Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 1, 2003. Pàg. 19–45

Una actualització del problema $3x + 1$*

Marc Chamberland

Presentació

Davant de l'enunciat de la conjectura $3x + 1$ és fàcil que se'ns escapi el comentari de «sembla molt senzill». Però, com en tants d'altres problemes d'aquesta mena, el cert és que s'està resistint als embats de la comunitat matemàtica des de fa un grapat de dècades. Com acostuma a passar en aquests casos, aquest fet ha comportat (i comporta encara) atacs amb tècniques molt variades, que l'han convertit en un problema matemàtic «transversal». És de destacar la quantitat aclaparadora de resultats equivalents que se n'han derivat, relacionats amb problemes de nombroses àrees de la matemàtica, fins al punt de fer-nos plantejar si realment existeixen aquestes àrees.

L'article de Chamberland és un compendi actualitzat del problema que reflecteix aquesta varietat de fronts des dels quals s'ha intentat resoldre'l. S'hi pot veure que els indicis apunten cap a una certesa de la conjectura, però el problema resta encara obert.

La traducció al català és fruit de la inquietud que ha despertat el problema en molts matemàtics catalans, alguns dels quals ens vam trobar a la conferència que va donar el professor M. Chamberland mateix sobre el tema a la UPC, l'any 2002. Entre ells, Josep M. Brunat, a qui vull agrair la lectura prèvia de la traducció i les seves suggerències.

Llegiu-lo i quedareu «tocats per la *3x muntana*», si encara no n'esteu!

El traductor

---

* Traducció de Toni Guillamon i Grabolosa, Departament de Matemàtica Aplicada 1, Universitat Politècnica de Catalunya; antoni.guillamon@upc.es.

1 Introducció

Ara per ara, el problema $3x + 1$ és potser el problema matemàtic no resolt més enigmàtic: malgrat que encara hi ha relativament pocs resultats forts en la direcció de resoldre'l, pot ser explicat a un infant que ha après a dividir per 2 i multiplicar per 3. Paul Erdös la va encertar quan va dir que «la Matemàtica no està preparada per a aquests problemes».

El problema es coneix també com el problema $3n + 1$ i s'associa als noms de Collatz, Hasse, Kakutani, Ulam, Syracuse i Thwaites. Es pot anunciar de maneres molt variades. Una de les maneres és definir la *funció de Collatz* com

$$C(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{si } x \equiv 1 \pmod 2, \\ x/2, & \text{si } x \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Sigui $C^{(k)}(x) = \underbrace{C(C(\ldots}_{k} C(x)\ldots))$ la iteració de la funció C. La conjectura estableix que per a cada $m \in \mathbb{Z}^+$, hi ha una $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $C^{(k)}(m) = 1$, és a dir, qualsevol enter positiu tendirà eventualment a 1. Observeu que l'iterat d'un nombre senar m és $3m + 1$, l'iterat del qual és $(3m + 1)/2$. Aleshores, hom pot «comprimir» la dinàmica considerant l'aplicació

$$T(x) = \begin{cases} (3x + 1)/2, & \text{si } x \equiv 1 \pmod 2, \\ x/2, & \text{si } x \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

A la literatura, s'usa preferentment l'aplicació T.

En molt menor mesura, alguns autors treballen amb la funció $3x + 1$ prolongada al màxim dinàmicament, $F : \mathbb{Z}^+_{senar} \to \mathbb{Z}^+_{senar}$, definida com

$$F(x) = \frac{3x + 1}{2^{m(x)}}, \tag{1}$$

on $m(x)$ correspon al nombre de factors de 2 continguts en $3x + 1$. Tot i que treballar amb F permet cenyir-se només als enters senars positius, la variabilitat de m sembla que impedeix qualsevol anàlisi substancial.

Aquesta actualització reflecteix el punt de vista de l'autor de com cal estructurar la feina en aquest problema. Tinc un deute enorme amb Jeff Lagarias i Günther Wirsching per la tasca important que han realitzat tirant endavant aquest problema. L'article de Lagarias [45] catalogava exhaustivament els resultats previs, establia nombroses connexions i desenvolupava moltes noves línies d'atac; s'ha convertit amb tota justícia en la referència clàssica per a aquest problema. El llibre de Wirsching [87] comença amb un repàs profund, seguit per diversos capítols d'anàlisi pròpia, digna de mencionar. Lagarias [47] també ha mantingut una bibliografia anotada dels avenços en aquest problema, una altra font valuosa. La present revisió hauria estat molt més difícil d'escriure sense aquestes contribucions significatives.

D'altra banda, aquesta revisió no pretén ser exhaustiva, sinó més aviat complementària als treballs de Lagarias i Wirsching. Quan he cregut que hi havia noves aportacions rellevants en una àrea determinada, he inclòs les contribucions anteriors en favor de la completesa. L'origen del problema i algunes àrees que no han experimentat cap desenvolupament recentment, com ara la interessant tasca lligada a les equacions funcionals o als autòmates cel·lulars, no han estat mencionats. El lector pot consultar el llibre de Wirsching [87].

2 Recerques numèriques i temps d'aturada

L'estructura dels enters positius força que totes les òrbites de T acabin en una de les situacions següents:

(1) el cicle trivial $\{1, 2\}$;[1]

(2) un cicle no trivial;

(3) infinit (òrbita divergent).

El problema $3x + 1$ conjectura que es dóna l'opció (1) en tots els casos. Oliveira i Silva [61, 62] van provar que això és cert per a tots els nombres $n < 100 \times 2^{50} \approx 1,12 \times 10^{17}$. Ho van aconseguir amb dos ordinadors DEC Alpha a 133 MHz i dos a 266 MHz i usant 14,4 anys de CPU. Aquest càlcul es va acabar l'abril de 2000. Roosendaal [65] assegura haver-ho millorat fins a $n = 195 \times 2^{50} \approx 2,19 \times 10^{17}$. Els seus càlculs encara continuen, dins d'un projecte que compta amb l'ajut de molts altres ordinadors distribuïts arreu.

El rècord assolit, dins de l'objectiu de provar la no existència de cicles no trivials, és que aitals cicles han de tenir longitud 272 500 658 pel cap baix. Aquest fet es va deduir amb l'ajut de resultats numèrics com els esmentats al paràgraf anterior, juntament amb la teoria de fraccions contínues —vegeu la secció 5 per a més detalls sobre cicles.

Hi ha un algorisme natural per comprovar que els iterats de tots els nombres menors que un N determinat tendeixen a 1. Primer de tot, comproveu que tot enter positiu menor que $N - 1$ tendeix a 1; aleshores, considereu els iterats de N. Si un d'ells cau per sota de N, oli en un llum! Per aquest motiu, hom considera l'anomenat *temps d'aturada* de n, és a dir, el nombre d'iteracions necessaris per obtenir un nombre per sota de n:

$$\sigma(n) = \inf\{k : T^{(k)}(n) < n\}.$$

Un concepte relacionat és el de *temps total d'aturada*, el nombre d'iteracions necessari per arribar a 1:

$$\sigma_\infty(n) = \inf\{k : T^{(k)}(n) = 1\}.$$

També es considera l'*alçada* de n, el punt més alt dels iterats de n:

$$h(n) = \sup\{T^{(k)}(n) : k \in \mathbb{Z}^+\}.$$

1 És a dir, que $T(1) = 2$ i $T(2) = 1$. (N. del t.)

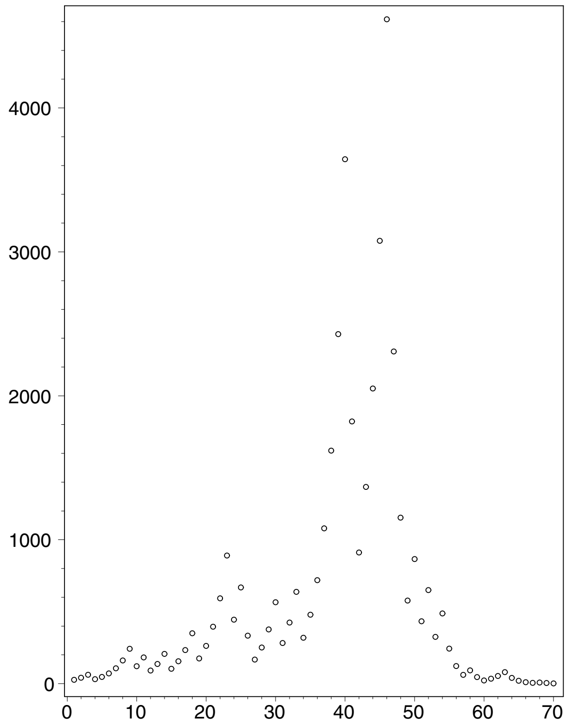


FIGURA 1: L'òrbita que comença en 27.

Fixeu-vos que si n pertany a una trajectòria divergent, llavors $\sigma_\infty(n) = h(n) = \infty$. Aquestes funcions poden prendre valors sorprenentment alts fins i tot per a valors petits d'n. Per exemple,

$$\sigma(27) = 59, \quad \sigma_\infty(27) = 111, \quad h(27) = 9232.$$

L'òrbita de 27 s'il·lustra a la figura 1.

Roosendaal [65] ha calculat diversos «rècords» per a aquestes funcions.[2] Per la seva banda, Wirsching [87, p. 21–22] ha catalogat diversos resultats sobre nombres consecutius amb la mateixa alçada.

