

Singularitats de funcions analítiques, integrals singulars i conjunts fractals*

XAVIER TOLSA

1 Introducció

En aquesta conferència parlarem de diversos resultats recents sobre la caracterització geomètrica de les singularitats de les funcions analítiques acotades. En l'obtenció d'aquests resultats hi intervé l'anàlisi complexa, l'anàlisi harmònica i la teoria geomètrica de la mesura.

Recordem que, donat un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$, una funció $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ és analítica en Ω si el límit $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ existeix per a tot z de Ω . És a dir, si f és derivable en sentit complex en Ω .

Un teorema clàssic de Riemann afirma que si f és analítica i acotada en un entorn d'un punt z_0 , aleshores f es pot estendre analíticament al punt z_0 . Observem que això és completament diferent del que passa en el cas real. Per exemple, sigui f la funció idènticament nul·la en $(-\infty, 0)$ i que val 1 en $[0, +\infty)$. Clarament, f és derivable fora de l'origen, però no es pot estendre de manera que també sigui derivable (ni tan sols contínua) a l'origen.

Durant tota la xerrada denotem per E un conjunt compacte del pla complex. Diem que E és evitable (o singularitat evitable) per a les funcions analítiques acotades si, donat un obert Ω qualsevol que contingui E , tota funció analítica i acotada en $\Omega \setminus E$ es pot estendre analíticament a tot Ω . Així, pel teorema de Riemann, un punt és una singularitat evitable per a les funcions analítiques acotades. Utilitzant la fórmula integral de Cauchy, no és gaire difícil demostrar que en la definició anterior ens podem limitar a considerar només un entorn obert Ω de E fixat. En altres paraules, obtenim una definició equivalent de singularitat evitable si prenem, per exemple, $\Omega = \mathbb{C}$.

*Conferència pronunciada a la Trobada Matemàtica de 2002. Treball finançat pel programa Ramón y Cajal i, parcialment, pels projectes DGICYT BFM2000-0361 i 2001/SGR/00431.

Vegem alguns exemples. Es pot demostrar (mitjançant el teorema de Riemann i el teorema de categoria de Baire) que si E és un compacte donat per una unió numerable de punts, aleshores és evitable. D'altra banda, un disc tancat no és evitable. Per veure-ho, podem considerar la funció $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, on z_0 és el centre del disc. Aquesta funció és analítica i acotada fora del disc, però no es pot estendre al mateix disc de manera que es mantingui analítica i acotada (ja que, pel principi de prolongació analítica, hauria de coincidir amb $1/(z - z_0)$ en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$).

Suposem ara que E és un compacte simplement connex diferent d'un punt. En aquest cas, E també és no evitable. Això es pot comprovar fàcilment considerant la transformació conforme $f : \mathbb{C}_\infty \setminus E \rightarrow D(0, 1)$, on $\mathbb{C}_\infty$ denota l'esfera de Riemann i $D(0, 1)$ el disc unitat. Finalment, si E és un compacte connex arbitrari i diferent d'un punt, un raonament anàleg mostra que E també és no evitable.

Observem que, directament de la definició, es dedueix que si E i F són compactes, E és no evitable i $E \subset F$, aleshores F també és no evitable. Com a conseqüència d'aquest fet i del darrer exemple, tenim que els compactes evitables per a les funcions analítiques acotades són totalment disconnexos.

De la discussió anterior n'hauríem de treure la conclusió que si E és *gran* en algun sentit, aleshores és no evitable, mentre que si és *petit* llavors és evitable. L'anomenat problema de Painlevé (proposat pel matemàtic francès Painlevé a finals del segle XIX) consisteix a trobar una caracterització en termes mètrics i/o geomètrics de les singularitats evitables per a les funcions analítiques acotades.

2 La capacitat analítica

L'any 1947 Ahlfors [1] va introduir la noció de capacitat analítica. La capacitat analítica d'un compacte E és

$$\gamma(E) = \sup |f'(\infty)|,$$

on el suprem es pren sobre totes les funcions $f : \mathbb{C} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ analítiques tals que $|f| \leq 1$ en $\mathbb{C} \setminus E$, essent $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$. Notem que aquestes funcions tenen una singularitat evitable a l'inifinit, i, per tant, $f(\infty)$ està ben definit. Podeu comprovar fàcilment que $f'(\infty)$ coincideix amb el coeficient a_{-1} de la sèrie de Laurent de f centrada en el zero.

Ahlfors va demostrar que E és evitable per a les funcions analítiques acotades si i només si $\gamma(E) = 0$. Aquest resultat ens proporciona una caracterització molt útil de les singularitats evitables. Ara bé, això no és una solució del problema de Painlevé ja que aquesta caracterització no és en termes mètrics o geomètrics (tot i que la denominació «termes mètrics o geomètrics» és poc precisa), perquè a la definició de capacitat analítica apareix un suprem sobre totes les funcions analítiques complint unes certes propietats.

De fet, la definició de capacitat analítica és una mica *fosca*. Per exemple, directament a partir de la definició, és difícil deduir com es comporta respecte de la unió de conjunts. Més precisament, si E i F són dos compactes arbitraris del pla, és certa la desigualtat

$$\gamma(E \cup F) \leq \gamma(E) + \gamma(F)?$$

La resposta encara no és coneguda. Una versió una mica més dèbil d'aquesta desigualtat és la següent:

$$\gamma(E \cup F) \leq C(\gamma(E) + \gamma(F)), \quad (2.1)$$

a on $C > 0$ és una constant universal (independent de E i F). Si això és cert per a tot E i F , es diu que γ és semiaditiva.

