'ha anat forjant, a partir de les obres pioneres de Schönberg, Webern i Berg, gràcies al treball de teòrics com Babbitt, Forte, Perle, Rahn, Lewin i Morris, per citar els que considero més rellevants. De fet, i a causa del principi d'unificació de Schönberg, la paraula *acord* ha desaparegut del lèxic de la música atonal, en la qual es parla de *conjunts* i de *classes de conjunts*. Així doncs, la teoria d'acords s'hauria d'anomenar pròpiament *teoria de conjunts*. En aquesta exposició, però, he volgut mantenir el terme *acord* per tres raons: en primer lloc, per no confondre excessivament el lector no iniciat, especialment aquell lector de procedència matemàtica. En segon lloc, per desvincular la teoria del que és el propi mètode de composició serial i, finalment, per una qüestió de matís pel que fa a la definició d'*acord* i que tot seguit explico.

Part fonamental en l'entrenament de l'oïda musical consisteix en el reconeixement d'intervals i d'acords. Una oïda suficientment exercitada ha de poder distingir sense esforç, per exemple, un acord major d'un de menor, independentment de les tessitures dels sons que els integrin. En altres paraules, la identificació d'acords es realitza mòdul octaves —en l'espai de les classes de notes— i mòdul transposicions, ja que només compta la relació intervàlica de les cnotes que formen l'acord. Així doncs, té sentit la definició següent:

1 Definició *Un acord de k cnotes és una classe d'equivalència de conjunts de k cnotes respecte de les transposicions mòdul 12.* [2]

2 La definició més usual d'acord (*set class*) en els tractats de música atonal es refereix a una classe d'equivalència respecte de les transposicions i de les inversions conjuntament. Aquesta definició posa al mateix sac, per exemple, els acords majors i menors.

k	nom	nombre
1	monocord	1
2	dicord	6
3	tricord	19
4	tetracord	43
5	pentacord	66
6	hexacord	80
7	heptacord	66
8	octacord	43
9	nonacord	19
10	decacord	6
11	endecacord	1
12	dodecacord	1

TAULA 2: Acords.

Exemples d'acords de 3 cnotes, o tricords, són les classes:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \; & \{\{0,4,7\},\{1,5,8\},\{2,6,9\},\{3,7,10\},\{4,8,11\},\{5,9,0\},\\ & \{6,10,1\},\{7,11,2\},\{8,0,3\},\{9,1,4\},\{10,2,5\},\{11,3,6\}\}\,,\end{aligned}$$

que correspon a l'acord major de la teoria clàssica, i

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' = \; & \{\{0,1,4\},\{1,2,5\},\{2,3,6\},\{3,4,7\},\{4,5,8\},\{5,6,9\},\\ & \{6,7,10\},\{7,8,11\},\{8,9,0\},\{9,10,1\},\{10,11,2\},\{11,0,3\}\}\,,\end{aligned}$$

que és un dels acords que apareix a l'exemple segon.

La taula 2 conté el nombre total d'acords que es poden formar. Tant per al còmput del nombre d'acords com, en general, per a simplificar-ne la manipulació, es disposa d'una bona notació: *la notació intervàlica* de l'acord.

La notació intervàlica es basa en un fet combinatori prou curiós: hi ha una correspondència bijectiva entre els acords de k cnotes i els elements del conjunt quocient següent:

$$\{(a_1,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 + \dots a_k = 12\}/\text{rotacions cícliques.}$$

Per rotacions cícliques de la llista $(a_1,\dots,a_k)$ s'entenen les llistes:

$$(a_k,a_1,\dots,a_{k-1}),\ (a_{k-1},a_k,a_1,\dots a_{k-2}),\ \dots,\ (a_2,a_3,\dots,a_1).$$

Aquesta correspondència s'obté assignant a cada conjunt de notes —ordenat en ordre creixent— de la classe que defineix l'acord, els seus successius intervals relatius.