2 Roosendaal atorga noms diferents a aquestes funcions, i els aplica a $C(x)$.

2.1 Temps d'aturada

L'algorisme natural mencionat més amunt es pot reformular com: el problema $3x+1$ és cert si, i només si, tot enter positiu té un temps d'aturada finit. Terras [77, 78] va demostrar que el conjunt d'enters positius amb temps d'aturada finit té densitat u. Més concretament, va demostrar que el límit

$$F(k) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \left|\{n \le m : \sigma(n) \le k\}\right|,$$

on $|A|$ designa el cardinal d'un conjunt A, existeix per a cada $k \in \mathbb{Z}^+$ i que $\lim_{k\to\infty} F(k) = 1$. Everett [31] en va donar una demostració més curta. Lagarias [45] va provar un resultat sobre la velocitat de convergència:

$$F(k) \ge 1 - 2^{-\eta k},$$

per a tota $k \in \mathbb{Z}^+$, on $\eta = 1 - H(\theta)$, $H(x) = -x\log(x) - (1-x)\log(1-x)$ i $\theta = (\log_2 3)^{-1}$. Ho utilitza per a restringir les possibles òrbites divergents:

$$\left|\{n \in \mathbb{Z}^+ : n \le x, \sigma(n) = \infty\}\right| \le c_1 x^{1-\eta},$$

per a alguna constant positiva c_1. Això implica que qualsevol trajectòria divergent no pot divergir massa lentament. En la mateixa direcció, Garcia i Tal [33] han provat recentment que la densitat de qualsevol òrbita divergent és zero. Aquest resultat es manté per a conjunts i funcions més generals.

Seguint línies diferents, Venturini [81] va demostrar que per a cada $\rho > 0$, el conjunt $\{n \in \mathbb{Z}^+ \colon T^{(k)}(n) < \rho n \text{ per a alguna k}\}$ té densitat u. Allouche [1] va provar que $\{n \in \mathbb{Z}^+ \colon T^{(k)}(n) < n^c \text{ per a alguna k}\}$ té densitat u per a $c > 3/2 - \log_2 3 \approx 0,869$, fet que va ser millorat per Korec [39] que va obtenir el mateix resultat amb $c > \log_4 3 \approx 0,7924$.

No ens ha de sorprendre, tampoc, que abundin resultats de caire probabilístic al voltant d'aquestes funcions $3x + 1$. Una suposició que sovint es formula és que després de moltes iteracions, el proper iterat té la mateixa probabilitat de ser parell que senar. Wagon [84] argumenta que el temps d'aturada mitjà per a un número senar n (amb la funció $C(x)$) s'apropa a una constant, concretament, al número

$$\sum_{i=1}^{\infty} [1 + 2i + i\log_2 3] \frac{c_i}{2^{[i\log_2 3]}} \approx 9,477955$$

on c_i és el nombre de successions que contenen $3/2$ i $1/2$ amb exactament i vegades $3/2$, tals que el producte de tota la successió és menor que 1, però que el producte de qualsevol successió inicial és més gran que 1. Observeu que aquesta fórmula passa per alt l'enutjós «+1» del «$3x + 1$», potser justificat asimptòticament. Això sembla que es confirma en les comprovacions numèriques de Wagon sobre els temps d'aturada per a nombres senars fins a $n = 10^9$, la qual cosa lliga amb el aproximació donada més amunt.

2.2 Temps total d'aturada

De resultats al voltant del temps total d'aturada també n'hi ha per donar i per vendre. Applegate i Lagarias [9] fan ús de dues noves funcions auxiliars: la *raó de temps d'aturada*

$$\gamma(n) := \frac{\sigma_\infty(n)}{\log n}$$

i la *proporció d'uns* $\rho(n)$ per a successions convergents, definit com la proporció entre el nombre de termes senars en els primers $\sigma_\infty(n)$ iterats dividit per $\sigma_\infty(n)$. És senzill de veure que $\gamma(n) \geq 1/\log 2$ per a tota n, amb igualtat només quan $n = 2^k$. Es coneixen desigualtats més fortes com ara

$$\gamma(n) \geq \frac{1}{\log 2 - \rho(n)\log 3},$$

per a qualsevol trajectòria convergent, mentre que si $\rho(n) \leq 0,61$, aleshores per a tot ϵ positiu,

$$\gamma(n) \leq \frac{1}{\log 2 - \rho(n)\log 3} + \epsilon,$$

per a tota n suficientment gran. Si hom assumeix que la proporció d'uns és $1/2$ (que equival a l'equiprobabilitat de trobar un parell o un senar després de molts iterats), tenim que el valor mitjà de $\gamma(n)$ és $2/\log(4/3) \approx 6,95212$, tal com van observar Shanks [69], Crandall [26], Lagarias [45](1985), Rawsthorne [64], Lagarias i Weiss [48](1992), i Borovkov i Pfeifer [15]. Hi ha evidències experimentals que reforcen aquesta observació. Compareu-ho amb les fites superiors suggerides pels models estocàstics de Lagarias i Weiss [48]:

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma(n) \approx 41,677647.$$

Applegate i Lagarias [9] van observar, a partir de dades de Roosendaal [65], el que aparentment és el valor conegut més gran de γ:

$$n = 7\,219\,136\,416\,377\,236\,271\,195$$

duu a $\sigma_\infty(n) = 1848$ i $\gamma(n) \approx 36,7169$. Applegate i Lagarias han cercat també una fita inferior de γ que es doni infinites vegades. Usant el fet ben conegut que $T^{(k)}(2^k - 1) = 3^k - 1$ (vegeu, per exemple, Kuttler [44]), posen de manifest que

$$\gamma(2^k - 1) \geq \frac{\log 2 + \log 3}{(\log 2)^2} \approx 3,729.$$

Tanmateix, van més enllà mostrant que hi ha un nombre infinit de valors de n convergents la proporció d'uns dels quals és com a mínim $14/29$; per tant, la fita inferior

$$\gamma(n) \geq \frac{29}{29\log 2 - 14\log 3} \approx 6,14316$$

es dóna per a un nombre infinit de valors de n. Tot i que la demostració involucra una cerca computacional extensa sobre l'*arbre de Collatz* fins a profunditat 60, els autors observen amb sorpresa que la mitjana probabilística de $\gamma(n)$ —aproximadament 6,95212— mai no s'assoleix.

Roosendaal [65] defineix una funció que anomena el *residu* d'un nombre $x \in \mathbb{Z}^+$, i que denomina $\mathrm{Res}(x)$. Suposeu que x és una C-trajectòria convergent amb P termes parells i S termes senars abans d'arribar a l'1. Aleshores, el residu es defineix com

$$\mathrm{Res}(x) := \frac{2^P}{x3^S}.$$

Roosendaal aprecia que $\mathrm{Res}(993) = 1,253142\ldots$, i que aquest és el residu més alt assolit per tots els $x < 2^{32}$. I conjectura que això es manté per a tota $x \in \mathbb{Z}^+$.

Zarnowski [89] reemprèn el problema $3x + 1$ amb llenguatge de cadenes de Markov. Sigui g la funció lleugerament alterada

$$g(x) = \begin{cases} (3x+1)/2, & \text{si } x \equiv 1 \pmod 2,\ x > 1, \\ x/2, & \text{si } x \equiv 0 \pmod 2, \\ 1, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

$\mathbf{e}_n$ el vector columna on l'n-èsim component val 1 i els altres 0, i la matriu de transició P definida per

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } g(i) = j, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquestes definicions donen una correspondència directa entre $g^{(k)}(n)$ i $\mathbf{e}_n^T P^k$, i el problema $3x + 1$ resulta ser cert si

$$\lim_{k\to\infty} P^k = [\mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \cdots],$$

on $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$ representen vectors columna constants. Zarnowski va més enllà mostrant que l'estructura d'una certa inversa generalitzada X de $I - P$ duu codificats els temps totals d'aturada de $\mathbb{Z}^+$.

Per a representacions gràfiques dels temps d'aturada d'una extensió de T, vegeu Dumont i Reiter [28].

2.3 El graf de Collatz i els conjunts predecessors

La qüestió dels temps d'aturada enllaça de manera complexa amb la de l'*arbre de Collatz*. L'*arbre de Collatz* és el graf dirigit els vèrtexs del qual són predecessors d'1 a través de l'aplicació T. Se'n pot veure una representació parcial a la figura 2.3.

L'estructura del graf de Collatz ha atret certa atenció. Andaloro [4] ha estudiat resultats sobre la connectivitat de subconjunts del graf de Collatz. Urvoy

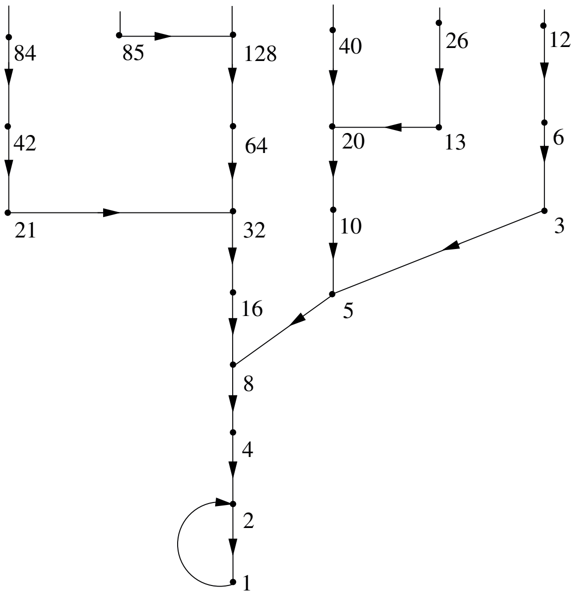


FIGURA 2: El graf de Collatz.