La semiaditivitat de la capacitat analítica és una pregunta plantejada pel matemàtic rus Vitushkin a la dècada dels seixanta (vegeu [28]), que va estudiar diversos problemes d'aproximació racional uniforme en compactes del pla complex (qui sàpiga una mica d'anàlisi complexa hauria de pensar en teoremes com els de Runge o de Mergelyan), i va demostrar alguns criteris d'aproximació que s'expressen en termes de la capacitat analítica. Vitushkin va provar que una resposta afirmativa a la pregunta de la semiaditivitat permetria comprendre millor com són els compactes on és vàlida l'aproximació racional uniforme [28].

3 Relació entre les mesures de Hausdorff i la capacitat analítica

Estudiar el problema de Painlevé equival a estudiar les propietats mètriques i geomètriques de la capacitat analítica. Per parlar d'algunes d'aquestes propietats necessitem definicions addicionals.

Donat un conjunt $A \subset \mathbb{C}$ i $s > 0$, denotem

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) = \inf \sum_i \text{diam}(A_i)^s,$$

on l'ínfim es pren sobre tots els recobriments $A \subset \bigcup_i A_i$ tals que $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$. La mesura de Hausdorff s -dimensional de A , és

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A).$$

La mesura de Hausdorff 1-dimensional $\mathcal{H}^1$ també s'anomena longitud (i evidentment coincideix amb la noció intuitiva que hom té de longitud).

Per a qualsevol conjunt $A \subset \mathbb{C}$, existeix un nombre $s_0 \in [0, 2]$ tal que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ si $s < s_0$, i $\mathcal{H}^s(A) = 0$ si $s > s_0$. Aquest valor s_0 rep el nom de dimensió de Hausdorff de A , i es denota per $\dim(A)$. Per exemple, un punt té dimensió 0, una corba de longitud finita (també anomenada rectificable)

té dimensió 1, i un conjunt d'àrea positiva té dimensió 2. Notem que també existeixen conjunts de dimensió no entera. De fet, per a qualsevol $s \in [0, 2]$ es pot construir un conjunt amb dimensió de Hausdorff s . Per a més informació sobre les mesures de Hausdorff, podeu consultar [8] o [13].

La relació entre les mesures de Hausdorff i la capacitat analítica és la següent:

- Si $\dim(E) > 1$, llavors $\gamma(E) > 0$ (que equival a dir que E no és evitable).
- $\gamma(E) \leq \mathcal{H}^1(E)$. En particular, si $\dim(E) < 1$, llavors $\gamma(E) = 0$ i E és evitable.

La primera afirmació es dedueix d'un resultat clàssic en teoria del potencial, el Lema de Frostman; mentre que la segona afirmació va ser demostrada (amb un altre llenguatge) per Painlevé fa aproximadament un segle. Observem que aquestes propietats són una formulació precisa de la idea que els conjunts petits són evitables, i els grans no ho són.

A partir de les relacions entre mesures de Hausdorff i capacitat analítica, veiem que la dimensió de Hausdorff crítica és 1. El cas en què la dimensió de E és 1 és delicat, i hom està temptat de pensar que E és no evitable si i només si la seva longitud és estrictament positiva. Això és el que es conjecturava fins que Vitushkin, a principis dels anys seixanta, en va donar un contraexemple. Vitushkin va construir un compacte de longitud positiva i finita (i, per tant, amb dimensió de Hausdorff 1) que era evitable.

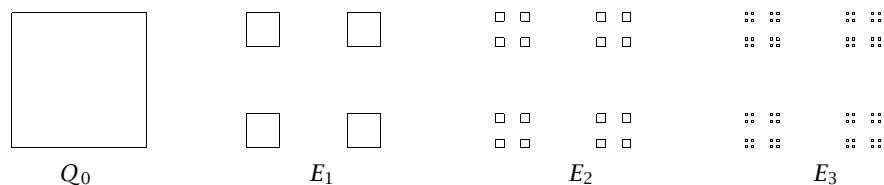


FIGURA 1: El quadrat Q^0 i els conjunts E_1 , E_2 i E_3 , que apareixen en les etapes 1, 2 i 3 de la construcció del conjunt de Cantor planar $1/4$.

Un exemple una mica posterior (però més senzill) d'un compacte E amb $0 < \mathcal{H}^1(E) < \infty$ i $\gamma(E) = 0$ és l'anomenat conjunt de Cantor planar $1/4$, que denotarem per $E_{1/4}$. Aquest conjunt es construeix de la manera següent: considerem un quadrat Q^0 (per definició, *quadrat* vol dir *quadrat tancat*) de costat igual a 1. En la primera etapa de la construcció substituïm Q^0 per 4 quadrats Q_i^1 , $i = 1, \dots, 4$, de costat $1/4$ continguts en Q^0 , de manera que cada quadrat Q_i^1 contingui un vèrtex diferent de Q^0 . Anàlogament, en la segona etapa substituïm cada quadrat Q_i^1 per 4 quadrats disjunts continguts en Q_i^1 , de manera que cadascun d'ells contingui un dels vèrtexs de Q_i^1 . Així, haurem construït 16 quadrats Q_j^2 de costat $1/16$. Procedim inductivament

