Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 1, 2003. Pàg. 47–129

# Una història breu de la matemàtica*

Josep Pla

## 1 Introducció

D'antuvi vull agrair al degà Joaquím Ortega Aramburu que m'hagi ofert, en nom propi i de la Facultat, la distinció —i la responsabilitat— que representa per a qualsevol professor poder adreçar-se a la Facultat —estudiants, personal d'administració i serveis, i professors— a l'inici del curs acadèmic, en l'acte que simbolitza i sintetitza el curs que ara comença i alhora ens recorda una vegada més què és el que les ciències matemàtiques han aportat al progrés del coneixement de la humanitat i, molt més important per a tots nosaltres ara i aquí, què és el que la Facultat de Matemàtiques, en cada un dels seus ensenyaments, pot oferir-nos a tots plegats i, d'una manera molt particular, a les noies i els nois que desitgen i esperen que els formem com a matemàtics, en el sentit més pur de la paraula, i també a aquelles i aquells que desitgen conèixer amb profunditat i rigor els entrellats més aplicats.

En aquest acte solemne, iniciàtic i simbòlic té lloc, a partir de les dotze del dimecres vint-i-cinc, la proclamació del començament del curs 2002–2003. Si en fos capaç, podria haver elaborat l'horòscop que, d'aquest naixement del curs, fixen els astres. Així podríem esbrinar quines són les expectatives que ens ofereix. Però, malgrat que hi ha hagut matemàtics de gran renom que han excel·lit com a astròlegs i, fins i tot, com a endevins, no és pas el que penso fer jo ara (vegeu, per exemple, Cardano, G. [30], o Koestler, A. [102]).

Tanmateix, no puc oblidar que el curs que iniciem és el curs 2002–2003 i que, potser, alguns de nosaltres el recordarem d'una manera particular per algun fet que el farà *diferent* i que ens permetrà distingir-lo d'altres cursos. Potser és el curs en què comencem els nostres estudis universitaris, o aquell en què, per fi!, els acabem. El curs en què aconseguirem una plaça de professor,

* Lliçó inaugural del curs acadèmic 2002–2003, llegida el dimecres 25 de setembre de l'any 2002.

tants anys cobejada, o en què hem fet la lliçó inaugural. Aquell en què farem un amic o amiga íntim i inoblidable. L'any en què coneixerem una professora o un professor —o un estudiant— que ens deixarà, per la raó que sigui, un bon record. Aquell en què descobrirem una assignatura o una matèria que ens apassionarà. L'any en què tindrem un fill o en què es morirà un familiar. L'any en què ens jubilarem. Potser serà el curs en què iniciarem la nostra tasca com a degà, o en què, després de tants anys d'una gestió excel·lent, deixarem de ser-ho... El fet concret importa molt poc. El que importa és que l'any 2002–2003 esdevingui *significatiu* en les nostres vides personals i acadèmiques per tal que sigui, per a cada un de nosaltres, *inesborrable*.

Això del calendari i dels anys és quelcom ben curiós perquè, com tantes altres coses de la vida, és un conveni molt menys rellevant del que, a vegades, pensem. Deixeu-me esplaiar una mica més,[1] tot recorrent a una anècdota força romàntica.

1 No fa pas gaire iniciàvem el *tercer mill·lenni* i, a causa de matisacions més o menys acurades, uns deien que calia fixar-ne l'inici en un cert moment mentre que d'altres en defensaven un altre. Una discussió ben curiosa si tenim en compte que el calendari actual és fruit de la reforma promoguda pel papa Gregori XIII (**1502**–1585), nascut precisament ara fa cinc-cents anys. El calendari gregorià s'inicià el dia 14 d'octubre de l'any 1582 del calendari julià, suprimint de cop deu dies. El calendari julià fou implantat per Gai Juli César (100–44 aC). El seu inici, si els càlculs són correctes, tingué lloc el dia 1 de febrer de l'any 45 aC del calendari gregorià. Tenia 365 dies i 1/4 que, segons la reforma gregoriana, sobrepassava l'any solar d'11 minuts i 14 segons.

El calendari julià s'establí damunt l'antic any romà de 304 dies, el qual, l'any 700 aC, fou canviat per un any de 355 dies. Segons la llegenda, el calendari romà, i de retruc el nostre calendari, fou creat per Ròmul (VIII aC), el rei mític de Roma, l'any 735 aC, any de la fundació de la ciutat. Per això els romans, per referir-se als anys, deien *ab urbe condita* (AUC). Tenia deu mesos: *martis*, pel déu Mart; *aprilis*, que feia referència a la criança del porc; *maius*, per Maia, una deessa italiana local; *juni*, per Juno, la reina dels déus, seguits per *quintilis*, *sextilis*, *september*, *october*, *november* i *december*, per cinquè, sisè, setè, vuitè, nonè i desè. Durà poc. L'any 700 aC, el rei Numa (VIII–VII aC), successor de Ròmul, imposà un any de dotze mesos, afegint-hi *januaris* i *februaris*, i 354 dies per any. El senat romà, en honor de Juli César, convertí el mes *quintilius* en *julius*. Més tard, en honor a l'emperador Gai Juli Octavià August (61 aC–14 dC), el *sextilis* es va convertir en *Augustus*. Així fou com s'establiren els noms dels mesos.

La qüestió de l'inici del calendari és tota una altra qüestió. L'any 284, l'emperador Gai Aureli Valeri Dioclecià (~245–313) pujà al tron i el consignà com l'any 1 *anni Diocleciani*. L'any 247*anni Diocleciani* Dionisi l'Exigu (o el *petit*) (final del segle V–~540) va escriure al bisbe Petroni (final del segle V–VI) una carta en la qual es queixava del fet que les festes pasquals utilitzessin un calendari l'inici del qual estava fixat per la coronació de Dioclecià, que havia estat un dels assots més ferotges dels cristians i afegeix: «prefereixo comptar els anys des de l'Encarnació de Nostre Senyor per tal de fer més clars el fonament de la nostra esperança i la causa de la redempció de l'home». La carta era de l'any 531 *annus Domini Nostri Jesucristi* (AD) segons els càlculs, un xic erronis, que Dionisi féu del naixement de Jesucrist (~4 aC–29 dC). Fou el primer autor que emprà aquest nou inici del calendari. No tothom s'hi avingué. Tanmateix, no s'imposà fins a l'any 563 AD, en què Flavi Magne Aureli Cassiodor (490–580) l'adoptà en un text que va elaborar per fer el còmput de la Pasqua. Malgrat tot, aquesta correcció no fixa pas l'inici del calendari en l'any del naixement de Jesucrist, que, com ja hem dit, és molt imprecís. Actualment, es creu que el naixement de Jesucrist tingué lloc l'any 4 o 5 aC. Tot això fa que no puguem demanar gaire precisió a l'inici del mil·leni. En tot cas, un cop fixat l'inici d'algun mil·leni, o d'algun segle, haurem fixat, si el calendari no canvia, l'inici de tots els altres segles i mil·lenis.

L'ús de aC per indicar *abans de Crist* fou introduït per l'astrònom francès Denis Petau (1583–**1652**) pels vols del 1627, quan ensenyava al College Clermont de París.

El lector interessat pot consultar, entre d'altres, Duncan, D. E. [46].