[79] va provar que el graf de Collatz és no regular, en el sentit que no posseeix una teoria de segon ordre monàdica decidible; això està relacionat amb la tasca de Conway mencionada a la secció 4.

En lloc d'analitzar com de ràpid ens acostem a u pels iterats, podem considerar el conjunt de nombres que s'acosten a un nombre concret a, és a dir, el *conjunt predecessor de a*:

$$P_T(a) := \{b \in \mathbb{Z}^+ : T^{(k)}(b) = a \text{ per a alguns } k \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Com que aquests conjunts són òbviament infinitament grans, hom pot mesurar els termes del conjunt predecessor que no sobrepassin una determinada fita x, és a dir,

$$Z_a(x) := |\{n \in P_T(a) : n \le x\}|.$$

El valor de $Z_a(x)$ va ser estudiat per primera vegada per Crandall [26], que va provar l'existència d'algunes $c > 0$ tals que

$$Z_1(x) > x^c, \quad \text{amb } x \text{ suficientment gran.}$$

Wirsching [87, p. 4] ens fa veure que aquest resultat s'estén a $Z_a(x)$ per a tota $a \not\equiv 0 \bmod 3$. Usant el mètode de cerca per arbres de Crandall i Sander [67] va donar una fita inferior concreta, $c = 0,25$, i Applegate i Lagarias [6] la van estendre a $c = 0,643$. Fent servir desigualtats funcionals en diferències, Krasikov [41] va introduir un nou enfocament i va obtenir $c = 3/7 \approx 0,42857$.

Wirsching [85] va emprar el mateix enfocament per obtenir que $c = 0,48$. Applegate i Lagarias [7] van superar aquests resultats amb $Z_1(x) > x^{0,81}$, per a x suficientment grans, bo i millorant l'enfocament de Krasikov amb programació no lineal. Recentment, Krasikov i Lagarias [42] van perfeccionar aquest enfocament i obtingueren que

$$Z_1(x) > x^{0,84}, \quad \text{per a } x \text{ suficientment grans.}$$

Wirsching [87] ha decantat aquesta mena de resultats cap a una nova direcció. Seguint camins aparentment diferents, defineix $R_{j,k}$, per a $j, k \in \mathbb{Z}^+$, com el conjunt de totes les sumes de la forma

$$2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1}3 + 2^{\alpha_2}3^2 + \cdots + 2^{\alpha_j}3^j,$$

on $j + k \geq \alpha_0 > \cdots > \alpha_j \geq 0$. El conjunt $R_{j,k}$ té mida

$$|R_{j,k}| = \binom{j+k+1}{j+1}.$$

Per tal de maximitzar aquesta mida, cal prendre $|R_{j-1,j}| = \binom{2j}{j}$. Wirsching va proposar la «conjectura recobridora» següent: existeix una constant $K > 0$ tal que per a tota $j, \ell \in \mathbb{Z}^+$ es té la implicació

$$|R_{j-1,j}| \geq K \cdot 2 \cdot 3^{\ell-1} \Longrightarrow R_{j-1,j} \text{ cobreix les classes residuals primeres mòdul } 3^\ell.$$

Aquesta conjectura implica una versió més forta de les desigualtats prèvies:

$$\liminf_{x\to\infty} \left(\inf_{a \not\equiv 0 \bmod 3} \frac{Z_a(ax)}{x^\delta} \right) > 0 \quad \text{per a tota } \delta \in (0,1).$$

Wirsching argumenta que, intuïtivament, la suma de potències combinades es pot interpretar com a acumulacions no lineals de la iteració de l'aplicació T.

Una bona part del llibre de Wirsching [87] s'ocupa d'un estudi més fi del conjunt de predecessors usant les funcions

$$e_\ell(k,a) = |\{b \in \mathbb{Z}^+ : T^{(k+\ell)}(b) = a,\ k \text{ iterats parells, } \ell \text{ iterats senars}\}|.$$

Definint l'*n-èsima sèrie estimadora* com

$$s_n(a) := \sum_{\ell=1}^{\infty} e_\ell\left(n + \lfloor \ell \log_2(3/2) \rfloor, a\right),$$

Wirsching demostra la implicació

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n(a)}{\beta^n} > 0 \Longrightarrow Z_a(x) \geq C\left(\frac{x}{a}\right)^{\log_2 \beta},$$

per a alguna constant $C > 0$ i per a x grans.

Com que $e_\ell(k,a)$ depèn d'a només a través de la seva classe residual mòdul 3^ℓ, Wirsching considera les funcions $e_\ell(k,\cdot)$ el domini de les quals és $\mathbb{Z}_3$, el grup dels enters 3-àdics. Com que $e_\ell(k,a)=0$ sempre que $\ell \geq 1$ i $3|a$, el conjunt $\{e_\ell(k,\cdot)\colon \ell \geq 1, k \geq 0\}$ és una família de funcions sobre el grup topològic compacte $\mathbb{Z}_3^*$ dels enters 3-àdics invertibles. Aquesta aplicació dels enters 3-àdics al problema $3x+1$ va ser descrita per primera vegada a Wirsching [86], i Applegate i Lagarias [8] també van dur a terme una anàlisi similar. Les funcions $e_\ell(k,\cdot)$ són integrables respecte l'única mesura de Haar normalitzada de $\mathbb{Z}_3^*$'s, i donen peu a la mitjana 3-àdica

$$\bar{e}_\ell(k) := \int_{\mathbb{Z}_3^*} e_\ell(k,a)da = \frac{1}{2\cdot 3^{\ell-1}}\binom{k+\ell}{\ell}.$$

Hi ha diversos resultats en aquesta línia, com ara

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{Z}_3^*} s_n(a)da > 0,$$

fet que implica que tot conjunt predecessor $P_T(a)$ amb $a \not\equiv 0 \bmod 3$ té densitat positiva.

3 Representacions dels iterats d'una aplicació $3x+1$

El resultat citat més sovint en aquesta àrea és degut a Böhm i Sontacchi [14]: el problema $3x+1$ és equivalent a demostrar que cada $n \in \mathbb{Z}^+$ es pot escriure com

$$n = \frac{1}{3^m}\left(2^{v_m} - \sum_{k=0}^{m-1} 3^{m-k-1}2^{v_k}\right),$$

on $m \in \mathbb{Z}^+$ i $0 \leq v_0 < v_1 < \cdots v_m$ són enters. Amigó [2, Prop. 4.2] obtingué resultats similars.

Sinai [70] estudia la funció F, definida a (1), sobre el conjunt $\sqcap$ definit com

$$\sqcap = \{1\} \cup \sqcap^+ \cup \sqcap^-, \quad \sqcap^{\pm 1} = 6\mathbb{Z}^+ \pm 1.$$

Considerem $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}^+$ i $\epsilon = \pm 1$; aleshores, el conjunt de $x \in \sqcap^\epsilon$ als quals hom pot aplicar $F^{(k_1)}F^{(k_2)}\cdots F^{(k_m)}$ és una progressió aritmètica

$$\sigma^{(k_1,k_2,\ldots,k_m,\epsilon)} = \{6\cdot(2^{k_1+k_2+\cdots+k_m} + q_m) + \epsilon\},$$

per a alguns q_m tals que $1 \leq q_m \leq 2^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$. A més,

$$F^{(k_1)}F^{(k_2)}\cdots F^{(k_m)}(\sigma^{(k_1,k_2,\ldots,k_m,\epsilon)}) = \{6\cdot(3^m p + r) + \delta\},$$

per a alguns r i δ que satisfan $1 \leq r \leq 3^m$, $\delta = \pm 1$. Seguint la mateixa filosofia, es poden trobar resultats a Andrei *et al.* [5] i Kuttler [44]. Sinai usa aquest resultat per obtenir informació distribucional de les trajectòries de F. Sigui $1 \le m \le M$, $x_0 \in \sqcap$ i

$$\omega\left(\frac{m}{M}\right) = \frac{\log(F^{(m)}(x_0)) - \log(x_0) + m(2\log 2 - \log 3)}{\sqrt{M}}.$$

Si $0 \le t \le 1$, aleshores $\omega(t)$ es comporta com una trajectòria de Wiener.