(vegeu la figura 1), de manera que en cada etapa n tenim 4^n quadrats disjunts Q_i^n de costat 4^{-n} . Denotem $E_n = \bigcup_{i=1}^{4^n} Q_i^n$. El conjunt de Cantor $1/4$ és $E_{1/4} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Clarament $E_{1/4}$ és un compacte no buit (perquè és una intersecció de compactes encaixats). A més a més, per a cada $n \geq 0$ es compleix

$$\sum_{i=1}^{4^n} \ell(Q_i^n) = 1,$$

on $\ell(Q_i^n)$ denota la longitud del costat de Q_i^n . D'aquest fet es dedueix que $\mathcal{H}^1(E_{1/4}) \leq \sqrt{2}$, i amb una mica més de feina no és gaire difícil comprovar que també $\mathcal{H}^1(E_{1/4}) \geq 1$. Que $E_{1/4}$ és evitable (i. e. $\gamma(E_{1/4}) = 0$) és una mica més complicat de veure, i va ser demostrat per Garnett [9] i Ivanov (vegeu [10, p. 153]) independentment.

El conjunt de Cantor planar $1/4$ té longitud positiva i finita, igual que una corba de longitud positiva i finita. Ara bé, un té capacitat analítica nul·la i l'altre no. Quina propietat geomètrica és responsable d'aquest fet? La rectificabilitat.

Un conjunt s'anomena *rectificable* si està contingut en una unió numerable de corbes rectificables (i. e. de longitud positiva i finita). D'altra banda, si la intersecció d'un conjunt amb tota corba rectificable té longitud zero, diem que el conjunt és *purament no rectificable*. Una definició equivalent és la següent: un conjunt és purament no rectificable si no té subconjunts de longitud positiva que siguin rectificables.

A la primera meitat del segle XX, Besicovitch va demostrar que tot conjunt de longitud positiva i finita es pot posar com a unió d'un rectificable i d'un purament no rectificable, i també va provar que els conjunts rectificables i els purament no rectificables tenen propietats geomètriques molt diferents quant a l'existència de tangents, densitats, projeccions... (vegeu [13] o [8] per a més detalls).

El conjunt de Cantor planar $1/4$ és purament no rectificable (això es pot deduir del fet que les seves projeccions sobre els eixos horitzontal i vertical tenen longitud nul·la), i també els compactes construïts per Vitushkin que tenien capacitat analítica nul·la i longitud positiva i finita. Per aquesta raó, Vitushkin va formular la conjectura següent a principis de la dècada dels seixanta.

¹ CONJECTURA DE VITUSHKIN *Un compacte del pla complex amb longitud positiva i finita té capacitat analítica nul·la si i només si és purament no rectificable.*

4 La transformada de Cauchy

La fórmula integral de Cauchy és una eina fonamental en l'anàlisi complexa. Donat un obert Ω (que suposem simplement connex per simplicitat) i una corba tancada $\Gamma \subset \Omega$ (prou bona), la fórmula integral de Cauchy diu que si Γ dóna una volta al voltant de $w \in \Omega$ (i. e. l'índex de w respecte Γ és 1) i f és

analítica en Ω , llavors

$$f(w) = \int_{\Gamma} \frac{1}{z-w} f(z) \frac{dz}{2\pi i}.$$

Introduïm ara el concepte de transformada de Cauchy d'una mesura. Donada una mesura de Borel finita μ en $\mathbb{C}$, la transformada de Cauchy de μ és la funció

$$C\mu(w) = \int \frac{1}{z-w} d\mu(z).$$

Derivant sota el signe integral es comprova fàcilment que, fora del suport de μ , $C\mu$ és una funció analítica. Sobre el suport de μ pot no ser-ho, i de fet pot passar que la integral en la definició de $C\mu$ no sigui absolutament convergent. Esmentem però que $\int \frac{1}{z-w} d\mu(z)$ és absolutament convergent per a quasi tot $w \in \mathbb{C}$ (respecte a la mesura de Lebesgue) i, per tant, $C\mu(w)$ està ben definit per a quasi tot $w \in \mathbb{C}$.

Tot i que, en general, quan parlem de mesures ens referim a mesures positives, la noció de transformada de Cauchy també té sentit per a mesures complexes. Així, donada f analítica en Ω , si considerem la mesura $f(z) \frac{dz|_{\Gamma}}{2\pi i}$, podem reescriure la fórmula integral de Cauchy de la manera següent:

$$f(w) = C\left(f(z) \frac{dz|_{\Gamma}}{2\pi i}\right)(w),$$

per a Γ i w apropiats.

Recordem que el problema de Painlevé té a veure amb l'existència o no de funcions analítiques acotades. La transformada de Cauchy és una eina molt útil, entre d'altres raons perquè ens proporciona una manera fàcil de *fabricar* funcions analítiques a partir de mesures. El problema fonamental rau a conèixer quan podrem aconseguir que la transformada de Cauchy d'una mesura sigui una funció acotada.