En la majoria de llibres d'història es fixa la data del naixement d'Isaac Newton (1642–1727) el dia 25 de desembre de l'any 1642. Que bonic! Que simpàtic! Si tenim en compte que Galileo Galilei (1564–1642) va morir el dia 8 de gener de 1642, resulta que ambdòs prohoms fixen, en l'any 1642, la fi d'una era i l'inici d'una altra.[2] Ara bé, Newton va néixer a Anglaterra mentre que Galileo va morir a Itàlia. I, com és habitual en aquesta illa singular, l'adopció del calendari gregorià no es féu pas al mateix temps que a la resta del continent. Van trigar cent-setanta anys a adoptar-lo.[3] És a dir, Newton va néixer, efectivament, el dia 25 de desembre de 1642, però del calendari anglès del moment, que era el calendari julià. El dia correspon al 5 de gener de l'any 1643 del calendari gregorià. Amb aquest petit joc de mans resulta que, si volem fer coincidir els dos esdeveniments el mateix any, hem de donar-los en calendaris diferents. Altrament, l'any no coincidirà.[4]

Malgrat totes aquestes digressions és indubtable que les dates han esdevingut els senyals que permeten de retrobar, amb més o menys fidelitat, el camí de la història.[5] Són les dates les que han permès durant tot l'any 2002

---

2 Galileo havia nascut el 15 de febrer de 1564.

3 El pas d'un calendari a l'altre —del julià al gregorià— es féu a Roma l'any 1582. Calia suprimir deu dies de l'antic calendari julià, passant del 4 al 14 d'octubre. No ens ha d'estranyar que, en una Europa dividida en catòlics i protestants, sense tenir en compte els ortodoxos, els musulmans i els jueus, l'adopció del calendari gregorià fos complicada. Els catòlics l'adoptaren entre el 1582 i el 1584; els protestants alemanys ho feren, parcialment, l'any 1700 i, totalment, l'any 1775; Gran Bretanya i les colònies americanes, l'any 1752, suprimint de cop onze dies, del 3 al 13 de setembre. El Japó ho féu l'any 1783; Rússia, el 1917; la Xina, el 1949 per voluntat explícita de Mao Zedong (1893–1976); l'església ortodoxa, parcialment, l'any 1923.

A la península Ibèrica es va mantenir el calendari propi durant més de deu segles: l'«Era hispànica», l'inici de la qual és el 38 aC. A Catalunya s'abandonà l'any 1180, quan el concili de Tarragona va imposar l'obligació d'usar els anys de l'era cristiana. A Castella, Aragó i València, l'«Era hispànica» es va mantenir fins al segle XIV, poc abans de la reforma gregoriana. (Vegeu Duncan, D. E. [46].)

4 Cal remarcar que fins a finals del segle XII i començaments del segle XIII les dates dels naixements són gairebé totalment desconegudes i, en tot cas, molt inexactes. La data de naixement que normalment s'atribueix als personatges il·lustres no és gaire fiable. En els territoris de predomini de les esglésies cristianes la data que es conserva és la del dia del bateig, que és de mesos i, fins i tot, de més d'un any de diferència amb la data del naixement.

Tanmateix, a les classes nobles s'acostumava a anotar els esdeveniments que els afectaven i que consideraven rellevants. Entre aquests fets cal incloure els naixements dels fills i les filles legítims i, a vegades, dels fills bastards reconeguts. Això, però, no succeïa en les famílies humils. Les dates de la mort són molt més uniformes. De ben antic hi ha registres de defuncions per qüestions d'higiene elementals. En el cas dels homes i de les dones que, per la raó que sigui, s'han distingit, la data de la mort està ben consignada i acostuma a ser correcta.

5 Malgrat que hi ha qui afirma que Heròdot (484–420 aC) i Tucídides (~460/455–399/396 aC) són els primers historiadors dels quals es conserva l'obra cal indicar que les dates no hi són presents. En l'antiguitat, les dates dels successos es fixaven *per comparació* a d'altres esdeveniments rellevants. Trobem expressions com ara «la batalla tingué lloc mentre regnava el faraó Amenotis III». O bé, «durant la batalla el cel s'enfosquí». La primera pot semblar ambigua, però vol ser precisa. La segona pot ser poètica, literària i, per tant, totalment inútil per fixar la data, però també pot significar «la batalla tingué lloc durant un eclipsi». Si fos així, podria permetre fixar la data exacta de l'esdeveniment històric.

Aquesta segona interpretació aplicada als textos, gairebé idèntics, dels evangelis de Mateu 27,45, Marc 15,33 i Lluc 23,44: «Des de l'hora sexta les tenebres s'estengueren sobre la terra fins a l'hora nona» (vegeu Monjos de Montserrat [141, 150; 216; 329]), podria permetre fixar la celebrar, a Catalunya, l'Any Gaudí i l'Any Verdaguer; l'Any Víctor Hugo, a França; l'Any Abel, a Noruega, etc.[6]

Totes aquestes reflexions em van portar a pensar que podria mirar quins eren els matemàtics que, durant l'any 2002 o 2003, celebren un cinquantenari o un centenari del naixement o de la mort.[7] Entre els més notables, en vaig trobar una llista força llarga. (Vegeu la llista a les pàgines 113–115.)

La qüestió era aleshores intentar oferir, en aquesta lliçó inaugural, una història breu —molt esbiaixada, naturalment— de la matemàtica, basada en llurs aportacions, intuïcions i ensenyaments.[8] Els homenatjats serien els pilars damunt els quals bastir un pont entre alguns —molt pocs— fets i resultats matemàtics.[9]

He triat, doncs, alguns resultats —molts han quedat fora de l'exposició— i basant-me en aquests resultats miraré d'explicar, sobretot als estudiants de matemàtiques —i molt menys als estudiants d'informàtica—[10] quina mena de problemes han plantejat, com els han resolt, quines preguntes suggereixen, quines respostes admeten, quines portes obren i quines tanquen, com es lliguen entre si qüestions aparentment independents.[11] En definitiva, miraré d'exposar què podem aprendre de les seves aportacions, no tant en coneixements concrets com en filosofia i història del quefer matemàtic.

L'exposició vol ser senzilla —i espero que sigui clara— perquè desitjo que pugui ser compresa per totes i tots els qui, per una o una altra raó, m'escolteu. En algun moment potser no serà gaire rigorosa, però el que vull és que totes i tots en puguem treure alguna mena d'ensenyament útil.

## 2 On apareixen les equacions diferencials

Comencem contemplant el magnífic passadís del col·legi de les teresianes del carrer Ganduxer, dissenyat pel genial arquitecte reusenc Antoni Gaudí

---

data de la mort de Jesucrist, sempre que considerem que s'ajusta als fets i que no és simplement un recurs literari que pretén posar de manifest el fet dramàtic que vivia el poble jueu. És curiós observar que l'evangeli de Joan, l'únic deixeble que sabem que era present al Calvari, no dóna cap indicació d'aquesta mena. També ho és que, en els evangelis editats pels monjos de Montserrat, no hi ha cap indicació que faci pensar que es tracta d'un eclipsi.

Les primeres datacions —basades en les *calendas*— cal situar-les en l'època de predomini romà.

6 Durant la celebració del congrés dedicat al segon centenari del naixement d'Abel, l'Acadèmia Sueca de Ciències ha creat «el Premi Abel de matemàtiques», que vol suplir la mancança que, en aquesta disciplina, té el premi Nobel de l'Acadèmia Sueca. Es concedirà anualment i tindrà la mateixa dotació econòmica i el mateix reconeixement que els altres nobels.

7 Les dates dels prohoms que, en els anys 2002 i 2003, corresponen a un cinquantenari o un centenari les escriurem en negreta, perquè quedin ben paleses.

8 Hauria estat molt més bonic limitar-se als llibres i articles —en definitiva, els resultats matemàtics concrets— datats en aquests períodes, però això és molt més difícil de fer.

9 La llista és massa llarga. Una exposició de les aportacions més notables d'aquests prohoms ocuparia ben bé tot un semestre.

10 Això és a causa de les meves limitacions.

11 Una de les riqueses de la matemàtica és el lligam íntim que hi ha entre resultats matemàtics que, en moltes ocasions, s'estudien en matèries diferents.