La connexió feta per Blecksmith *et al.* [13] entre el problema $3x + 1$ i les representacions 3-regulars de nombres estan relacionades amb aquests resultats. Es diu que un nombre $n \in \mathbb{Z}^+$ té una *representació 3-regular* si, i només si, existeixen enters $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ tals que

$$n = \sum_{i=1}^{k} 2^{a_i} 3^{b_i}, \quad a_1 > a_2 > \cdots > a_k \ge 0, \quad 0 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_k.$$

Fixeu-vos en la semblança amb els termes considerats per Wirsching en la darrera secció. Aquests nombres ja van ser estudiats almenys per Ramanujan. Una representació 3-regular de n és *especial de nivell k* si

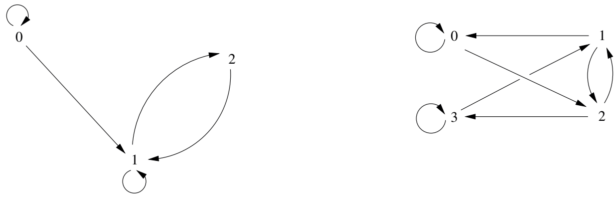
$$n = 3^k + 3^{k-1}2^{a_1} + \cdots + 3 \cdot 2^{a_{k-1}} + 2^{a_k},$$

on apareix cada potència de 3 fins a 3^k. Per a una k fixada, cada n té com a molt una tal representació —vegeu Lagarias [46] que atribueix la demostració a Don Copersmith. Blecksmith *et al.* proposen al lector que provi que $m \in \mathbb{Z}^+$ s'itera fins a 1 per l'aplicació C si, i només si, existeixen enters e i f tals que l'enter positiu $n = 2^e - 3^f m$ té representació 3-regular especial de nivell $k = f - 1$. La tria de e i f no és única, si és que existeix.

4 Reducció a classes de residus i altres conjunts

Un cop hom es convenç que el problema $3x + 1$ és cert, una direcció natural és cercar subconjunts, que anomenarem ara «suficients», $S \subset \mathbb{Z}^+$ tals que provant la conjectura sobre S impliqui que sigui certa sobre $\mathbb{Z}^+$. És obvi que $S = \{x\colon x \equiv 3 \bmod 4\}$ és suficient ja que els nombres de les altres classes residuals decreixen després d'una o dues iteracions. Puddu [63] i Cadogan [19] van demostrar que $S = \{x\colon x \equiv 1 \bmod 4\}$ també era suficient. Aquest resultat es pot apreciar molt fàcilment a la figura $3b$, bo i considerant la dinàmica dels enters a $\mathbb{Z}_4$.

El treball de Böhm i Sontacchi [14] implica que m iterats senars per T d'un nombre x condueixen a $(3/2)^m(x+1) - 1$ i, en conseqüència, que els senars esdevenen eventualment parells. Ajuntant-ho amb la dinàmica dels enters a $\mathbb{Z}_4$ (vegeu la figura $3b$), s'obté tant que $S = \{x\colon x \equiv 1 \bmod 4\}$ com que $S = \{x\colon x \equiv 2 \bmod 4\}$ són suficients. De manera semblant, la figura $3a$ indica que $S = \{x\colon x \equiv 1 \bmod 3\}$ o $S = \{x\colon x \equiv 2 \bmod 3\}$ també en són. Andaloro [3] ho ha millorat amb $S = \{x\colon x \equiv 1 \bmod 16\}$. Tots aquests conjunts tenen una densitat positiva que es pot calcular fàcilment, la més baixa



a *b*

FIGURA 3: Dinàmica dels enters (*a*) mod 3 i (*b*) mod 4.

de les quals és la del conjunt S d'Andaloro, d'$1/16$. Korec i Znám [40] van millorar significativament aquest resultat demostrant la suficiència del conjunt $S = \{x\colon x \equiv a \text{ mod } p^n\}$, on p és un nombre primer senar, a és una arrel primitiva mòdul p^2, $p \nmid a$, i $n \in \mathbb{Z}^+$. Aquest conjunt té densitat p^{-n}, que es pot fer que sigui arbitràriament petita. Seguint la mateixa veta, Yang [88] va provar la suficiència del conjunt

$$\left\{n\colon n \equiv 3 + \frac{10}{3}(4^k - 1) \text{ mod } 2^{2k+2}\right\}$$

per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}^+$ fixat. Korec i Znám afirmen també que han obtingut un conjunt suficient amb densitat zero, però no n'han facilitat els detalls. Amb el mateix propòsit, un resultat recent de Monks [57] és digne de menció. La darrera secció mostra com és de difícil trobar una expressió tancada usable per a $T^{(k)}(x)$. Si el «+1» s'ometés en les iteracions, això portaria a $T^{(k)}(x) = 3^m x/2^k$, on m és el nombre de termes senars en les k primeres iteracions de x. Monks [57] ha provat que existeix un nombre infinit de «versions lineals» del problema $3x + 1$. Un exemple que en dóna és l'aplicació

$$R(n) = \begin{cases} n/11, & \text{si } 11|n, \\ 136\,n/15, & \text{si } 15|n \text{ i } CDA, \\ 5\,n/17, & \text{si } 17|n \text{ i } CDA, \\ 4\,n/5, & \text{si } 5|n \text{ i } CDA, \\ 26\,n/21, & \text{si } 21|n \text{ i } CDA, \\ 7\,n/13, & \text{si } 13|n \text{ i } CDA, \\ n/7, & \text{si } 7|n \text{ i } CDA, \\ 33\,n/4, & \text{si } 4|n \text{ i } CDA, \\ 5\,n/2, & \text{si } 2|n \text{ i } CDA, \\ 7\,n, & \text{altrament,} \end{cases}$$

on CDA significa que «cap de les anteriors» condicions se satisfà. Monks mostra que el problema $3x + 1$ és cert si, i només si, per a cada enter positiu n la R-òrbita de 2^n conté el 2. La demostració empra el llenguatge *Fractran* de Conway [25], que ja va ser usat pel mateix Conway [24] per provar l'existència d'una aplicació similar el comportament sobre els enters de la qual, a llarg termini, era algorísmicament indecidible. Connectant aquest material amb els conjunts suficients ja vistos, hom detecta que la densitat del conjunt $\{2^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ és zero (per bé que es tracta d'una aplicació molt més complicada).

5 Cicles

L'estudi de l'estructura de tots els cicles de T possibles ha rebut també molta atenció.

Sigui Ω un cicle de T i Ω_{sen}, Ω_{par} els conjunts dels termes senars i dels termes parells en Ω. Hom pot reescriure l'equació

$$\sum_{x \in \Omega} x = \sum_{x \in \Omega} T(x)$$

i obtenir que

$$\sum_{x \in \Omega_{par}} x = \sum_{x \in \Omega_{sen}} x + |\Omega_{sen}| .$$

Aquest fet va ser observat per Chamberland [21] i Monks [57].

Usant aritmètica modular, la figura 3 indica la dinàmica dels enters per l'aplicació T, tant a $\mathbb{Z}_3$ com a $\mathbb{Z}_4$. Com que no hi ha cicles que puguin tenir tots els seus elements de la forma $0 \; mod \; 3$, $0 \; mod \; 4$, o $3 \; mod \; 4$, les figures impliquen que no hi ha cicles d'enters (excepte el del $\{0\}$) que tinguin elements de la forma $0 \; mod \; 3$. Així mateix, el nombre de termes congruents a $1 \; mod \; 4$ en un cicle és igual al nombre de congruents a $2 \; mod \; 4$. Aquesta anàlisi fou presentada per Chamberland [21].

Un resultat primerenc sobre cicles fa referència a la classe especial de T-cicles anomenada *circuits*. Un *circuit* és un cicle que pot ser escrit com k elements senars seguits per l elements parells. Davison [27] va demostrar que hi ha una correspondència un-a-un entre circuits i solucions (k, l, h) en enters positius tals que

$$(2^{k+l} - 3^k)h = 2^l - 1. \tag{2}$$

Més endavant, es va provar usant fraccions contínues i teoria de nombres transcendents (vegeu Steiner [71] i Rozier [66]) que l'equació (2) té només la solució $(1, 1, 1)$. Això implica que $\{1, 2\}$ és l'únic circuit.

Per a cicles generals de T, Böhm i Sontacchi [14] van demostrar que $x \in \mathbb{Z}^+$ pertany a un n-cicle de T si, i només si, existeixen enters $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \cdots \leq v_m = n$ tals que

$$x = \frac{1}{2^n - 3^m} \sum_{k=0}^{m-1} 3^{m-k} 2^{v_k}$$

B. Seifert [68] va obtenir un resultat similar.

Eliahou [30] ha donat alguns resultats potents sobre qualsevol cicle no trivial Ω de T. Si denotem per Ω_0 els termes senars de Ω, va demostrar que

$$\log_2 \left(3 + \frac{1}{M}\right) \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega_o|} \leq \log_2 \left(3 + \frac{1}{m}\right), \tag{3}$$

on m i M són els termes més petit i més gran, respectivament, de Ω. Observeu que per a cicles «grans» aquest fet implica que

$$\frac{|\Omega|}{|\Omega_0|} \approx \log_2 3.$$

Eliahou ho utilitza en conjunció amb l'aproximació diofantina de $\log_2 3$ i la fita numèrica $m > 2^{40}$ per demostrar que

$$|\Omega| = 301994\,a + 17087915\,b + 85137581\,c,$$

on a, b, c són enters no negatius, $b \geq 1$ i $ac = 0$. Chisala [22] i Halbeisen i Hungerbühler [35] van arribar també a resultats semblants. Tempkin i Arteaga [76] van esprémer aquest enfocament al màxim. Van estrènyer les relacions que apareixen a (3) i van usar una fita inferior millor de m per arribar a obtenir

$$|\Omega| = 187363077\,a + 272500658\,b + 357638239\,c,$$

on a, b, c són enters no negatius, $b \geq 1$ i $ac = 0$.

No és gens evident com es pot estendre la dicotomia parell-senar d'un cicle usada en aquests resultats a una dissecció més fina dels termes d'un cicle, per exemple, mòdul 4. Relacionat amb aquest comentari, Brox [17] ha provat que existeix un nombre finit de cicles tals que

$$\sigma_1 < 2\log(\sigma_1 + \sigma_3),$$

on σ_i és el nombre de termes en un cicle congruent a i mod 4.