A la taula 3 es fa explícita l'assignació dels triplets intervàlics per a cada conjunt dels acords $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$. Una vegada determinats els triplets intervàlics, seguint l'exemple de la taula, només cal escollir un representant. El criteri d'elecció usual és l'anomenat *de màxima compressió a l'esquerra*. Això vol dir

$\{x,y,z\}$	$(y-x,z-y,x-z)$
$\{0,4,7\}$, $\{1,5,8\}$, $\{2,6,9\}$, $\{3,7,10\}$, $\{4,8,11\}$	$(4,3,5)$
$\{0,5,9\}$, $\{1,6,10\}$, $\{2,7,11\}$	$(5,4,3)$
$\{0,3,8\}$, $\{1,4,9\}$, $\{2,5,10\}$, $\{3,6,11\}$	$(3,5,4)$
$\{0,1,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,4,7\}$, $\{4,5,8\}$, $\{5,6,9\}$, $\{6,7,10\}$, $\{7,8,11\}$	$(1,3,8)$
$\{0,8,9\}$, $\{1,9,10\}$, $\{2,10,11\}$	$(8,1,3)$
$\{0,3,11\}$	$(3,8,1)$

TAULA 3: Exemple de triplets intervàlics.

que escollim els triplets amb interval més gran a la dreta: $(4,3,5)$ per a $\mathcal{M}$ i $(1,3,8)$ per a $\mathcal{M}'$. Finalment es pren $[4,3]$ i $[1,3]$ com la notació intervàlica dels acords $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$, respectivament.

A l'exemple segon he parlat del grup dels TTO —el grup generat per les transposicions, les inversions i els operadors multiplicatius— tot remarcant les seves bones propietats respecte de les relacions intervàliques. Seguidament veurem que tenen també un bon comportament harmònic, en el sentit que tots els TTO aplicats a un acord donen un altre acord. En efecte, només cal comprovar les identitats següents gairebé immediates:

$$I_0 T_n = T_{12-n} I_0 \,,$$

$$M_5 T_n = T_{5n} M_5 \,.$$

De fet, es pot demostrar que el grup dels TTO és justament el normalitzador del grup de les transposicions, $\langle T_1 \rangle$, dins del grup simètric de 12 elements, S_{12}.

Tornant a l'exemple anterior, es pot calcular fàcilment la inversió I_0 i les multiplicacions M_5 i M_7 de l'acord major $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} I_0([4,3]) &= [3,4]\,, \\ M_5([4,3]) &= [3,1]\,, \\ M_7([4,3]) &= I_0(M_5([4,3])) = I_0([3,1]) = [1,3]\,. \end{aligned}$$

Oberveu que $[3,4]$ és la notació intervàlica de l'acord menor.

Les anteriors consideracions condueixen, de manera natural, al plantejament de dues qüestions fonamentals en la teoria d'acords:

- Hi ha d'altres permutacions de les 12 cnotes —a part dels TTO— que transformin un acord en un altre acord?
- Quines d'aquestes permutacions deixen invariant l'acord?

Aleshores definim els dos objectes matemàtics següents:

2 Definició [3] *Donat un acord $\mathcal{A}$, anomenarem:*

$$\mathrm{ISO}(\mathcal{A}) = \{f \in S_{12} \mid f(\mathcal{A}) \text{ és un acord}\}\,.$$

En general, per a un conjunt o sistema d'acords $\Sigma = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\sigma\}$ anomenarem:

$$\mathrm{ISO}(\Sigma) = \bigcap_{i=1}^{\sigma} \mathrm{ISO}(\mathcal{A}_i) \qquad \text{i} \quad \mathrm{SYM}(\Sigma) = \{f \in \mathrm{ISO}(\Sigma) \mid f(\Sigma) = \Sigma\}\,.$$

Ara ens fixarem especialment en el grup SYM(Σ). És obvi que conté sempre el subgrup de les transposicions. Si considerem, per exemple, el sistema $\{[4,3], [3,4]\}$, és a dir, el sistema d'acords format per l'acord major i l'acord menor, és també clar que del fet que $I_0([4,3]) = [3,4]$ es té:

$$\langle T_1, I_0\rangle \subseteq \mathrm{SYM}(\{[4,3],[3,4]\})\,.$$

El mateix és cert per al sistema $\{[1,3],[3,1]\}$.

En el pla estrictament matemàtic, l'estudi dels objectes ISO(Σ), SYM(Σ), per a un sistema d'acords Σ arbitrari, és un problema interessant i difícil. Gran part de la dificultat és deguda al fet que, en general, un sistema d'acords posseeix una estructura combinatòria senzilla.

Entre les estructures d'incidència més simples, s'hi troben els anomenats *1-dissenys* o *configuracions tàctiques*. Un 1-disseny és una parella (X, B) on X és un conjunt de punts i B una família de subconjunts de X, anomenats *blocs*, de manera que cada bloc conté el mateix nombre de punts de X i cada punt està contingut al mateix nombre de blocs.