Siguem ara una mica més precisos. Donat un compacte $E \subset \mathbb{C}$ si existeix una mesura μ no nul·la suportada en E tal que $C\mu$ és una funció acotada en $\mathbb{C} \setminus E$, aleshores E és una singularitat no evitable, ja que (denotant per $\|C\mu\|_{\infty, \mathbb{C} \setminus E}$ el suprem de $|C\mu|$ sobre $\mathbb{C} \setminus E$),

$$\gamma(E) \geq \frac{|(C\mu)'(\infty)|}{\|C\mu\|_{\infty, \mathbb{C} \setminus E}} = \frac{\mu(E)}{\|C\mu\|_{\infty, \mathbb{C} \setminus E}} > 0.$$

En la darrera igualtat, el fet que $|(C\mu)'(\infty)|$ coincideix amb la massa total $\mu(E)$ es dedueix fàcilment a partir de les definicions.

Es diu que la transformada de Cauchy està acotada en $L^2(\mu)$, o que és un operador acotat en $L^2(\mu)$, si es verifica la desigualtat

$$\int |C(f d\mu)|^2 d\mu \leq A \int |f|^2 d\mu$$

per a tota funció f , essent A una constant independent de f . Del problema de la definició de f sobre el suport de μ preferim no parlar-ne gaire. Per simplicitat, podeu pensar que $C\mu$ està definida sobre el suport de μ com a valor principal (vegeu [21]).

L'estudi de l'acotació en $L^2(\mu)$ de la transformada de Cauchy va ser un problema central en l'anàlisi harmònica durant les dècades dels 1970 i 1980. Coifman, McIntosh i Meyer [3] (generalitzant un resultat previ de Calderón [2]) van demostrar que si hom pren com a mesura μ la longitud sobre el graf d'una funció Lipschitz de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, aleshores la transformada de Cauchy és acotada sobre $L^2(\mu)$. Utilitzant un argument de dualitat, aquest resultat implica que tot subconjunt de longitud positiva d'una corba rectificable té capacitat analítica positiva. Això equival a dir que si $E \subset \mathbb{C}$ té longitud finita i capacitat analítica nul·la, aleshores E és purament no rectificable, la qual cosa demostra que una de les implicacions de la conjectura de Vitushkin és certa.

De la discussió anterior queda clar que hi ha una certa relació entre capacitat analítica, acotacions L^2 de la transformada de Cauchy i rectificabilitat. El concepte de curvatura d'una mesura, introduït l'any 1995 per Mark Melnikov [16], és fonamental per aclarir aquestes relacions. Donats tres punts $x, y, z \in \mathbb{C}$ diferents dos a dos, sigui $R(x, y, z)$ el radi de la circumferència que passi per x, y, z (amb $R(x, y, z) = \infty$ si els punts són alineats). La curvatura de la mesura μ és

$$c^2(\mu) := \iiint \frac{1}{R(x, y, z)^2} d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z).$$

Melnikov va demostrar que si μ està suportada en un compacte E i $\mu(B(x, r)) \leq r$ per a tota bola $B(x, r) \subset \mathbb{C}$ (a partir d'ara direm que μ té *creixement lineal* si verifica aquesta propietat), aleshores

$$\gamma(E) \geq C \frac{\mu(E)^2}{\mu(E) + c^2(\mu)}, \quad (4.1)$$

on $C > 0$ és una constant universal. Observeu que si E suporta una mesura amb creixement lineal i curvatura finita aleshores $\gamma(E) > 0$ i E és no evitable.

La connexió de la curvatura amb la transformada de Cauchy prové de la identitat següent, descoberta per Melnikov i Verdera [17]:

$$\int |C(\mu)|^2 d\mu = \frac{1}{6} c^2(\mu) + O(\mu), \quad (4.2)$$

per a tota mesura μ amb creixement lineal, essent $O(\mu)$ un terme *d'error* tal que $|O(\mu)| \leq 100\mu(\mathbb{C})$ (aquí, la constant 100 no és òptima). Notem que en Joan Verdera és un dels principals responsables de la idea de relacionar la curvatura de mesures amb les acotacions L^2 de la transformada de Cauchy. De la fórmula anterior i de la desigualtat (4.1) es dedueix fàcilment que si E suporta una mesura μ amb creixement lineal tal que la transformada de Cauchy està acotada en $L^2(\mu)$, llavors E és no evitable (en realitat, això ja era conegut abans de la introducció de la noció de curvatura d'una mesura).

5 Acotació L^2 de la transformada de Cauchy, curvatura i rectificabilitat

La curvatura d'una mesura conté informació geomètrica del seu suport. Per exemple, és immediat comprovar que una mesura està suportada en una recta, si i només si la seva curvatura és nul·la.

Ens plantegem la pregunta següent: quines propietats sobre el suport d'una mesura μ podem deduir a partir d'estimacions sobre la seva curvatura $c^2(\mu)$? Un pot pensar que si $c^2(\mu)$ és petita, aleshores μ *tendirà* a concentrar-se sobre rectes en algun sentit. Veurem més endavant que això és cert si μ és la mesura de longitud sobre un conjunt de longitud finita.