6 Extensions de T a espais més grans

Una tècnica comuna per resoldre problemes és «immergir-los» en una classe més àmplia de problemes i usar les tècniques apropiades al nou espai. En el problema $3x + 1$, s'ha fet molta feina en aquesta direcció. Les subseccions següents, organitzades en ordre creixent segons la mida dels espais, detallen la tasca realitzada.

6.1 Els enters $\mathbb{Z}$

La primera extensió natural de T és a tot $\mathbb{Z}$. La definició de T és suficient per cobrir aquest cas. Hom troba ben aviat tres nous cicles: $\{0\}$, $\{-5, -7, -10\}$ i un cicle llarg

$$\{-17, -25, -37, -55, -82, -41, -61, -91, -136, -68, -34\}.$$

Aquests nous cicles es podrien obtenir (sense el signe menys) si hom considerés l'aplicació definida per $T'(n) = -T(-n)$, la qual correspon al problema «$3x - 1$». Es conjectura que aquests cicles són tots els cicles de T en $\mathbb{Z}$. Aquest problema fou considerat per Seifert [68].

6.2 Nombres racionals amb denominadors senars

Així com l'estudi del problema «$3x - 1$» de la darrera subsecció és equivalent al problema $3x+1$ a $\mathbb{Z}^-$, Lagarias [46] ha estès el problema $3x+1$ als racionals considerant la classe d'aplicacions

$$T_k(x) = \begin{cases} (3x+k)/2, & \text{si } x \equiv 1 \pmod 2, \\ x/2, & \text{si } x \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

amb $k \equiv \pm 1 \bmod 6$ positiva i tal que $(x, k) = 1$. Ha provat que, aleshores, els cicles de T_k es corresponen a cicles racionals x/k de la funció T. Lagarias demostra que existeixen cicles enters de T_k per a un nombre infinit de valors de k (amb estimacions sobre el nombre de cicles i fites de les seves longituds) i conjectura que existeixen cicles enters per a tota k. Halbeisen i Hungerbühler [35] han derivat fites similars a les d'Eliahou [30] sobre longituds de cicles per a cicles racionals.

6.3 L'anell dels enters 2-àdics $\mathbb{Z}_2$

La propera extensió és a l'anell $\mathbb{Z}_2$ dels enters 2-àdics, que consisteix en les successions binàries infinites de la forma

$$a = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j,$$

on $a_j \in \{0, 1\}$ per a tot enter no negatiu j. La congruència ve definida per $a \equiv a_0 \bmod 2$.

Chisala [22] estén C a $\mathbb{Z}_2$, però aleshores restringeix la seva atenció als racionals. Deriva restriccions interessants sobre cicles racionals; per exemple, si m és l'element mínim d'un cicle racional positiu, aleshores

$$m > 2^{\frac{[m \log_2 3]}{m}} - 3.$$

Una extensió més desenvolupada de T, iniciada per Lagarias [45], defineix

$$T \colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2, \qquad T(a) := \begin{cases} a/2, & \text{si } a \equiv 0 \bmod 2, \\ (3a+1)/2, & \text{si } a \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

S'ha demostrat (vegeu Matthews i Watts [53] i Müller [59]) que l'aplicació estesa T és exhaustiva, no injectiva, diferenciable un nombre infinit de vegades, no analítica, que preserva la mesura de Haar i que és fortament mesclant. Resultats similars sobre els iterats de T es poden trobar a Lagarias [45], Müller [59] [60] i Terras [77]. Definint l'aplicació desplaçament (*shift*) $\sigma \colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ com

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-1)/2, & \text{si } x \equiv 1 \pmod 2, \\ x/2, & \text{si } x \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

Lagarias [45] va provar que T és conjugada a σ a través de l'aplicació vectorial paritat $\Phi^{-1} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ definida per

$$\Phi^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \ (T^k(x) \bmod 2).$$

Bernstein [11] dóna una fórmula explícita per a la conjugació inversa Φ,

$$\Phi(2^{d_0} + 2^{d_1} + 2^{d_2} + \cdots) = -\frac{1}{3}2^{d_0} - \frac{1}{9}2^{d_1} - \frac{1}{27}2^{d_2} - \cdots,$$

on $0 \leq d_0 < d_1 < d_2 < \cdots$. També demostra que el problema $3x + 1$ és equivalent a tenir $\mathbb{Z}^+ \subset \Phi\left(\frac{1}{3}\mathbb{Z}\right)$. Bernstein i Lagarias [12] van provar que el problema $3x + 1$ no té òrbites divergents si $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}_{sen}) \subset (\mathbb{Q}_{sen})$, essent $\mathbb{Q}_{sen}$ el conjunt de racionals la forma reduïda dels quals té el denominador senar.

Monks i Yazinski [58] han aportat nous avenços en aquestes línies. Partint del fet que Hedlund [36] va provar que el grup d'automorfismes de σ és, simplement, $\mathrm{Aut}(\sigma) = \{id, V\}$, on id és l'aplicació identitat i $V(x) = -1 - x$, Monks i Yazinski defineixen una funció Ω com

$$\Omega = \Phi \circ V \circ \Phi^{-1}.$$

Aleshores, tenim que Ω és l'única autoconjugació no trivial de l'aplicació $3x + 1$, és a dir, $\Omega \circ T = T \circ \Omega$ i $\Omega^2 = id$. Si ho ajuntem als resultats de Bernstein i Lagarias, resulta que els autors demostren que tres enunciats són equivalents: $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}_{sen}) \subset (\mathbb{Q}_{sen})$, $\Omega(\mathbb{Q}_{sen}) \subset (\mathbb{Q}_{sen})$, i que cap «enter 2-àdic racional» té una T-trajectòria divergent.

Monks i Yazinski també estenen els resultats d'Eliahou [30] i Lagarias [45] sobre la densitat dels punts «senars» d'una òrbita. Sigui $\kappa_n(x)$ el nombre d'uns en els primers n-dígits del vector paritat x. Si $x \in \mathbb{Q}_{sen}$ entra eventualment en una n-òrbita periòdica, aleshores

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3 + 1/m)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa_n(x)}{n} \leq \frac{\ln(2)}{\ln(3 + 1/M)},$$

on m i M són els elements cíclics menor i major de l'eventual cicle. Si $x \in \mathbb{Q}_{sen}$ divergeix, aleshores

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\kappa_n(x)}{n}.$$

Monks i Yazinski defineixen una altra extensió de T, que li diuen $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, com

$$\xi(x) = \begin{cases} \Omega(x) & x \equiv 1 \pmod 2, \\ \frac{x}{2} & x \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

i proven que el problema $3x+1$ és equivalent a tenir el número 1 en la ξ-òrbita de cada enter positiu.

6.4 Els enters de Gauss i $\mathbb{Z}_2[i]$

Joseph [38] estén T més enllà, a $Z_2[i]$, definint $\tilde{T}$ com

$$\tilde{T}(\alpha) = \begin{cases} \alpha/2, & \text{si } \alpha \in [0], \\ (3\alpha + 1)/2, & \text{si } \alpha \in [1], \\ (3\alpha + i)/2, & \text{si } \alpha \in [i], \\ (3\alpha + 1 + i)/2, & \text{si } \alpha \in [1 + i], \end{cases}$$

on $[x]$ denota la classe d'equivalència de x en $\mathbb{Z}_2[i]/2\mathbb{Z}_2[i]$. Joseph demostra que $\tilde{T}$ no és conjugat a $T \times T$ per cap isomorfisme $\mathbb{Z}_2$-mòdul, però que és topològicament conjugat a $T \times T$. Amb arguments semblants als dels resultats de la darrera subsecció, Joseph mostra que $\tilde{T}$ és caòtica (en el sentit de Devaney). Kucinski [43] estudia cicles de l'extensió de Joseph $\tilde{T}$ restringits als enters de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

6.5 La recta real $\mathbb{R}$

Les extensions de T a la recta real $\mathbb{R}$ són interessants també en la mesura que permeten emprar eines que provenen de l'estudi d'iteracions en aplicacions contínues. En un article no publicat, Tempkin [75] estudia la més simple, des del punt de vista geomètric, d'aquestes extensions: l'extensió en «línia recta» de la funció de Collatz C:

$$\begin{aligned} L(x) &= \begin{cases} C(x), & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ C(\lfloor x \rfloor) + (x - \lfloor x \rfloor)(C(\lceil x \rceil) - C(\lfloor x \rfloor)), & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(5n-2)x + n(10n-3), & \text{si } x \in [2n-1, 2n], \\ (5n+4)x - n(10n+7), & \text{si } x \in [2n, 2n+1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Tempkin prova que sobre cada interval $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, L té punts periòdics de tots els períodes possibles. Aprofitant el fet que els iterats de les funcions lineals a trossos també són lineals a trossos, també demostra que tot punt eventualment periòdic de L és racional, que tot racional és o bé eventualment periòdic o bé divergent, i que els racionals de la forma $k/5$, amb $k \not\equiv 0 \bmod 5$, són divergents.