(**1852**–1926).[12] Les voltes són arcs de *catenària*.[13] Aquestes corbes foren considerades, per primera vegada, per Galileo Galilei:

> *Clavem dos claus a la paret a una altura convinguda i al mateix nivell [...] Pengem d'aquests dos claus una cadena molt fina [...] Aquesta cadena es corbarà formant una paràbola.*

Afirma que és una *paràbola*.[14] Haurien de passar dos lustres abans que un jove holandès de setze anys, Christiaan Huygens (1629–1695), s'adonés que Galileo s'havia equivocat. Tanmateix, els primers matemàtics que descobririen la naturalesa matemàtica de la catenària —ells en donarien la descripció matemàtica— foren Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) i Johann Bernoulli (1667–1748) en resposta a un «repte» plantejat per Jakob Bernoulli (1665–1705). Les tres solucions —de Huygens, Leibniz, i Jh. Bernoulli— foren publicades a l'*Acta Eroditorum* de l'any 1691. (Vegeu Huygens, C. [90], [91]; Leibniz, G. W. [121], i Bernoulli, Jh. [15].) La solució de Huygens lliga la construcció de la catenària amb la quadratura de la corba $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$. (Vegeu, per exemple, Elia, A. D' [49, p. 313–318].) Leibniz la vincula amb la funció logaritme, mentre que Bernoulli ho fa amb la quadratura de la hipèrbola.[15] El segle XVII arribava a la fi. Ho van aconseguir independentment, però els dos darrers ho van fer mostrant la *potència* d'un càlcul nou: el *càlcul diferencial*. (A Leibniz, G. W. [122], l'autor alemany fa una presentació didacticometodològica de les diferents solucions del problema.)

Imaginem, doncs, que tenim una cadena penjada. El pes de la cadena, que podem fer igual a $gs$, s'ha de compensar amb les tensions $T$ i $T_0$. La primera és tangencial a la corba en el punt $A$. La segona, tangencial en el punt $B$, és horitzontal. De fet, cal equilibrar el triangle de les tensions. Aleshores

$$P = gs = T_0 \tan\alpha = T_0 y'.$$

Tot rau, doncs, a *resoldre* aquesta mena d'equacions que lliguen una corba $y = f(x)$ amb la seva derivada $y'(x)$. En el cas de la catenària s'obté, en

12 Va néixer a Reus el dia 25 de juny de 1852 i va morir a Barcelona el dia 7 de juny de 1926, a l'edat de gairebé setanta-quatre anys.

13 El nom de *catenària* prové de la paraula italiana que fa servir Galileo per definir-la: *catena*.

14 Galilei, G. [62]. Tanmateix, a la pàgina 441, ho matisa quan diu: «s'assembla molt a una paràbola».

Val la pena recordar que Galileo també va ser el primer matemàtic que va estudiar la *cicloide* i fins i tot la va suggerir com «una corba admirable per ser adaptada» als arcs d'un pont que s'havia de construir sobre el riu Arno. (Galilei, G. [63, XIII, p. 153–154].) També afirma que la seva superfície «és igual a tres vegades la superfície de la circumferència que la genera» (Vegeu Pla, J. [158].) El problema de l'estudi de la cicloide el plantejà Marin Mersenne (1588–1648) l'any 1615 a la comunitat matemàtica del segle XVII.

El primer matemàtic que l'estudià a bastament fou Gilles Personne de Roberval (**1602**–1675). (Vegeu Walker, E. [190]). Va néixer el 10 d'agost de 1602, és a dir, acaba de fer quatre-cents anys.

15 La solució detallada es troba a Bernoulli, Jh. [16, p. 491], perquè la de [15] no conté cap mena de demostració. Vegeu, per exemple, Montucla, E. [142, II, p. 468–469].

definitiva, l'equació

$$s = ky', \quad \text{amb} \quad k = \frac{T_0}{g},$$

on $s$ és la longitud de l'arc $AB$ de la catenària. Sabem que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

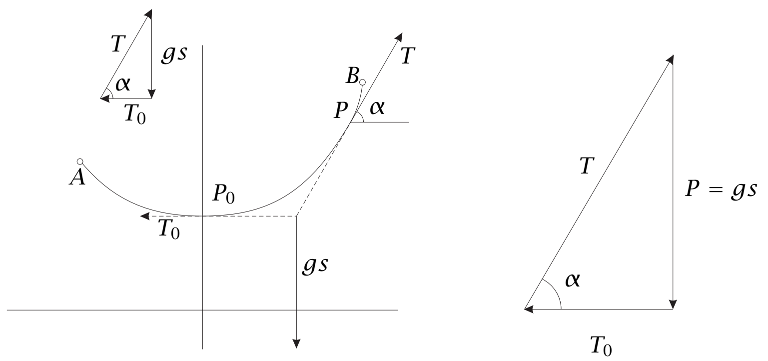



FIGURA 1.

Ara derivem els dos membres, fent $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Obtenim

$$kdp = ds = dx\sqrt{1 + p^2}.$$

Aleshores

$$\frac{x - x_0}{k} = \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}. \tag{1}$$

La dificultat és, doncs, integrar la funció $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.[16]

El llenguatge més adequat per resoldre aquesta mena de problemes —*problemes inversos del problema de les tangents*— en els quals allò que es desconeix és una corba i allò que es coneix és el lligam que hi ha entre la corba i la seva derivada és el *llenguatge diferencial*. Això no obstant, el primer problema d'aquesta mena aparagué amb anterioritat al llenguatge que el podia resoldre.

El dia 5 de març de 1639, un conseller del tribunal de primera instància de Blois, Florimond De Beaune (1601–**1652**)[17] va escriure al pare Mersenne (De Beaune, F. [37, p. 534]):

---

16 Johann Bernoulli procedeix, de fet, de la manera següent: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, i $sdx = kdy$. Per tant, $ds = \sqrt{\frac{k^2}{s^2} + 1}\,dy = \frac{\sqrt{k^2+s^2}}{s}\,dy$. D'aquí es dedueix: $dy = \frac{sds}{\sqrt{k^2+s^2}}$, $y = \sqrt{k^2 + s^2}$, $s = \sqrt{y^2 - k^2}$. Per tant, $dx = \frac{kdy}{s} = \frac{kdy}{\sqrt{y^2-k^2}}$, que correspon a la superfície de la hipèrbola. (Vegeu Bernoulli, Jh. [16, p. 427].)

17 Va morir a Blois el 18 d'agost de 1652, ara ha fet tres-cents cinquanta anys. Havia nascut a la mateixa ciutat, el 7 d'octubre de 1601.

> *No entenc com podríem adquirir un coneixement sòlid de la naturalesa física sense la geometria, i el més excel·lent de la geometria consisteix en l'anàlisi, de manera que sense l'anàlisi la geometria fóra imperfecta.*

Aquest convenciment l'havia posat de manifest en els tres problemes de 1638,[18] el segon dels quals ha esdevingut famós a la història de la matemàtica perquè és el primer problema invers.

> *Trobar la corba $AXE$ de vèrtex $A$ i eix $AYZ$ amb la propietat següent. Havent pres en ella un punt arbitrari $X$ des del qual tirem la perpendicular $XY$ a l'eix de les ordenades, la tangent $GXN$ i la normal $XZ$, ambdues fins que tallen l'eix, aleshores $ZY$ és a $YX$ com un segment donat $AB$ és a la diferència entre $XY$ i $AY$.* (De Beuane, Fl. [36, p. 519].)

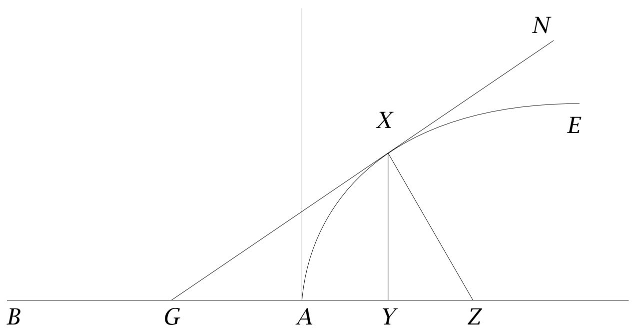



FIGURA 2.