Un compacte $E \subset \mathbb{C}$ de longitud finita s'anomena AD regular (o Ahlfors-David regular) si existeix una constant $C > 0$ tal que

$$C^{-1}r \leq \mathcal{H}^1(B(x, r) \cap E) \leq Cr$$

per a tot $x \in E$ i $0 < r \leq \text{diam}(E)$. Remarquem que la condició d'AD regularitat apareix de forma natural en alguns problemes d'anàlisi harmònica. Per exemple, Guy David [4] va demostrar l'any 1984 que, donada una corba rectificable Γ , la transformada de Cauchy està acotada en $L^2(\mathcal{H}_{|\Gamma}^1)$ si i només si Γ és AD regular.

Mattila, Melnikov i Verdera [14] van demostrar el resultat següent l'any 1996:

5.1 TEOREMA *Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un conjunt AD regular. Aleshores, les afirmacions següents són equivalents:*

- (a) *E està contingut en una corba rectificable AD regular.*
- (b) *Existeix una constant $C > 0$ tal que $c^2(\mathcal{H}_{|E \cap B}^1) \leq C \mathcal{H}^1(E \cap B)$ per a tota bola B .*
- (c) *La transformada de Cauchy està acotada en $L^2(\mathcal{H}_{|E}^1)$.*

Notem que la implicació (a) $\Rightarrow$ (c) és una conseqüència directa del resultat de G. David [4] ja esmentat. La implicació (c) $\Rightarrow$ (b) és dedueix fàcilment de la fórmula (4.2). La demostració de (b) $\Rightarrow$ (a) utilitza uns meravellosos resultats de Peter Jones [11] que relacionen la rectificabilitat amb certes estimacions de tipus Littlewood-Paley.¹ Per breuetat, preferim no comentar amb detall aquests resultats.

Observeu que el teorema anterior relaciona una propietat purament analítica (l'acotació en $L^2(\mathcal{H}_{|E}^1)$ de la transformada de Cauchy) amb una altra purament geomètrica (el fet que E estigui contingut en una corba rectificable AD regular). La noció de curvatura és el que permet passar d'una informació de tipus analític a una altra de tipus geomètric, mitjançant (4.2).

¹ Per ser més precisos, caldria dir que en [14] es demostra (b) $\Rightarrow$ (a) a partir d'uns resultats de David i Semmes [7] inspirats en els esmentats resultats de Peter Jones [11].

Per a compactes de longitud finita no AD regulars les dificultats tècniques són molt majors, en general. Tot i això, David i Léger [12] han demostrat el resultat següent (que pot ser considerat un anàleg de la implicació (b) $\Rightarrow$ (a) del teorema 5.1 sense AD regularitat):

5.2 TEOREMA *Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un compacte de longitud finita. Si $c^2(\mathcal{H}_{|E}^1) < \infty$, aleshores E és rectificable.*

Aquest resultat només afecta conjunts de longitud finita i la curvatura de la mesura de longitud. Hi ha mesures, com per exemple la mesura de Lebesgue planar sobre un disc, tals que la seva curvatura és finita però el seu suport no està contingut en un conjunt rectificable.

A [22] (vegeu també [18] i [26]) s'ha demostrat el resultat següent:

5.3 TEOREMA *Sigui μ una mesura en $\mathbb{C}$ sense àtoms (és a dir, tal que $\mu(\{z\}) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$). Aleshores, la transformada de Cauchy està acotada en $L^2(\mu)$ si i només si existeix una constant C tal que*

$$c^2(\mu|_B) \leq C\mu(B)$$

per a tota bola $B \subset \mathbb{C}$.

Noteu que aquest resultat és una versió de l'equivalència (b) $\Leftrightarrow$ (c) del teorema 5.1 per a mesures arbitràries sense àtoms, no necessàriament AD regulars.

6 La solució de la conjectura de Vitushkin

L'any 1997 Guy David [5] va provar que la conjectura de Vitushkin és certa:

6.1 TEOREMA *Si $E \subset \mathbb{C}$ és un compacte amb longitud finita, aleshores E evitable (equivalentment $\gamma(E) = 0$) si i només si E és purament no rectificable.*

Remarquem que per a compactes AD regulars, la conjectura de Vitushkin va ser demostrada prèviament per Mattila, Melnikov i Verdera a [14].

La implicació demostrada per Guy David és

$$E \text{ purament no rectificable} \Rightarrow \gamma(E) = 0, \quad (6.1)$$

la qual cosa equival a veure que si E és no evitable ($\gamma(E) > 0$), llavors existeix $F \subset E$ de longitud finita rectificable. L'altra implicació del teorema ja era coneguda (i ha estat comentada a la secció 4).

El camí per demostrar (6.1) és el següent: sigui E no evitable amb longitud finita. Això equival a dir que existeix una funció analítica i acotada en $\mathbb{C} \setminus E$ no constant. La primera part de la demostració consisteix a provar (a partir de l'existència d'aquesta funció, que podem suposar que coincideix amb la transformada de Cauchy d'una mesura complexa suportada en F) que aleshores existeix un subconjunt $F \subset E$ de longitud positiva a on la transformada

de Cauchy és acotada respecte de la mesura de longitud. Aquest és un problema d'anàlisi harmònica força delicat que, pel qui sàpiga una mica d'anàlisi harmònica, direm que es redueix bàsicament a provar un teorema de tipus $T(b)$ sense cap condició d'AD regularitat o de doblament. Aquesta part de la demostració és la que es troba a [5] (i també a [6], en part). Una demostració més senzilla posterior és a [19].