Tempkin també menciona una extensió regular de C,

$$E(x) := \frac{7x + 2}{4} + \frac{5x + 2}{4} \cos(\pi(x + 1)),$$

però no en fa cap anàlisi concreta. Chamberland [20] estudia una extensió similar de T:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x}{2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{3x + 1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &= x + \frac{1}{4} - \frac{2x + 1}{4} \cos(\pi x). \end{aligned}$$

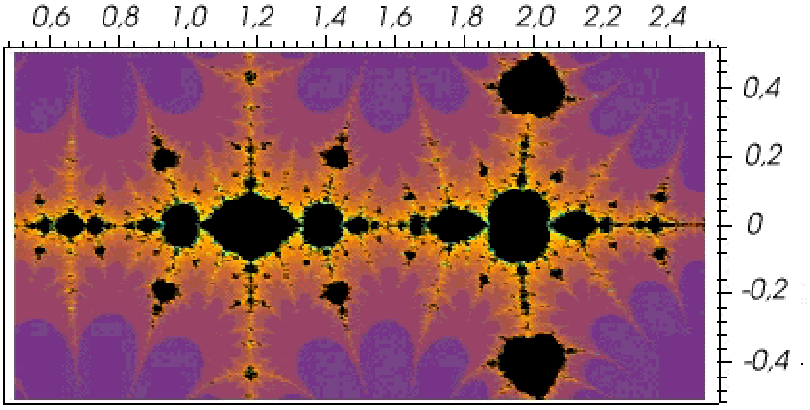


FIGURA 4: Conjunt de Julia de l'aplicació de Chamberland estesa al pla complex.

Chamberland demostra que tot cicle a $\mathbb{Z}^+$ ha de ser localment atractor. Com que la derivada schwarziana de f és negativa a $\mathbb{R}^+$, això implica que la dinàmica a llarg termini de gairebé tots els punts coincideix amb la dinàmica a llarg termini dels punts crítics. Hom troba ràpidament que existeixen dos cicles atractors,

$$A_1 := \{1, 2\}, \quad A_2 := \{1,192531907\ldots, 2,138656335\ldots\}.$$

Chamberland conjectura que aquests són els únics dos cicles atractors de f a $\mathbb{R}^+$. Aquesta afirmació és equivalent al problema $3x + 1$. També es prova que existeix una òrbita divergent monòtonament creixent. Chamberland compactifica l'aplicació a través de l'homeomorfisme $\sigma(x) = 1/x$ sobre $[\mu_1, \infty)$ (μ_1 és el primer punt fix positiu de l'aplicació f), fet que duu a una aplicació dinàmicament equivalent h definida sobre $[0, \mu_1]$ com

$$h(x) = \begin{cases} 4x/(4 + x - (2 + x)\cos(\pi x)), & \text{si } x \in (0, \mu_1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Darrerament, Chamberland es dedica a enunciats sobre qualsevol extensió general de f: ha de tenir un 3-cicle, una òrbita homoclínica (en la literatura més antiga, conegut per «repulsor *snap-back*»), i una trajectòria divergent monòtonament creixent.

Per il·lustrar com es manifesta el caos en aquesta extensió, Ken Monks va substituir x per z a l'aplicació de Chamberland i va generar numèricament conjunt de Julia ple. Una porció del conjunt s'indica a la figura 4.

En un article més recent, Dumont i Reiter [29] han aconseguit resultats similars per a l'extensió real

$$f(x) := \frac{1}{2}\left(3^{\sin^2(\pi x/2)}x + \sin^2(\pi x/2)\right).$$

Els mateixos autors han creat altres extensions diverses, així com figures que representen el temps d'aturada; vegeu Dumont i Reiter [28].

Argumentant que l'aplicació és turbulenta (existeixen intervals compactes A_1 i A_2 tals que $A_1 \cup A_2 = f(A_1) \cap f(A_2)$), Borovkov i Pfeifer [15] també demostren que qualsevol extensió contínua de T té òrbites periòdiques de cada període.

6.6 El pla complex $\mathbb{C}$

Letherman, Schleicher i Wood [50] ofereixen el refinament d'aquest enfocament de la manera següent: estenen T al pla complex amb

$$\begin{aligned} f(z) :=& \frac{z}{2} + \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi z))\left(z + \frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos(\pi z)\right)\sin(\pi z) + h(z)\sin^2(\pi z). \end{aligned}$$

Fixem-nos que els dos primers termes (substituint z per x) coincideixen amb l'extensió de Chamberland. Des del punt de vista dinàmic, l'avantatge clar d'aquesta nova funció és que el conjunt de punts crítics sobre la recta real és exactament $\mathbb{Z}$. Milloren el resultat de Chamberland provant que a l'interval $[n, n + 1]$, amb $n \in \mathbb{Z}^+$, hi ha un conjunt de Cantor de punts que divergeixen monòtonament. Al pla complex, Letherman *et al.* usen tècniques de dinàmica complexa per extreure'n resultats sobre els components de Fatou. En particular, demostren que no hi ha cap enter en un domini de Baker (domini a l'infinit). Es conclou aleshores que qualsevol enter o bé pertany a una òrbita periòdica superatractora o bé a un domini de punts errants.

7 Generalitzacions de la dinàmica de $3x + 1$

S'ha dut a terme molta recerca en aplicacions que presenten una dinàmica similar a la de T però que no són extensions de T. En aquests casos, hom acostuma a canviar la *funció*, contràriament a la darrera secció on era l'*espai* el que es modificava amb una extensió.

Belaga i Mignotte [10] van considerar el problema «$3x + d$», i conjecturen que per a qualsevol senar $d \geq -1$ no divisible per tres, totes les òrbites enteres entren en un conjunt finit (en conseqüènica, tota òrbita és eventualment periòdica). Observem que el problema «$3x - 1$» és equivalent al problema $3x + 1$ sobre els enters negatius, considerat a la secció prèvia.

Una altra generalització òbvia és la classe de problemes «$qx + 1$». Steiner [72, 73] va estendre els seus resultats sobre cicles i va demostrar que per a $q = 5$, hi ha només un circuit no trivial ($13 \to 208 \to 13$), mentre $q = 7$ no presenta circuits no trivials. Franco i Pomerance, [32] van demostrar que si q és un número de Wieferich[3] aleshores hi ha $x \in \mathbb{Z}^+$ que mai no arriben a 1 per iteració. Crandall [26] va conjecturar que això és cert per a *qualsevol* senar

3 Un enter senar q s'anomena un *número de Wieferich* si $2^{l(q)} \equiv 1 \bmod q^2$, on $l(q)$ és l'ordre de 2 en el grup multiplicatiu $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Els números de Wiefereich tenen densitat u dins dels senars.

$q \geq 5$. Wirsching [87] ofereix un argument heurístic usant mitjanes p-àdiques per afirmar que per a $q \geq 5$, el problema $qx + 1$ admet o bé una trajectòria divergent o bé un nombre infinit d'òrbites periòdiques diferents.

Mignosi [55] va indagar en una generalització relacionada, donada per

$$T_\beta(n) = \begin{cases} \lceil \beta n \rceil, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2, \\ x/2, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

per a qualsevol $\beta > 1$ i $r \in \mathbb{R}$. El cas $\beta = 3/2$ és equivalent a T. Mignosi conjectura que per a qualsevol $\beta > 1$, existeix un nombre infinit d'òrbites periòdiques. Ho prova per a $\beta = \sqrt{2}$ i elabora un argument heurístic segons el qual aquesta conjectura se satisfà per a quasi tota $\beta \in (1,2)$. Brocco [16] modifica l'aplicació prenent

$$T_{\alpha,r}(n) = \begin{cases} \lceil \alpha n + r \rceil, & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2, \\ x/2, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

per a $1 < \alpha < 2$. Demostra, per a la seva aplicació, que la conjectura de Mignosi és falsa si l'interval $((r-1)/(\alpha-1), r/(\alpha-1))$ conté un enter senar i α és un número de Salem o un número PV.[4]

Matthews i Watts [53, 54] es dediquen a aplicacions ramificades de la forma

$$T(x) := \frac{m_i x - r_i}{d}, \quad \text{si } x \equiv i \bmod d,$$

on $d \geq 2$ és un enter, $m_0, m_1, \ldots, m_{d-1}$ són enters diferents de zero, i r_0, r_1, $r_{d-1} \in \mathbb{Z}$ són tals que $r_i \equiv i m_i \bmod d$. Repliquen els seus resultats previs (vistos a la darrera secció), bo i estenent aquesta aplicació a l'anell dels enters d-àdics i demostren que preserva la mesura de Haar. Es pot trobar informació referent a trajectòries divergents a Leigh [49] i a Buttsworth i Matthews [18]. Les propietats ergòdiques d'aquestes aplicacions han estat estudiades per Venturini [80, 82, 83]. Un resultat «encapsulant» de [83] manté essencialment que la condició $|m_0 m_1 \cdots m_{d-1}| < 1$ dóna un comportament «convergent», mentre que les òrbites divergents poden tenir lloc si $|m_0 m_1 \cdots m_{d-1}| > 1$. Una classe especial d'aquestes aplicacions —conegudes com a *funcions de Hasse*, i que són «properes» a l'aplicació T habitual de problema $3x + 1$— ha estat estudiada per Allouche [1], Heppner [37], Garcia i Tal [33] i Möller [56], amb resultats similars. Una revisió recent d'aquestes aplicacions generalitzades —amb molts exemples— ha estat escrita per Matthews [52].