Cerquem, doncs, la corba tal que

$$\frac{ZY}{YX} = \frac{AB}{AY - YZ}.$$

Si, amb el llenguatge que usa Descartes a la *Géométrie*, fem $AY = x, XY = y$, $AB = a, AZ = v$, tindrem

$$\frac{v - x}{y} = \frac{a}{y - x}.$$

La importància d'aquest problema —deixant de banda els esforços de René Descartes (1596–1950) per resoldre'l— (Descartes, R. [39]; vegeu Scriba, C. J. [168, p. 118–120].) queda ben clara en el *primer text imprès* de càlcul diferencial, el «Nova methodus pro maximis et minimis» (1684), de Leibniz [119, p. 14–15]. Segons Leibniz, doncs, la importància del nou càlcul està més que justificada per la utilitat que té quan hom pretén resoldre problemes com els

18 Un comentari a aquestes qüestions el podem trobar a Tannery, P. [177].

que proposa,[19] el segon dels quals és el de De Beaune

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a}.^{20}$$

És un problema senzill, però necessita una tècnica nova, la mateixa tècnica que permet comprendre per què Galileo va confondre la catenària i la paràbola.[21]

De Beaune va plantejar el primer problema de la història del tipus

$$y' = f(x, y).$$

Els matemàtics del tercer terç del segle XVII i de començaments del segle XVIII es van esforçar, usant el càlcul diferencial, a resoldre equacions diferencials de tota mena, moltes de les quals són molt més complicades que no pas les que hem exposat aquí.

L'escola de Leibniz, formada, entre d'altres, per ell mateix, pels germans Bernoulli, Guillaume François Antoine de l'Hospital, marquès de Saint-Mesme i comte d'Autremont (1661–1704), i Leonhard Euler (1707–1783), desenvoluparien una activitat molt important pel que fa a la resolució de les equacions

19 Un altre dels problemes —havia estat motiu de discussió entre René Descartes i Pierre de Fermat (1601–1665)— és la *llei de Snell* de la refracció de la llum, l'enunciat de la qual s'atribueix, molt discutiblement, a Willebrord Snell van Roijen (1581–1626).

20 És clar que $\frac{dx}{dy} = \frac{v-x}{y}$. I Leibniz s'adona que les $y$ estan en progressió aritmètica quan les $x$ estan en progressió geomètrica. I aleshores diu: «per tant, es tracta d'una corba logarítmica». De fet, només cal fer el canvi de variables $Y = a - x + y, X = y$. Aleshores s'obté: $\frac{dY}{dX} = -\frac{Y}{a}$, que és la diferencial de la corba logarítmica.

21 Imaginem que una cadena sense pes sosté una barra pesant, com succeeix en els ponts.

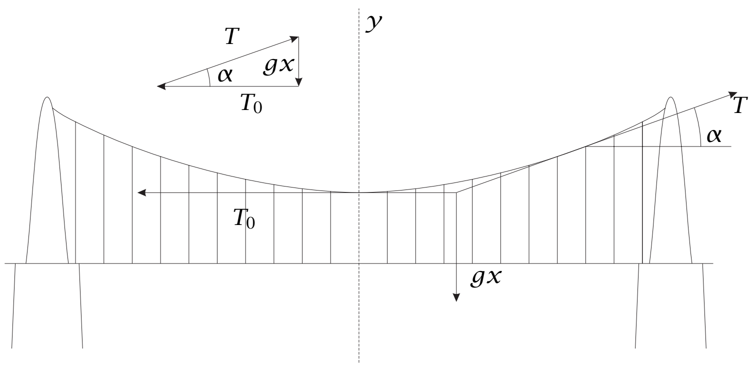



FIGURA 3.

Aleshores tindrem l'equació diferencial $P = gx = T_0 y'$ que, un cop resolta, dóna una paràbola.

La diferència que hi ha entre la paràbola i la catenària prové, doncs, de considerar el pes per unitat d'arc de cadena o per unitat d'abscissa. Les dues corbes, com veurem, s'assemblen molt. Són molt més diferents com més s'allunyen del vèrtex.

diferencials ordinàries.[22] El seu mètode, basat en la idea de *funció*, consistia a avaluar

$$\int f(x)\,dx$$

trobant-li una *primitiva*. És a dir, determinant una funció $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

El concepte de *funció* s'origina en Descartes. Aquest insigne erudit francès restableix la *concepció numèrica* en la geometria, quan diu:

> *Assignem un nom a cada segment rectilini.*[23]

Però l'èxit més notable, en el context que estem comentant, el constitueix la classificació de les corbes en *geomètriques* i *mecàniques*. Les primeres són les que admeten una *relació polinòmica* —és a dir, una descripció totalment matemàtica— de les coordenades $x, y$ dels seus punts. Així, una corba geomètrica està formada pels punts $P := (x, y)$ tals que

$$\sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} a_{ij}x^i y^j = 0, \quad \text{amb } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Les altres corbes són les mecàniques que, segons Descartes, cauen fora de la geometria. (Aquesta limitació serà molt criticada per Leibniz, com podem veure a Leibniz, G. W. [120, p. 20–22].) Els matemàtics de la segona meitat del segle XVII no van fer cas de la limitació imposada per Descartes. La classificació serà represa per Leibniz, que anomenarà les primeres *algèbriques* i les segones *transcendents* perquè «transcendeixen l'àlgebra». (Vegeu Leibniz, G. W. [120, p. 20].) Es feia, doncs, necessària una definició més o menys precisa que permetés aclarir què calia entendre com a *funció* i què en quedava exclòs. La primera definició la donà James Gregory (1631–1675):

> *Una funció és una quantitat que s'obté d'altres quantitats per mitjà d'una successió d'operacions algèbriques o per mitjà de qualsevol altra operació imaginable.*[24]

---

22 Isaac Newton, a les obres de 1669 i 1671 ([143] i [144]), respectivament, va desenvolupar la tècnica d'expressar les funcions per mitjà de sèries de potències. Aleshores la resolució d'una equació diferencial es fa algèbricament usant el *mètode dels coeficients indeterminats*. Vegeu Pla, J. [152] i, molt més específicament, Scriba, C. J. [168, p. 125–130]. Amb aquesta tècnica derivar i integrar era realment molt senzill.

El text de 1669 no fou publicat fins a l'any 1711, i el de 1671 fins després de la seva mort, l'any 1736. Els dos títols posen de manifest el *mètode newtonià*: l'ús de les sèries.

23 Descartes, R. [38], edició catalana de 1999, 17. Per a més detalls consulteu Durán, A. J. [47, p. 43–52], o Pla, J. [159]. Òbviament, aquesta aritmetització de la geometria té antecedents molt notables, entre els quals val la pena remarcar el matemàtic belga Simon Stevin (1548–1620). Vegeu, per exemple, Dhombres, J. [41, p. 129–133].

24 Gregory, J. [80, p. 9, definició 5]. L'operació que cal afegir a les cinc operacions algèbriques és el pas al límit. Vegeu Kline, M. [101], edició castellana de 1992, I, 448–449.

Johann Bernoulli i Leonhard Euler (1707–1783) aprofundiran i consolidaran el concepte de *funció*, el seu estudi i notacions. Així aniran apareixent les *funcions* —o corbes— *transcendents elementals*:

$$\ln x,\ \ e^x,\ \ \sin x,\ \ \cos x,\ \ \arcsin x,\ \ \arccos x.$$

La idea de l'escola de Leibniz era integrar les expressions que sorgien de les equacions diferencials ordinàries usant les *funcions elementals*.[25] És a dir, expressions algèbriques de les funcions anteriors.[26] A més de la integral de (1), en sorgiren de més sofisticades.[27] Així Jakob Bernoulli, l'any 1694, va trobar-se amb la integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \tag{2}$$

i va sospitar que no era integrable per funcions elementals (vegeu Bernoulli, Jk. [13, p. 610–611]).