En la segona part de la demostració de (6.1) es tracta de veure que si la transformada de Cauchy és acotada per a la mesura de longitud sobre un conjunt F de longitud finita, aleshores F és rectificable. Aquí és on intervé la curvatura: de (4.2) es dedueix que la curvatura de la mesura de longitud sobre F és finita, i aleshores pel teorema 5.2, F és rectificable.

El teorema 6.1 és un resultat molt important. Observeu, però, que es refereix únicament als conjunts de longitud finita. Encara no hem parlat de cap criteri de tipus mètric/geomètric que ens serveixi per decidir si els compactes de longitud infinita són evitables o no. D'aquesta qüestió i de la semiaditivitat de la capacitat analítica en parlarem a la secció següent.

7 Els conjunts de longitud infinita i la semiaditivitat de la capacitat analítica

Ja hem vist que per als compactes de longitud finita la rectificabilitat és el factor essencial per poder decidir si un compacte és evitable o no. Per als conjunts de longitud infinita no és així. Hi ha compactes E de longitud infinita que són no evitables i tals que la intersecció de E amb tota corba rectificable té longitud zero (equivalentment, E és purament no rectificable). Noteu que pel teorema 6.1 això implica que tot subconjunt de longitud finita de E és evitable.

Anem a construir una variant del conjunt de Cantor planar $1/4$ que tingui dimensió de Hausdorff 1 però longitud infinita. El procediment és el següent. Sigui $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ una successió de nombres reals tals que $0 < \lambda_n < 1/2$, amb $\lambda_n \rightarrow 1/4$ quan $n \rightarrow \infty$. Com en el cas del conjunt de Cantor $E_{1/4}$, partim del quadrat unitat Q^0 , i per a cada $n \geq 1$ tenim 4^n quadrats Q_i^n . Cada quadrat Q_j^{n-1} (de generació $n-1$) conté 4 dels quadrats Q_i^n , que estan col·locats com mostra la figura 1 (de manera que cada quadrat Q_i^n conté un dels vèrtex de Q_j^{n-1}). Ara, la raó entre la longitud del costat dels quadrats de generació $n+1$ i la dels de generació n és λ_n . Denotem $E_n = \bigcup_{i=1}^{4^n} Q_i^n$ i considerem el conjunt de Cantor $E(\lambda) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Observeu que per a cada n tenim 4^n quadrats de costat $\ell_n := \lambda_1 \dots \lambda_n$. Si escollim, per exemple, els nombres λ_n de manera que per a cada n tinguem $\ell_n = n/4^n$, aleshores es complirà que $\dim(E(\lambda)) = 1$ i $\mathcal{H}^1(E(\lambda)) = \infty$. El fet que $\dim(E(\lambda)) = 1$ és bàsicament degut que $\lambda_n = \ell_{n+1}/\ell_n \rightarrow 1/4$. No entrarem en més detalls. D'altra banda, $E(\lambda)$ té longitud infinita perquè per a

cada generació n tenim

$$\sum_{i=1}^{4^n} \ell(Q_i^n) = 4^n \frac{n}{4^n} = n \rightarrow \infty.$$

Com en el cas de $E_{1/4}$, es compleix que $E(\lambda)$ interseca tota corba rectificable en un conjunt de longitud nul·la com a molt (a causa que les projeccions de $E(\lambda)$ sobre els eixos de coordenades són nul·les). Utilitzant els resultats que hem vist fins ara no podem decidir si $E(\lambda)$ és evitable o no.

Si en lloc de prendre una successió $\{\lambda_n\}_n$ amb límit $1/4$ prenem per exemple $\lambda_n = 1/3$ per a tot n , aleshores obtenim un conjunt de Cantor de dimensió major que² 1. En aquest cas, a diferència de l'exemple anterior, sí que podem decidir sobre l'evitabilitat del compacte obtingut: no és evitable ja que la seva dimensió de Hausdorff és major que 1.

El problema de decidir per a quines successions $\{\lambda_n\}_n$ els conjunts de Cantor $E(\lambda)$ són evitables o no va ser plantejat per Garnett l'any 1972. A [15] s'ha donat la resposta següent a aquest problema:

7.1 TEOREMA $E(\lambda)$ és evitable si i només si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4^n \ell_n)^2} = \infty$. A més, es compleix que

$$\gamma(E(\lambda)) \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4^n \ell_n)^2} \right)^{-1/2}.$$

La notació $A \approx B$ significa que existeix una constant universal $C > 0$ tal que $C^{-1}A \leq B \leq CA$.

Noteu que, en particular, es dedueix que en l'exemple anterior en què teníem $\ell_n = n/4^n$ el conjunt $E(\lambda)$ és no evitable.

Igual que en el teorema 6.1, un dels ingredients bàsics per a la demostració d'aquest resultat és un teorema de tipus $T(b)$. Una idea nova que apareix en la demostració i que també és útil per a l'estudi de la capacitat analítica de compactes arbitraris és una mena d'inducció *en escales*, sobre les generacions E_n en el Cantor $E(\lambda)$.

Per a compactes arbitraris a [23] s'ha demostrat el resultat següent:

7.2 TEOREMA *Sigui $E \subset \mathbb{C}$ compacte. Aleshores,*

$$\gamma(E) \approx \sup \mu(E),$$

on el suprem es pren sobre totes les μ suportades en E , amb creixement lineal tal que $c^2(\mu) \leq \mu(E)$.