Aparentment allunyats del problema $3x+1$, trobem els resultats de Stolarsky [74], que resol completament un problema d'«aspecte similar». Recordem primer el teorema de Beatty, que diu que si $\alpha, \beta > 1$ són irracionals i satisfan $1/\alpha + 1/\beta = 1$, aleshores els conjunts

$$A = \{\lfloor n\alpha \rfloor : n \in \mathbb{Z}^+\}, \quad B = \{\lfloor n\beta \rfloor : n \in \mathbb{Z}^+\}$$

4 Un *número de Salem* és un número algebraic real més gran que 1, tots els conjugats z del qual satisfan $|z| \leq 1$, de manera que com a mínim un conjugat satisfà $|z| = 1$. Un *número de Pisot-Vijayaraghavan* (PV) és un número algebraic real més gran que 1, tots els conjugats z del qual satisfan $|z| < 1$.

formen una partició de $\mathbb{Z}^+$. Si $\alpha = \phi := (1 + \sqrt{5})/2$, tenim que $\beta = \phi^2 = (3 + \sqrt{5})/2$. Stolarsky considera l'aplicació

$$f(m) = \begin{cases} \lceil \lceil \frac{m}{\phi^2} \rceil \phi^2 \rceil + 1, & \text{si } m \in A, \\ \lceil \frac{m}{\phi^2} \rceil, & \text{si } m \in B. \end{cases}$$

Prova que f admet una única òrbita periòdica, concretament $\{3, 7\}$. Definint $b(n) = \lfloor n\beta \rfloor$, el conjunt $\{b^{(k)}(3) : k \in \mathbb{Z}^+\}$ —que té densitat zero— caracteritza els punts eventualment periòdics. Tots els altres enters positius tenen òrbites divergents. Les dinàmiques simbòliques són simples: qualsevol trajectòria té un itinerari de, o bé $B^l(AB)^\infty$ o bé $B^l(AB)^k A^\infty$, per a alguns enters $k, l \geq 0$.

8 Miscel·lània

Margenstern i Matiyasevich [51] han codificat el problema $3x + 1$ com un problema lògic usant un quantificador universal i diversos quantificadors existencials. Concretament, mostren que $T^{(m)}(2a) = b$ per a alguns $m \in \mathbb{Z}^+$ si, i només si, existeixen $w, p, r, s \in \mathbb{Z}^+$ tals que $a, b \leq w$ i

$$\begin{aligned} &\binom{4(w+1)(p+r)+1}{p+r} \binom{pw}{s} \binom{rw}{t} \\ &\times \binom{2w+1}{w} \binom{2s+2t+r+b((4w+3)(p+r)+1)}{3a+(4w+4)(3t+2r+s)} \\ &\times \binom{p+r}{p} \binom{3a+(4w+4)(3t+2r+s)}{2s+2t+r+b((4w+3)(p+r)+1)} \equiv 1 \bmod 2. \end{aligned}$$

Gluck i Taylor [34] han estudiat un altre «estadístic global», a part de la funció temps total d'aturada $\sigma_\infty(n)$. Si $\sigma_\infty(a_1) = p$ sota l'aplicació C, els autors defineixen una funció[5] A com

$$A(a_1) = \frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_p a_1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2},$$

on $a_2, a_3, \ldots, a_p$ són els iterats consecutius de a_1 per l'aplicació C.

Per a qualsevol senar $m > 3$, mostren que

$$\frac{9}{13} < A(m) < \frac{5}{7}.$$

A més a més, aquestes fites són fines ja que

$$\lim_{n \to \infty} A\left(\frac{4^n - 1}{3}\right) = \frac{9}{13}$$

5 Gluck i Taylor usen el símbol C per a la seva nova funció; per evitar confusions amb la funció de Collatz C, aquí emprem el símbol A.

i

$$\lim_{k\to\infty} A\left(\frac{2^k(2^{3^{k-1}}+1)}{3^k}\right) = \frac{5}{7}.$$

Gluck i Taylor també presenten un histograma normalitzat de A per a valors entre 2^{20} i $2^{20} + 20001$, junt amb un altre histograma d'una versió aleatòria de A (on els a_i s'obtenen aleatòriament). Aquests dos histogrames mantenen certa semblança, fet que suggereix un enfocament estocàstic/probabilístic d'aquest problema.

Agraïment: L'autor agraeix a Jeff Lagarias i Ken Monks l'oportunitat de compartir alguns dels avenços més recents en aquest problema, i a Ken Monks i Toni Guillamon per molts suggeriments útils.

Referències

[1] Allouche, J.-P. *Sur la conjecture de «Syracuse-Kakutani-Collatz»*. Talence: CNRS, 1979, 15 p. Séminaire de Théorie des Nombres, 1978-1979, Exp. núm. 9.

[2] Amigó, J. M. *Accelerated Collatz Dynamics* [Centre de Recerca Matemàtica]. *Preprint*, núm. 474 (juliol 2001).

[3] Andaloro, P. «On total stopping times under $3x+1$ iteration». *Fibonacci Quarterly*, 38 (2000), 73–78.

[4] Andaloro, P. «The $3x+1$ problem and directed graphs». *Fibonacci Quarterly*, 40 (1) (2002), 43–54.

[5] Andrei, S.; Kudlek, M.; Niculescu, R. S. «Some Results on the Collatz Problem». *Acta Informatica*, 37 (2) (2000), 145–160.

[6] Applegate, D.; Lagarias, J. «Density Bounds for the $3x + 1$ Problem. I. Tree-search method». *Mathematics of Computation*, 64 (1995), 411–426.

[7] Applegate, D.; Lagarias, J. «Density Bounds for the $3x + 1$ Problem. II. Krasikov-Inequalities». *Mathematics of Computation*, 64 (1995), 427–438.

[8] Applegate, D.; Lagarias, J. «The Distribution of $3x + 1$ Trees». *Experimental Mathematics*, 4 (3), (1995), 193–209.

[9] Applegate, D.; Lagarias, J. «Lower Bounds for the Total Stopping Time of $3x + 1$ Iterates». *Mathematics of Computation*, 72 (242) (2002), 1035–1049.

[10] Belaga, E.; Mignotte, M. «Embedding the $3x + 1$ Conjecture in a $3x + d$ Context». *Experimental Mathematics*, 7 (2) (1998), 145–151.

[11] Bernstein, D. «A Non-iterative 2-adic Statement of the $3N + 1$ Conjecture». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 121 (1994), 405–408.

[12] Bernstein, D.; Lagarias, J. «The $3x+1$ Conjugacy Map». *Canadian Journal of Mathematics*, 48 (1996), 1154–169.

[13] BLECKSMITH, R.; MCCALLUM, M.; SELFRIDGE, J. «3-Smooth Representations of Integers». *American Mathematical Monthly*, 105 (6) (1998), 529–543.

[14] BÖHM, C.; SONTACCHI, G. «On the Existence of Cycles of given Length in Integer Sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise». *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Serie VIII*, 64 (1978), 260–264.

[15] BOROVKOV, K.; PFEIFER, D. «Estimates for the Syracuse Problem via a Probabilistic Model». *Theory Probab. Appl.*, 45 (2000), 300–310.

[16] BROCCO, S. «A note on Mignosi's generalization of the $(3X + 1)$-problem». *Journal of Number Theory*, 52 (2) (1995), 173–178.

[17] BROX, T. «Collatz Cycles with Few Descents». *Acta Arithmetica*, 92 (2), (2000), 181–188.

[18] BUTTSWORTH, R.; MATTHEWS, K. «On some Markov matrices arising from the generalized Collatz mapping». *Acta Arithmetica*, 55 (1) (1990), 43–57.

[19] CADOGAN, C. «A Note on the $3x + 1$ Problem». *Caribbean Journal of Mathematics*, 3 (1984), 67–72.

[20] CHAMBERLAND, M. « A Continuous Extension of the $3x + 1$ Problem to the Real Line». *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996), 495–509.

[21] CHAMBERLAND, M. *Anunciat a la «Taula Rodona», International Conference on the Collatz Problem and Related Topics, Agost 5-6, 1999*. Alemanya: Katholische Universität Eichstätt.

[22] CHISALA, B. «Cycles in Collatz Sequences». *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 45 (1994), 35–39.

[23] CONROW, K. `http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/gentrees.html`.

[24] CONWAY, J. «Unpredictable Iterations». *Proceedings of the Number Theory Conference* [University of Colorado, Boulder] (1972), 49–52.

[25] CONWAY, J. « FRACTRAN: A Simple Universal Programming Language for Arithmetic». *Open Problems in Communication and Computation*. Nova York: T. M. Cover i B. Gopinath; Springer (1987), 4–26.

[26] CRANDALL, R. E. «On the "$3x + 1$" Problem». *Mathematics of Computation*, 32 (1978), 1281–1292.

[27] DAVISON, J. «Some Comments on an Iteration Problem». *Proceedings of the Sixth Manitoba Conference on Numerical Mathematics* (1976), 155–159.

[28] DUMONT, J.; REITER, C. «Visualizing Generalized 3x+1 Function Dynamics». *Computers & Graphics*, 25 (5) (2001), 883–898.

[29] DUMONT, J.; REITER, C. «Real Dynamics of a 3-Power Extension of the $3x + 1$ Function». *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* (2003). [A punt d'aparèixer].

[30] ELIAHOU, S. «The $3x + 1$ Problem: New Lower Bounds on Nontrivial Cycle Lengths». *Discrete Mathematics*, 118 (1993), 45–56.