Una equació diferencial que va sorgir l'any 1724 i que va despertar molta atenció fou l'*equació de Riccati*

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2.$$

---

25 La derivació era força ben coneguda i simple de realitzar. En canvi, la integració s'anava complicant cada cop més. L'any 1702, G. W. Leibniz i Jh. Bernoulli van publicar independentment sengles monografies en les quals intentaven integrar, amb quadratures elementals, les integrals de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, on $P(X)$ i $Q(X)$ són polinomis amb els coeficients reals. Les integrals de la forma $\int \frac{dx}{x-\alpha}$, $\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2}$ no presentaven cap dificultat i es reduïen a logaritmes. Les integrals de la forma $\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ donaven logaritmes complexos o la funció arc sinus (Bernoulli, Jh. [17], traducció anglesa de 1987, 437–438). Però, per a Leibniz, la dificultat sorgia quan intentava integrar $\int \frac{dx}{x^4+\alpha^4}$, que, segons diu, «no es pot reduir ni a la quadratura del cercle ni a la quadratura de la hipèrbola [...]. Espero que serem capaços d'establir els problemes que corresponen a les integrals $\int \frac{dx}{x^4+\alpha^4}$, $\int \frac{dx}{x^8+\alpha^8}$, etcètera» (Leibniz, G. W. [124], edició francesa de 1989, 399–400). Reclama, doncs, la necessitat de funcions noves per a aquestes integrals, i s'equivoca perquè, com diu «l'expressió $x^4+\alpha^4 = (x^2+i\alpha^2)(x^2-i\alpha^2) = (x+\alpha\sqrt{i})(x-\alpha\sqrt{i})(x+\alpha\sqrt{-i})(x-\alpha\sqrt{-i})$ i, composem com composem aquestes quatre arrels, no aconseguim mai que donin una quantitat real, és a dir, un divisor real del pla» (Leibniz, G. W. [124], edició francesa de 1989, 399). És curiós observar que no s'adoni del fet que

$$x^4+\alpha^4 = (x^2-\alpha\sqrt{2}\,x+\alpha^2)(x^2+\alpha\sqrt{2}\,x+\alpha^2).$$

És a dir, no té clar que valgui el teorema fonamental de l'àlgebra. (Vegeu Pla, J. [154, p. 887–893].)

26 Albert Dou [45, p. 15 i 83] estableix una diferència entre funcions elementals i funcions elementals en sentit ampli.

27 El matemàtic francès Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet (1743–1794) s'adonà que certes funcions transcendents, com ara $\frac{e^x}{x}$, no eren integrables (vegeu Gilain, C. [73, p. 108]).

No ha estat fins ben recentment que no s'ha pogut aclarir quines funcions algèbriques són integrables. Per exemple, $\sqrt{1+x^3}$ i $\frac{1}{x^5-x-A}$, amb $A$ indeterminat, no són integrables (Davenport, J. H. [35, p. 97]).

La introduí Jacopo Francesco, comte de Riccati di Venezzia (1676–1754) (Riccati, J. F. [164]),[28] que la va trobar en un treball d'acústica quan mirava de reduir una equació diferencial de segon ordre.[29]

L'equació de Riccati té la particularitat que, si té una solució particular $y_1 = y_1(x)$, es pot reduir a una equació lineal i aleshores la seva integral s'aconsegueix per quadratures.[30] Ara bé, l'any 1839 Joseph Liouville (1809–1882) va establir un teorema segons el qual:

> *Si l'equació diferencial*
> $$u' + u^2 = f(x),^{31}$$
> *on $f(x)$ és una funció elemental en sentit ampli, admet una integral particular que sigui també una funció elemental en sentit ampli, aleshores admet una integral particular que és algèbrica.*[32]

---

28 De fet, Riccati estudia les corbes en les quals el radi de curvatura depèn solament de l'ordenada, i obté l'equació diferencial de segon ordre

$$x^m \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right).$$

Fa un canvi de variable adequat per tal que l'equació diferencial anterior es converteixi en la de primer ordre

$$x^m \frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q}.$$

Suposa aleshores que $q$ és potència de $x$ —per exemple, $q = x^n$— i així arriba a l'equació diferencial

$$\frac{du}{dx} + \frac{u^2}{x^n} = nx^{m+n-1}.$$

29 L'any 1760 Euler n'aprofundí l'estudi i Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) en féu l'anàlisi completa i li donà el nom que actualment té. Vegeu Kline, M. [101], edició castellana de 1992, II, 641–643.

30 Les equacions diferencials ordinàries lineals de primer ordre són fàcilment integrables, com va veure Leibniz en 1694 (Aiton, E. J. [7], edició castellana de 1992, 280–281).
Per a un estudi complet de l'equació de Riccati vegeu, per exemple, Dou, A. [45, p. 12–19].

31 Tota equació de Riccati, amb $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ funcions elementals en sentit ampli, es pot reduir a una equació d'aquesta forma.

32 Liouville, J. [132] i [134]. La tasca de Liouville en aquesta qüestió fou molt extensa (Lützen, J. [139, § IX, p. 352–422]). Abans ja havia preocupat Abel, com podem veure a Abel, N. H. [5].

Una funció $y(x)$ és *algèbrica* quan està definida per $P(x,y) = 0$, on $P(x,y)$ és un polinomi de dues variables amb coeficients reals. Direm que $y = y(x)$ és *elemental en sentit ampli* quan és possible generar-la usant funcions algèbriques dels operadors

$$e^{(\ )},\ \ln(\ ),\ (\ )^{\alpha},\ \text{amb } \alpha \in \mathbb{C},\ \frac{d}{dx}(\ ),\ \text{i } \int (\ )dx,$$

aplicats a funcions algèbriques de $x$ un nombre finit de vegades. Totes són funcions analítiques de la variable $x$ (tant si és real com si és complexa), i estan definides en tot el domini de $x$, llevat d'un nombre finit de punts singulars.

Si eliminem el darrer operador —és a dir, l'operador integral— obtenim les funcions *elementals.*

Aleshores Liouville ho aplica a l'equació

$$y' + y^2 = 1 + \frac{s(s+1)}{x^2},^{33}$$

i observa que, si l'equació té una funció algèbrica, aleshores $s$ ha de ser necessàriament un nombre enter. Per tant, en general, l'equació diferencial de Riccati no és integrable per funcions elementals, encara que siguin elementals en sentit ampli.

Aquesta mena de situacions féu que els matemàtics es plantegessin preguntes que van molt més enllà de la simple resolució d'un problema. Són preguntes que posen damunt la taula qüestions matemàtiques molt més generals, més en la línia de la *teoria del coneixement de la matemàtica* o de la seva *filosofia* que no pas en la línia *operativocalculística*. Les paraules del professor Albert Dou ho posen de manifest:

> *Integrar una equació diferencial consisteix, per definició, a determinar en termes finits les funcions $y(x)$ per mitjà de funcions ja conegudes —incloses les quadratures— que no depenguin, però, d'una equació diferencial i, si en depenen, que siguin equacions diferencials que prèviament hagin estat resoltes. Hi ha poques equacions diferencials que puguin integrar-se d'aquesta manera. Quan aquesta integració sigui impossible, s'haurà de resoldre el problema que en cada cas plantegi l'equació diferencial, estudiant-la directament. ([45, p. 2].)*
>
> *[...] La primera i més important de les propietats d'una solució és la seva existència. Els criteris per decidir l'existència de solucions d'una equació diferencial els proporcionen els teoremes d'existència. ([45, p. 20].)*

Sorgeix, doncs, la qüestió:

> *Donada una equació diferencial ordinària del tipus*
>
> $$y' = f(x, y),$$
>
> *podem saber d'antuvi si té solucions, és a dir, si hi ha funcions $y = y(x)$, derivables, que satisfacin l'equació diferencial? Cal imposar alguna mena de restricció a la funció $f(x, y)$ per poder donar una resposta afirmativa? I, en cas que hi hagi solució, és única?*

Per poder respondre aquesta mena de preguntes —i fins i tot per poder-se-les plantejar— cal que l'anàlisi matemàtica hagi madurat força. Cal esperar l'època de Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Cal situar-se, doncs, al segon terç del segle XIX.

---

33 És una equació important perquè, amb el canvi $z = ix, u = z^{-\frac{1}{2}} e^{\int y dx}, p = s + \frac{1}{2}$, es transforma en l'*equació de Bessel*: $\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + (1 - \frac{1-p^2}{z^2})u = 0$. Vegeu Dou, A. [45, p. 19].