Recordeu que diem que μ té creixement lineal si $\mu(B(x, r)) \leq r$ per a tota bola $B(x, r) \subset \mathbb{C}$. Una conseqüència immediata d'aquest teorema és el resultat següent (conjecturat prèviament per Melnikov el 1995):

² La dimensió és $\log 4 / \log 3$ ja que $\sum_{i=1}^{4^n} \ell(Q_i^n)^{\log 4 / \log 3} = \frac{4^n}{3^{n \log 4 / \log 3}} = 1$ per a tot n .

7.3 COROLLARI *Sigui $E \subset \mathbb{C}$ compacte. E és no evitable si i només si existeix una mesura no nul·la suportada en E amb creixement lineal i curvatura finita.*

En el teorema 7.2, la desigualtat $\gamma(E) \geq C^{-1} \sup \mu(E)$ (a on $C > 0$ és una constant universal) és una conseqüència immediata de la desigualtat (4.1). Per demostrar l'altra desigualtat del teorema (i. e. que $\gamma(E) \leq C \sup \mu(E)$) cal provar l'existència d'una mesura μ suportada en E amb creixement lineal, amb $c^2(\mu) \leq \mu(E)$ i tal que $\mu(E) \approx \gamma(E)$. La part complicada de tot això és el control de la curvatura $c^2(\mu)$. No és gaire difícil comprovar, utilitzant (4.2), que si aconseguim construir μ suportada en E amb creixement lineal, amb $\mu(E) \approx \gamma(E)$, i tal que la transformada de Cauchy sigui acotada en $L^2(\mu)$ (amb constants universals), haurem resolt el problema.

Recordeu que per demostrar la conjectura de Vitushkin (teorema 6.1) calia fer una cosa anàloga. S'havia de trobar $F \subset E$ tal que la transformada de Cauchy fos acotada en L^2 respecte a la mesura $\mu := \mathcal{H}_{|F}^1$ (suposant $\gamma(E) > 0$). La demostració del teorema 7.2 té algunes complicacions addicionals. Per exemple, no es pot prendre μ igual a la longitud sobre cap subconjunt F de longitud finita (ja que pot ocórrer que $\gamma(F) = 0$ per tot $F \subset E$ amb $\mathcal{H}^1(F) < \infty$).

Observeu que el corollari 7.3 proporciona una caracterització dels conjunts no evitables en termes de la curvatura de mesures, i que la noció de curvatura té un caràcter marcadament geomètric. Tanmateix, aquest resultat té l'inconvenient que parla de l'existència d'una certa mesura, però no de com construir o com poder decidir si existeix aquesta mesura. Remarquem, però, que en el cas que E és connex, P. Jones (vegeu [20, capítol 3]) ha mostrat un mètode constructiu per a obtenir l'esmentada mesura μ amb curvatura finita.

Abans de la demostració del teorema 7.2 no se sabia si la classe dels conjunts evitables era invariant per bijeccions afins del pla complex. Així per exemple, donada l'aplicació $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per $\varphi(x, y) = (x, 2y)$ (amb $x, y \in \mathbb{R}$) hom ignorava si era certa l'equivalència següent:

$$E \text{ evitable} \iff \varphi(E) \text{ evitable.} \quad (7.1)$$

Ara, es pot comprovar fàcilment que aquest resultat és una conseqüència immediata del corollari 7.3. De fet, recentment s'ha demostrat a [25] que si φ és un difeomorfisme en $\mathbb{C}$ de classe C^1 (en realitat, és suficient que sigui bilipschitz), aleshores (7.1) és cert.

El teorema 7.2 té una altra conseqüència important: resol el problema de la semiadditivitat plantejat per Vitushkin.

7.4 COROLLARI *La capacitat analítica és semiadditiva. És a dir, existeix una constant universal C tal que per a qualssevol compactes $E, F \subset \mathbb{C}$,*

$$\gamma(E \cup F) \leq C(\gamma(E) + \gamma(F)).$$

Ja hem comentat anteriorment que aquest resultat té aplicacions a certs problemes d'aproximació racional uniforme sobre compactes del pla complex. A [24] es mostra una d'aquestes aplicacions (en concret, a la resolució de l'anomenada «conjectura de la frontera interior»).

Per acabar, explicarem com es dedueix aquest darrer corollari a partir del teorema 7.2. Sigui μ una mesura amb creixement lineal, suportada en $E \cup F$, tal que $\gamma(E \cup F) \approx \mu(E \cup F)$, i amb $c^2(\mu) \leq \mu(E \cup F)$. Sigui $A \subset E \cup F$ el conjunt dels punts $x \in E \cup F$ tals que

$$\iint \frac{1}{R(x, y, z)^2} d\mu(y) d\mu(z) > 2.$$

Per la desigualtat de Txebitxef, tenim que $\mu(A) \leq \mu(E \cup F)/2$. Considerem la mesura $\sigma := \mu|_{(E \cup F) \setminus A}$. Es compleix que $\sigma(E \cup F) \geq \mu(E \cup F)/2$ i, per a tot $x \in E \cup F \setminus A$,

$$\iint \frac{1}{R(x, y, z)^2} d\sigma(y) d\sigma(z) \leq \iint \frac{1}{R(x, y, z)^2} d\mu(y) d\mu(z) \leq 2. \quad (7.2)$$