[31] EVERETT, C. J. «Iteration of the Number-Theoretic Function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$». *Advances in Mathematics*, 25 (1977), 42–45.

[32] FRANCO, Z.; POMERANCE, C. «On a Conjecture of Crandall concerning the $qx + 1$ Problem». *Mathematics of Computation*, 64 (211) (1995), 1333–1336.

[33] GARCIA, M.; TAL, F. «A Note on the Generalized $3n + 1$ Problem». *Acta Arithmetica*, 90 (3) (1999), 245–250.

[34] GLUCK, D.; TAYLOR, B. «A New Statistic for the $3x + 1$ Problem». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130 (5) (2002), 1293–1301.

[35] HALBEISEN, L.; HUNGERBÜHLER, N. «Optimal Bounds for the Length of Rational Collatz Cycles». *Acta Arithmetica*, 78 (3) (1997), 227–239.

[36] HEDLUND, G. «Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System». *Mathematical Systems Theory*, 3 (1969), 320–375.

[37] HEPPNER, E. «Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse Algorithmus». *Archiv der Mathematik*, 31 (3) (1978), 317–320.

[38] JOSEPH, J. « A Chaotic Extension of the $3x+1$ Function to $Z_2[i]$». *Fibonacci Quarterly*, 36 (4) (1998), 309–316.

[39] KOREC, I. «A Density Estimate for the $3x + 1$ Problem». *Mathematica Slovaca*, 44 (1) (1994), 85–89.

[40] KOREC, I.; ZNÁM,Š. «A Note on the $3x + 1$ Problem». *American Mathematical Monthly*, 94 (1987), 771–772.

[41] KRASIKOV, I. «How many numbers satisfy the $3x + 1$ conjecture?». *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 12 (1989), 791–796.

[42] KRASIKOV, I.; LAGARIAS, J. «Bounds for the $3x + 1$ Problem using Difference Inequalities». *Acta Aritmética*, 109 (2003), 237–258.

[43] KUCINSKI, G. «Cycles of the $3x+1$ Map on the Gaussian Integers». *Preprint* amb data de maig de 2000.

[44] KUTTLER, J. «On the $3x + 1$ Problem». *Advances in Applied Mathematics*, 15 (1994), 183–185.

[45] LAGARIAS, J. «The $3x + 1$ Problem and its Generalizations». *American Mathematical Monthly*, 92 (1985), 1–23. [Disponible a `www.cecm.sfu.ca/organics/papers`].

[46] LAGARIAS, J. «The Set of Rational Cycles for the $3x + 1$ Problem». *Acta Arithmetica*, 56 (1990), 33–53.

[47] LAGARIAS, J. «$3x + 1$ Problem Annotated Bibliography». `http://www.research.att.com/˜jcl/doc/3x+1bib.ps`, 26 de juliol, 1998.

[48] LAGARIAS, J.; WEISS, A. «The $3x + 1$ Problem; Two Stochastic Models». *Annals of Applied Probability*, 2 (1992), 229–261.

[49] Leigh, G. M. «A Markov process underlying the generalized Syracuse algorithm». *Acta Arithmetica*, 46 (2) (1986), 125–143.

[50] Letherman, S.; Schleicher, D.; Wood, R. «The $3n + 1$-Problem and Holomorphic Dynamics». *Experimental Mathematics*, 8 (3) (1999), 241–251.

[51] Margenstern, M.; Matiyasevich, Y. «A binomial representation of the $3x + 1$ problem». *Acta Arithmetica*, 91 (4) (1999), 367–378.

[52] Matthews, K. `http://www.maths.uq.edu.au/~krm`, 15 agost 2002.

[53] Matthews, K.; Watts, A. M. «A Generalization of Hasse's Generalization of the Syracuse Algorithm». *Acta Arithmetica*, 43 (2), (1984), 167–175.

[54] Matthews, K.; Watts, A. M. «A Markov Approach to the generalized Syracuse Algorithm». *Acta Arithmetica*, 45 (1), (1985), 29–42.

[55] Mignosi, F. «On a generalization of the $3x + 1$ problem». *Journal of Number Theory*, 55 (1) (1995), 28–45.

[56] Möller, H. «Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutanis Problem)». *Acta Arithmetica*, 34 (3) (1978), 219–226.

[57] Monks, K. «$3x + 1$ Minus the $+$». *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 5 (1) (2002), 47–54.

[58] Monks, K.; Yazinski, J. «The Autoconjugacy of the $3x+1$ Function». 2002 [Apareixerà a Discrete Math.]

[59] Müller, H. «Das '$3n + 1$' Problem». *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, 12 (1991), 231–251.

[60] Müller, H. «Über eine Klasse 2-adischer Funktionen im Zusammenhang mit dem '$3x + 1$'-Problem». *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 64 (1994), 293–302.

[61] Oliveira e Silva, T. «Maximum excursion and stopping time recordholders for the $3x + 1$ problem: computational results». *Mathematics of Computation*, 68 (225) (1999), 371–384.

[62] Oliveira e Silva, T. «`http://www.ieeta.pt/ ˜ tos/3x + 1.html`.» 2000.

[63] Puddu, S. «El problema de Syracuse (en castellà)». *Notas de la Sociedad de Matemática de Chile*, 5 (1986), 199–200.

[64] Rawsthorne, D. «Imitation of an Iteration». *Mathematics Magazine*, 58 (1985), 172–176.

[65] Roosendaal, E. «`http://personal.computrain.nl/eric/wondrous/`.» 2003.

[66] Rozier, O. «Démonstration de l'absense de cycles d'une certain forme pour le Problème de Syracuse». *Singularité*, 1 (1990), 9–12.

[67] Sander, J. «On the $(3N + 1)$-Conjecture». *Acta Arithmetica*, 55 (1990), 241–248.

[68] Seifert, B. «On the Arithmetic of Cycles for the Collatz-Hasse ('Syracuse') Problem». *Discrete Mathematics*, 68 (1988), 293–298.

[69] Shanks, D. «Comments on Problem 63-13». *SIAM Review*, 7 (1965), 284–286.

[70] Sinai, Y. «Statistical $(3x+1)$-Problem». *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56 (7) (2003), 1016–1028.

[71] Steiner, R. *A Theorem on the Syracuse Problem*. Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, (1977), 553–559.

[72] Steiner, R. «On the "$QX + 1$ problem", Q odd». *Fibonacci Quarterly*, 19 (3) (1981), 285–288.

[73] Steiner, R. «On the "$QX + 1$ problem", Q odd. II». *Fibonacci Quarterly*, 19 (4) (1981), 293–296.

[74] Stolarsky, K. «A Prelude to the $3x + 1$ Problem». *Journal of Difference Equations and Applications*, 4 (1998), 451–461.

[75] Tempkin, J. *Some Properties of Continuous Extensions of the Collatz Function*. [Esborrany de voltants del 3 d'octubre de 1993.]

[76] Tempkin, J.; Arteaga, S. *Inequalities Involving the Period of a Nontrivial Cycle of the* $3n + 1$ *Problem*. [Esborrany de voltants del 3 d'octubre de 1997.]

[77] Terras, R. «A Stopping Time Problem on the Positive Integers». *Acta Arithmetica*, 30 (1976), 241–252.

[78] Terras, R. «On the Existence of a Density». *Acta Arithmetica*, 35 (1979), 101–102.

[79] Urvoy, T. «Regularity of congruential graphs». *Mathematical foundations of computer science 2000* (Bratislava), 680–689. (Lecture Notes in Computer Science; 1893). Berlín: Springer, 2000 vegeu també <http://www.irisa.fr/galion/turvoy/>.

[80] Venturini, G. «Comportament de les iteracions d'algunes funcions numèriques (en italià)». *[Istituto Lombardo. Accademia di Scienze e Lettere. Rendiconti. Scienze Matematiche e Applicazioni]*. A, 116 (1982), 115–130.

[81] Venturini, G. «On the $3x+1$ problem». *Advances in Applied Mathematics*, 10 (3) (1989), 344–347.

[82] Venturini, G. «Iterates of number-theoretic functions with periodic rational coefficients (generalization of the $3x + 1$ problem)». *Studies in Applied Mathematics*, 86 (3) (1992), 185–218.

[83] Venturini, G. «On a generalization of the $3x + 1$ problem». *Advances in Applied Mathematics*, 19 (3) (1997), 295–305.

[84] Wagon, S. «The Collatz Problem». *Mathematical Intelligencer*, 7 (1) (1985), 72–76.

[85] Wirsching, G. «An Improved Estimate concerning $3n + 1$ Predecessor Sets». *Acta Arithmetica*, 63 (1993), 205–210.

[86] WIRSCHING, G. «A Markov Chain underlying the Backward Syracuse Algorithm». *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 39 (1994), 915–926.

[87] WIRSCHING, G. *The Dynamical System Generated by the* $3n + 1$ *Function*. Heidelberg: Springer, 1998.

[88] YANG, Z. H. «An Equivalent Set for the $3x + 1$ Conjecture». *Journal of South China Normal University*, Natural Science Edition, núm. 2 (1998), 66–68.

[89] ZARNOWSKI, R. «Generalized Inverses and the Total Stopping Times of Collatz Sequences». *Linear and Multilinear Algebra*, 49 (2) (2001), 115–130.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
GRINNELL COLLEGE, GRINNELL, IA, 50112, U.S.A.
chamberl@math.grinnell.edu