Una resposta a aquesta qüestió la donà el matemàtic alemany Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–**1903**).[34] Va establir una condició suficient per a funcions de variable real.[35] Diu (Lipschitz, R. O. S. [138]):[36]

> *Sigui $K > 0$ una constant, la funció $f(x, y)$, definida en un domini $D$, satisfà, per a tot $x, y, y_1$ tals que $(x, y)$ i $(x, y_1)$ pertanyin a $D$,*
>
> $$|f(x, y) - f(x, y_1)| \leq K|y - y_1|.$$

Actualment, aquesta condició rep el nom de *condició de Lipschitz* de la funció $f(x, y)$, respecte de la variable $y$, per a la constant $K$.

Amb aquesta condició —més feble que no pas la de Cauchy— establí el teorema següent (Hurewicz, W. [88], edició castellana de 1966, 9–12):[37]

> *Sigui $f(x, y)$ una funció contínua que satisfaci la condició de Lipschitz respecte de la variable $y$ en un domini $D$, i sigui $(x_0, y_0) \in D$ un punt arbitrari. Existeix una solució exacta de $y' = f(x, y)$ en $|x - x_0| \leq h$, on $h$ es pot precisar, tal que $y_0 = y(x_0)$. A més, aquesta mena de solucions és única. És a dir, si $\overline{y}(x)$ és una altra solució exacta de $y' = f(x, y)$ a l'interval $|x - x_0| \leq h$ tal que $y_0 = \overline{y}(x_0)$, aleshores, per a tot $x$ tal que $|x - x_0| \leq h$, $y(x) = \overline{y}(x)$.*

El contingut d'aquest teorema planteja una qüestió molt important tant matemàticament com epistemològicament:

> *Existeix una solució, però és calculable efectivament?*

---

34 Va morir a Bonn, el 7 d'octubre, aviat farà cent anys. Havia nascut a Könisberg, el 14 de maig de 1832.

35 Aquesta mena de qüestions ja havien estat desenvolupades per Cauchy, que en féu una exposició a l'École Polytechnique de París l'any 1824. El mètode, que ja havia estat intuït per Euler, imposava que les funcions $f(x, y)$ i $f_y(x, y)$ fossin contínues en el rectangle $[x, x_0] \times [y, y_0]$. Vegeu Grattann-Guinness, I. [79, p. 397–398], i també Kline, M. [101], edició castellana de 1992, II, 946–947.

36 Vegeu, per exemple, Hurewicz, W. [88], edició castellana de 1966, 6.

Encara recordo, malgrat els anys que han passat, les classes que el professor Joan Augé (1919–1973) ens va fer sobre aquestes qüestions, basant-se en aquest text.

37 La unicitat pot fallar si no es compleix la condició de Lipschitz. Per exemple, en l'equació diferencial $y' = y^{\frac{1}{3}}$, la funció $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ és contínua a $(0, 0)$. Tanmateix té dues solucions diferents que passen per aquest punt:

$$y = 0 \quad \text{i} \quad y = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}, & \text{per a } x \geq 0, \\ 0, & \text{per a } x \leq 0. \end{cases}$$

La funció $f(x, y)$ no satisfà la condició de Lipschitz atès que, si fem $y_1 = \delta$ i $y_2 = -\delta$,

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| = \frac{1}{\delta^{\frac{2}{3}}},$$

que no està afitat quan $\delta$ és petit.

La resposta, que comporta molts maldecaps, és que, en matemàtiques, és possible que una equació diferencial tingui solució però que, en canvi, no sigui calculable de manera exacta, efectiva i tancada. Això fa que no puguem treure propietats del coneixement de la solució. En aquest cas, les hem de deduir del coneixement de la naturalesa i de les característiques de l'equació diferencial.

Això no obstant obre una altra porta. Quan calen solucions numèriques, perquè són necessàries per a una aplicació concreta, cal recórrer a les *solucions aproximades*. Avui és, precisament, el *coneixement* dels *llenguatges de programació* i de la *tècnica per elaborar programes adequats* el que permet d'aconseguir aproximacions més i més acurades. Aquesta mena de coneixements i de tècniques constitueixen una part important de la feina dels informàtics de sistemes.

Com ja hem dit, l'equació diferencial de la catenària és integrable per funcions elementals perquè és reductible a l'àrea d'una hipèrbola, és a dir, és un logaritme.

Això no obstant, l'any 1770, Johann Heinrich Lambert (1728–1777) féu servir un mètode molt fructífer en matemàtiques —l'*analogia*— per introduir unes funcions noves (Lambert, J. H. [111]).[38] S'adonà que, en el cas de la circumferència de centre $O$ i radi $OA = 1$, les coordenades d'un punt arbitrari $P := (u, v)$ compleixen la condició $u^2 + v^2 = 1$.

Si fem $t = \widehat{AOP}$, tenim

$$u = \cos t, \quad v = \sin t,$$

la superfície del sector circular $AOP$ val $\frac{t}{2}$ [i la longitud de l'arc $AP$ és $t$].

A més,

$$t = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin v\,.$$

Segons la *identitat d'Euler*, $e^{it} = \cos t + i \sin t$,[39] resulta que

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}), \quad \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}).$$

38 Aquesta mena d'integrals i funcions havien estat descobertes ja, l'any 1759, per Daviet François de Foncenex (1734–1799), com podem constatar a Foncenex, D. F. de [61]. Sembla que l'any 1757, Vicenzo, comte de Riccati (1707–1775), havia suggerit usar l'analogia existent entre les equacions $u^2 + v^2 = 1$ i $u^2 - v^2 = 1$ per introduir unes noves funcions trigonomètriques.

39 L'any 1714, Roger Cotes (1682–1716) va establir un teorema sobre nombres complexos que, en la notació actual, establia que $i\Phi = \ln(\cos\Phi + i \sin\Phi)$. El retrobaria Euler l'any 1740. En una carta a Johann Bernoulli del 18 d'octubre diu que $y = 2\cos x$, i $y = e^{ix} + e^{-ix}$. Per tant, havien de ser iguals. Ho publicaria l'any 1743 (Euler, L. [54, p. 142]), en la forma

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}), \quad \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}).$$

Òbviament, implica la fórmula de Cotes.

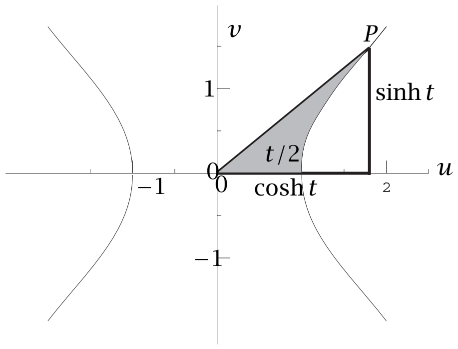



FIGURA 4.

Aleshores, *per analogia*, va considerar la hipèrbola equilàtera $u^2 - v^2 = 1$. En aquesta hipèrbola, les coordenades $u, v$ d'un punt $P := (u, v)$ tal que la superfície del segment d'hipèrbola $OAP$ era igual a $\frac{t}{2}$, les va anomenar

$$u = \cosh t, \quad v = \sinh t.$$

S'adonà que

$$t = \text{arccos h}u = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right),$$

$$t = \text{arcsin h}v = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 + 1}\right).$$[40]

Amb aquestes funcions podem retornar a la integració de la catenària, i obtenim

$$\frac{x - x_0}{k} = \text{arcsinh}\ p.$$

Per tant,

$$p = \sinh \frac{x - x_0}{k}.$$

40 Avui faríem $\sqrt{x^2 - 1} = x + z$ i, després de fer els canvis necessaris, integraríem respecte de la variable $z$.

Johann Heinrich Lambert, en canvi, calcula les àrees. Siguin $V$ i $W$, respectivament, els peus de les perpendiculars del punt $P := (u, v)$ a l'eix de les abscisses i a l'eix de les ordenades, i $A$ el vèrtex $(1, 0)$ de la hipèrbola $u^2 - v^2 = 1$. Aleshores

$$\begin{aligned} \text{Àrea } AVP &= \int_1^u \sqrt{x^2 - 1}\ dx &= \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), \\ \text{Àrea } OAPW &= \int_1^v \sqrt{y^2 + 1}\ dy &= \frac{1}{2}v\sqrt{v^2 + 1} - \frac{1}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

L'àrea $\frac{t}{2} = OAP$ es pot calcular de dues maneres diferents: $OAP = OVP - AVP$, $OAP = OAPW - OPW$. La primera igualtat es tradueix en $t = \text{arccosh}\ u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$ i la segona, en $t = \text{arcsinh}\ v = \ln\left(v + \sqrt{v^2 + 1}\right)$.