A més a més, σ té creixement lineal (perquè és més petita que μ), i integrant (7.2) respecte a σ en E i en F respectivament, es dedueix que $c^2(\sigma|_E) \leq 2\sigma(E)$ i $c^2(\sigma|_F) \leq 2\sigma(F)$. Aleshores, aplicant novament el teorema 7.2 (als compactes E i F i a les mesures $2^{-1/3}\sigma|_E$ i $2^{-1/3}\sigma|_F$), resulta

$$\gamma(E) \geq C^{-1}\sigma(E) \quad \text{i} \quad \gamma(F) \geq C^{-1}\sigma(F).$$

Per tant,

$$\gamma(E \cup F) \approx \mu(E \cup F) \leq 2\sigma(E \cup F) = 2[\sigma(E) + \sigma(F)] \leq 2C[\gamma(E) + \gamma(F)].$$

A tot aquell que estigui interessat a conèixer més detalls de la relació entre la capacitat analítica, l'acotació L^2 de la transformada de Cauchy i la rectificabilitat, li recomanem la lectura de l'excel·lent article divulgatiu [27] d'en Joan Verdera.

Agraïments

Vull agrair a en Joan Mateu i a en Joan Orobitg algunes correccions de versions preliminars d'aquest article.

Referències

- [1] AHLFORS, L. «Bounded analytic functions». *Duke Math. J.*, 14 (1947), 1-11.
- [2] CALDERÓN, A. P. «Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators». *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 74 (1977), 1324-1327.
- [3] COIFMAN, R. R.; MCINTOSH, A.; MEYER, Y. «L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes». *Ann. of Math.*, (2) 116 (1982), 361-387.

- [4] DAVID, G. «Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe». *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4) 17 (1984), 157–189.
- [5] DAVID, G. «Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity». *Revista Mat. Iberoamericana*, 14 (2) (1998), 369–479.
- [6] DAVID, G.; MATTILA, P. «Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane». *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16 (1) (2000), 137–215.
- [7] DAVID, G.; SEMMES, S. *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*. Mathematical Surveys and Monographs, 38. Providence, RI: American Mathematical Society, 1993.
- [8] FALCONER, K. *The geometry of fractal sets*. Cambridge Univ. Press, 1985.
- [9] GARNETT, J. B. «Positive length but zero analytic capacity». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 696–699.
- [10] IVANOV, L. D. «On sets of analytic capacity zero». A: *Linear and Complex Analysis Problem Book 3* (part II), Lectures Notes in Mathematics 1574. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 150–153.
- [11] JONES, P. W. «Rectifiable sets and the travelling salesman problem». *Invent. Math.*, 102 (1990), 1–15.
- [12] LÉGER, J. C. «Menger curvature and rectifiability». *Ann. of Math.*, 149 (1999), 831–869.
- [13] MATTILA, P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*. Cambridge Stud. Adv. Math. 44. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [14] MATTILA, P.; MELNIKOV, M. S.; VERDERA, J. «The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability». *Ann. of Math.*, (2) 144 (1996), 127–136.
- [15] MATEU, J.; TOLSA, X.; VERDERA, J. «The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b)$ -Theorem». *J. Amer. Math. Soc.*, 16 (2003), 19–28. Preprint, (2001).
- [16] MELNIKOV, M. S. «Analytic capacity: discrete approach and curvature of a measure». *Sbornik: Mathematics* 186(6) (1995), 827–846.
- [17] MELNIKOV, M. S.; VERDERA, J. «A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs». *Internat. Math. Res. Notices*, (1995), 325–331.
- [18] NAZAROV, F.; TREIL, S.; VOLBERG, A. «Cauchy integral and Calderón-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces». *Int. Math. Res. Not.*, 15 (1997), 703–726.
- [19] NAZAROV, F.; TREIL, S.; VOLBERG, A. «How to prove Vitushkin’s conjecture by pulling ourselves up by the hair». Preprint, (2000).
- [20] PAJOT, H. *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*. Lecture Notes in Math. 1799. Springer, 2002.
- [21] TOLSA, X. «Cotlar’s inequality and existence of principal values for the Cauchy integral without the doubling condition». *J. Reine Angew. Math.*, 502 (1998), 199–235.

- [22] TOLSA, X. « L^2 -boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures». *Duke Math. J.*, 98(2) (1999), 269–304.
- [23] TOLSA, X. «Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity». Preprint, (2001). Apareixerà a *Acta Math.*
- [24] TOLSA, X. «The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture». Preprint, (2002). Apareixerà a *Amer. J. Math.*
- [25] TOLSA, X. «Bilipschitz maps, analytic capacity, and the Cauchy integral». Preprint, (2003).
- [26] VERDERA, J. «On the $T(1)$ -theorem for the Cauchy integral». *Ark. Mat.*, 38 (2000), 183–199.
- [27] VERDERA, J. «Conjunts evitables, conjunts invisibles i viatjants de comerç, o com l'anàlisi real ajuda l'anàlisi complexa». Preprint, (2003).
- [28] VITUSHKIN, A. G. «The analytic capacity of sets in problems of approximation theory». *Uspeikhi Mat. Nauk.*, 22(6) (1967), 141–199 (Rus); a *Russian Math. Surveys*, 22 (1967), 139–200.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
xtolsa@mat.uab.es