És immediat veure que tot acord $\mathcal{A}$ (i, per tant, tot sistema d'acords de la mateixa cardinalitat) és un 1-disseny, ja que cada translació $T_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, dóna una bijecció entre els conjunts (blocs) que contenen zero i els que contenen i, per a tot $i \in \{0, 1, \ldots, 11\}$.

D'altra banda, el càlcul eficient d'ISO(Σ) i SYM(Σ), en cada cas particular, es pot realitzar satisfactòriament amb l'ajut de l'ordinador, gràcies a l'existència de programes de tractament de dissenys tals com MAGMA o com GAP.

Així, en l'exemple anterior s'obté:

$$\mathrm{SYM}([4,3]) = \mathrm{SYM}([3,4]) = \langle T_1\rangle \qquad \text{i} \quad \mathrm{SYM}(\{[4,3],[3,4]\}) = \langle T_1, I_0\rangle\,.$$

Els mateixos resultats s'obtenen per a $[1,3]$, $[3,1]$ i $\{[1,3],[3,1]\}$. Aquesta coincidència és, de fet, una conseqüència de la relació

$$\{[1,3],[3,1]\} = M_5(\{[4,3],[3,4]\})\,.$$

En el pla musical, el coneixement del grup SYM(Σ) permet al compositor disposar de tots els operadors que segueixen un principi de conservació harmònica, en el sentit que deixen invariant el sistema d'acords Σ prefixat.

3 La nomenclatura ISO, SYM, prové dels conceptes d'isomorfisme i de grup de simetria, respectivament.

A	#SYM(A)	A	#SYM(A)
$[4,3]$	12	$[2,4]$	1152
$[2,5]$	24	$[1,2,1,2,3]$	1536
$[1,2,1,3,1]$	36	$[3]$	3072
$[3,1,3]$	48	$[2,4,2]$	4608
$[1,2,3]$	72	$[1,3,4]$	5184
$[2,2,2,1,1]$	96	$[2,2,4]$	10368
$[1,2,2,1]$	144	$[4,4]$	31104
$[2,3,1]$	192	$[1,2,3,3]$	41472
$[2,1,1,3]$	240	$[6]$	46080
$[2,2]$	288	$[3,3]$	82944
$[1,5]$	384	$[2,2,2,2]$	1036800
$[1,5,1]$	768	$[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$	12!

TAULA 4: Ordres de SYM(A).

Si bé, com s'ha vist a l'exemple, les transposicions i les inversions són els únics que satisfan el principi de conservació harmònica respecte del sistema format pels acords major i menor, en general, nous operadors —noves permutacions— apareixen per a diferents sistemes d'acords, i segueixen una casuística llarga i misteriosa. A la taula 4 es faciliten, per exemple, tots els ordres possibles del grup SYM($\mathcal{A}$), on $\mathcal{A}$ és un acord.

Mitjançant la composició assistida per ordinador aquests nous operadors són a l'abast del compositor per a ser utilitzats, tal com ho han estat tradicionalment els seus predecessors, els TTO. Un dels objectius a assolir és el d'integrar en el programari musical ja existent paquets matemàtics que manipulin grups i estructures combinatòries de manera prou assequible a un públic no especialitzat.

Referències

[1] BETH, TH.; JUNGNICKEL D.; LENZ, H. *Design Theory. B. I.* Wissenschaftsverlag, 1985.

[2] BORETZ, B.; CONE E. T. [ed.] *Perspectives on Contemporary Music Theory.* W. W. Norton, 1972.

[3] DEMBOWSKI, P. *Finite Geometries.* Reimpressió de l'edició de 1968, Springer, 1997.

[4] FORTE, A. *The Structure of Atonal Music.* Yale University Press, 1973.

[5] FRISCH, W. [ed.] *Schoenberg and his World.* Princeton University Press, 1999.

[6] LEWIN, D. *Generalized Musical Intervals and Transformations.* Yale University Press, 1987.

[7] MORRIS, R. *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*. Yale University Press, 1987.

[8] PERLE, G. *Twelve-Tone Tonality*. Berkeley: University of California Press, 1977.

[9] RAHN, J. *Basic Atonal Theory*. Schirmer Books, 1980.

[10] XENAKIS, I. *Formalized Music: Thought and Mathematics in Music*. Pendragon, Revised Ed. 1992.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
comalada@mat.uab.es