Finalment,

$$y = K + k\cosh\frac{x - x_0}{k},$$

que és l'*equació de la catenària*.

Lambert —que treballà solament amb valors reals— s'adonà del fet que

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$[41]

Tot això permet adonar-se de la semblança que hi ha entre una catenària i una paràbola, i entendre una mica més per què Galileo les va confondre.[42]

41 El seu càlcul és molt original, atès que evita el camp complex. Considera el sector hiperbòlic

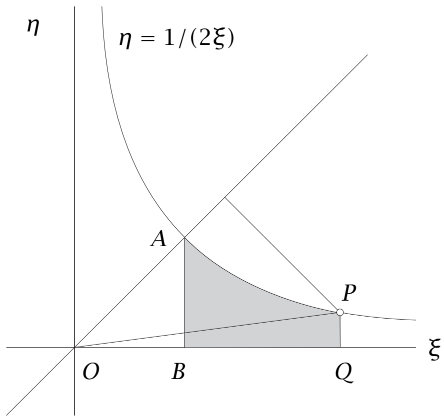



FIGURA 5.

$OAP$ de dues maneres diferents, segons que la hipèrbola estigui en la forma $u^2 - v^2 = 1$ o en la forma $2\xi\eta = 1$. En aquest segon cas, les àrees dels triangles $OAB$ i $OPQ$, on $Q$ és el peu de la perpendicular del punt $P$ a l'eix de les abscisses, són iguals. Per tant, les àrees de les figures $OAPO$ i $ABQPA$, on $B$ és el peu de la perpendicular del vèrtex $A$ a l'eix de les abscisses, també ho són. Agafem $\xi = OQ = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Les àrees valen $\frac{1}{2}\ln a$, però volem que valguin $\frac{t}{2}$. Atès que

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta, \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta,$$

resulta que

$$u = \cosh t = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right).$$

Anàlogament $v = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

42 Si desenvolupem en sèrie de potències la funció $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, tindrem la sèrie

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots,$$

i quan $t$ sigui petit, podem negligir els termes d'ordre superior al segon, molt més petits encara. Obtenim aleshores $\simeq 1 + \frac{t^2}{2!}$, que és una paràbola.

Sabem que, amb les funcions inverses de les funcions trigonomètriques circulars i hiperbòliques —és a dir, amb les funcions $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arcsinh} x$ i $\operatorname{arccosh} x$—, *és possible integrar qualsevol* integral de la forma

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$$

on $R(x,y)$ és una funció racional, és a dir, una funció de la forma

$$R(x,y) = \frac{P_1(x)+P_2(x)y}{Q_1(x)+Q_2(x)y},$$

on les funcions $P_i(x), Q_i(x), i = 1,2$, són polinomis en $x$. (Euler, L. [57, § 88]. Per a una exposició més actual, vegeu Puig Adam, P. [160], 7a edició, de 1964, 61–66.)

## 3 On apareixen les integrals i les funcions el·líptiques

Ja hem vist que un mètode molt fructífer és el de l'analogia. Encara ho és molt més el que consisteix a aplicar l'*analogia per generalització* a resultats obtinguts en qüestions simples.

Aquesta metodologia portà Adrien-Marie Legendre (**1752**–1833),[43] l'any 1793, a generalitzar la integral anterior

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)\, dx,$$

on ara el polinomi $P(x)$ és de tercer o quart grau. És a dir,

$$P(x) = bx^3+cx^2+dx+e \quad \text{o} \quad P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e.$$

Parteix, doncs, de la integral general

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}\, dx,$$

on $Q(x)$ és una funció racional i $R(x)$ és un polinomi de quart grau sense termes senars, és a dir, de la forma $Ax^4+Bx^2+C$.[44] Aleshores Legendre descompon $Q(x)$ en elements simples de la forma $x^m$, amb $m \in \mathbb{Z}$, i $\frac{1}{(1+nx)^p}$, amb $p$ enter $\geq 1$. Calcula la diferencial

$$d\left(\frac{x^m}{\sqrt{R(x)}}\right)$$

43 Adrien-Marie Legendre va néixer a París el 18 de setembre de 1752, i hi va morir el 9 de gener de 1833.

44 De fet, mitjançant un canvi de variables adequat, la integral $\int R(x, \sqrt{bx^3+cx^2+dx+e})dx$ es pot transformar en $\int R(z, \sqrt{a'z^4+b'z^3+c'z^2+d'z+e'}\,)\,dz$. Només cal fer $x = \frac{1}{z}$ i $dx = -\frac{dz}{z^2}$. Per tant, és suficient analitzar el cas $\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\,)\,dx$. A més, mitjançant transformacions racionals, és possible aconseguir que $b = d = 0$. (Vegeu, per exemple, Puig Adam, P. [160], edició de 1964, 66–67.)

i observa que les integrals $\int \frac{x^2}{\sqrt{R(x)}}\,dx$ són sumes d'una expressió algèbrica i d'integrals del mateix tipus, però amb $-1 \leq m \leq 2$. Després d'una anàlisi semblant dels termes de la forma $\frac{1}{(1+nx)^p}$, obté

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = V(x) + \int (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum_i N_i \frac{dx}{(1+n_i x)\sqrt{R(x)}},$$

on $V(x)$ és una funció algèbrica, i $\alpha, \beta, \gamma$, i els $n_i$ són constants.[45] Aleshores aquesta expressió la transforma fent que $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ sigui igual a $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, amb $0 < k < 1$. L'expressió $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ l'anomena $\Delta(k,\varphi)$, i obté

$$\int Q(\sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)} = V(\sin^2\varphi) + \int (\alpha + \gamma\sin^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)} + \sum_i N_i \frac{d\varphi}{(1+n_i\sin^2\varphi)\Delta(k,\varphi)}.$$

(Legendre, A.-M. [114].) En definitiva, el problema anterior es redueix a tres menes d'integrals diferents:

Integral el·líptica de 1a espècie: $F(k,\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}$, (Període del pèndol)

Integral el·líptica de 2a espècie: $E(k,\Phi) = \int_0^\Phi \Delta(k,\varphi)\,d\varphi$, (Longitud d'un arc d'el·lipse)

Integral el·líptica de 3a espècie: $\Pi(n,k,\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta(k,\varphi)}$,

on $0 < k < 1$ i $n$ són arbitraris. L'angle $\Phi$ l'anomena *amplitud*, el nombre $k$, *mòdul*, i el nombre $n$, *paràmetre*.[46]

Els valors de les integrals en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ es repeteixen, però, en ordre invers. I, en particular, quan $\Phi = \frac{\pi}{2}$, s'obtenen les *integrals completes* $K(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), E(k) = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, i $\Pi(n,k) = \Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right)$.[47]

45 Les integrals de la forma $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ es redueixen a integrals racionals quadràtiques i, per tant, integrables per funcions elementals. Les integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ i $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}}$ donen, respectivament, les formes de primera i segona espècie. (Vegeu, per exemple, Puig Adam, P. [160], edició de 1964, 68 i 70–71.)

46 Atès que $0 < k < 1$, fem $k = \sin\alpha$. Aleshores $\Delta(k,\varphi)$ es transforma en $\Delta(\alpha,\varphi) = \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}$. Substituint-ho en cada una de les integrals anteriors s'obtenen les *formes de Jacobi*, $F(\alpha,\Phi), E(\alpha,\Phi)$, i $\Pi(n,\alpha,\Phi)$.

Quan no hi ha perill d'ambigüitat hom suprimeix el mòdul $k$, o l'angle $\alpha$.

47 Les dues primeres només depenen de $k$, i la tercera de $k$ i de $n$. Tanmateix, quan no hi ha perill d'ambigüitat, les integrals s'anomenen simplement $K, E, \Pi$.

Aquestes integrals havien aparegut ja alguns anys abans en problemes que menaven a la resolució de certes equacions diferencials. (El lector interessat a aprofundir aquests resultats pot consultar Pla, J. [155, p. 50–55]; Kline, M. [101], edició castellana de 1992, II, 550–557, Stilwell, J. [172, p. 155–159] i sobretot Houzel, C. [87].) Entre d'altres problemes estan lligades a la determinació de la longitud d'un arc de la *lemniscata de Bernoulli* (vegeu Bernoulli, Jk. [12]),[48] de la longitud d'un arc d'el·lipse[49] i del període d'oscil·lació del pèndol. [50]

---

48 Amb coordenades cartesianes, la lemniscata de Bernoulli s'expressa $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ i, en polars, $\rho^2 = \cos 2\theta$. El càlcul de $ds$ d'un arc de lemniscata mena a

$$ds = \sqrt{(\rho\, d\theta)^2 + d\rho^2} = \frac{d\theta}{\rho}.$$

Per tant,

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\rho} = 4\int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

49 John Wallis havia intentat rectificar un arc de l'el·lipse que, amb coordenades cartesianes, s'expressa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, amb $a > b$. Havia obtingut

$$ds = \sqrt{\frac{a^2 - ex^2}{a^2 - x^2}}\, dx,$$

amb $e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. La integral se li resistí des de 1655 fins que trobà la manera de donar-la en sèrie de potències. (Vegeu Wallis, J. [194, p. 385].)

La calcularia, anys més tard, Isaac Newton [144], edició anglesa de 1967–1981, III, 326–327, fent servir el mètode del desenvolupament amb sèries de potències.

De fet, si l'el·lipse s'expressa en coordenades paramètriques $x = a\sin\varphi$, $y = b\cos\varphi$, resulta que

$$s = \int_0^{\Phi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\Phi} \Delta(k,\varphi)\, d\varphi = aE(k,\Phi),$$

on $k = e = \frac{a^2-b^2}{a^2} < 1$.

50 Com és ben sabut el càlcul del període del pèndol té història. Vegeu Pla, J. [153, p. 66]. La determinació del període del pèndol l'obtingué Huygens.

Podem calcular-lo de la manera següent. L'energia cinètica és $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ i el treball absorbit en anar de l'amplada $\alpha$ a l'amplada $\theta$ és $mg(\cos\theta - \cos\alpha)$. Per tant,

$$\frac{1}{2}\ell d\theta^2 = g(\cos\theta - \cos\alpha) = 2g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) dt^2.$$

Aleshores

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \frac{d\theta}{2}.$$

Si fem $\frac{d\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$ i $\sin\varphi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 1$, resulta que $\frac{\theta}{2} = \arcsin(k\sin\varphi)$. Resulta: $\frac{d\theta}{2} = k\cos\varphi\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}$. Ara substituïm en $dt$ i finalment tenim que

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\, F(k,\varphi).$$

Curiosament, aquesta expressió permet adonar-nos que, per a oscil·lacions petites, el pèndol és *isocron*, tal com creia Galileo. És curiós que sigui precisament, com en el cas de la catenària, la resolució de l'equació diferencial la que permeti veure en què i per què es va equivocar Galileo.

Com ja hem indicat abans, Jakob Bernoulli ja havia sospitat que la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

no era elemental. Ho provaria, no obstant això, Joseph Liouville, l'any 1833, en un treball en el qual mostrava una classe àmplia d'integrals que no són elementals (Liouville, J. [130] i Kasper, T. [97].). Això feia necessari donar els valors d'aquestes integrals per mitjà de taules. Tal com recorda Élie de Beaumont a l'«Éloge historique de Adrien Marie Legendre» [10], davant l'Acadèmia de Ciències de París:

> *Euler va pensar que, en lloc de limitar-se al cercle, hom podia considerar d'altres corbes de segon grau, particularment l'el·lipse i la hipèrbola, i fer amb elles taules anàlogues a les taules de logaritmes i de les funcions circulars [...] Ningú excepte Legendre va fer cap esforç per dur-ho a bon fi...*

Aquestes taules ja les havia elaborat Legendre. (Vegeu l'obra de Legendre [117].) Així doncs, en 1827, Legendre està plenament convençut que l'estudi de les *integrals el·líptiques* és complet. És precisament aleshores, el 5 d'agost de 1827, quan rep la carta del jove matemàtic Carl Gustav Jacob Jacobi en la qual li diu que «pels treballs que ha fet i com a tribut just a l'admiració que per ell sent i en agraïment, li vol oferir tot el que segueix», i li exposa els seus resultats.[51]

El fet d'estudiar les integrals el·líptiques —Legendre les anomena *funcions el·líptiques*— fa que la comprensió sigui molt fosca i, molt més encara, si el recorregut de la variable es limita al camp real. Una manera de comprendre el que dic, utilitzant el *mètode de l'analogia*, és considerar casos més senzills, com ara la integral

$$u = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{3}$$

Suposem que volem que

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{4}$$

La qüestió que es planteja és:

> *Com ha de ser $z$ en l'equació (4), en funció de $x$ i de $y$?*

La resposta estableix que

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

51 La resposta de Legendre és lloable: «Encara que lamento que aquest descobriment se m'hagi escapat, tanmateix he experimentat una gran alegria al veure que s'ha aconseguit un perfeccionament tan notable d'aquesta teoria tan bonica de la qual em puc considerar el creador i que he cultivat gairebé tot sol durant més de quaranta anys.»

Ara bé, és lícit que ens preguntem quin és el significat d'aquesta relació algèbrica entre les variables $x, y$ i $z$. Si *invertim*,[52] tindrem

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x \text{ i } v = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin y$$

que impliquen, respectivament, $x = \sin u$ i $y = \sin v$. Aleshores, atenent la igualtat (4), resulta que $u + v = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin z$. Per tant,

$$z = \sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

que és una relació molt més clara i entenedora.[53] Aquesta igualtat és la *fórmula d'addició* de les funcions trigonomètriques.

En el cas de les integrals el·líptiques la *fórmula d'addició* fou copsada per un matemàtic aficionat, el comte Giulio Carlo de'Toschi de Fangano (1628–1714), i establerta de forma general per Euler.[54] El primer matemàtic que va tenir la idea d'invertir les integrals el·líptiques va ser Carl Friedrich Gauss (1777–1855), pels volts del 1795, però mai no va publicar els resultats obtinguts. Tanmateix sabem que va invertir la integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}},$$

i la integral (2) que correspon a la rectificació de la lemniscata de Bernoulli. Així va obtenir la funció *sinus de lemniscata* $x = s\ell(u)$, on $u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. S'adonà que, igual que la funció sinus, era periòdica de període

$$2\varpi = 4\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Però la seva intuïció i genialitat el portà encara més lluny, en adonar-se que acceptava valors complexos. Fent la substitució de $t$ per $it$, obtingué

$$\int \frac{d(it)}{\sqrt{1-(it)^4}} = i\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Així doncs $x = s\ell(iu) = is\ell(u)$. En resultava que $s\ell(u)$ tenia un segon període $2i\varpi$. D'aquesta manera Gauss s'adonà d'un dels fets clau de les funcions el·líptiques: la *doble periodicitat*, però, en no fer-ne una anàlisi més completa, no en tragué tot el fruit que en podia haver aconseguit. (Vegeu [68].)[55]

52 Com deia Jacobi, «sempre hem d'invertir». En aquest context invertir significa que, en la integral (3), considerem $x$ en funció de $u$ en lloc de considerar $u$ com una funció de $x$. És a dir, en lloc de considerar $u = \arcsin x$, considerem $x = \sin u$.

53 La coneixem des de la secundària.

54 Els treballs que Fangano va iniciar l'any 1714 van trobar ressò en Euler, que hi va treballar a partir del 1750. (Pla, J. [155, p. 52–53].)

55 Això no obstant, Gauss no aprofundí aquestes recerques i, deixant de banda el lligam entre

El pas més notable el van donar dos joves matemàtics del segle IX, quan Legendre tenia més de setanta anys. Eren el noruec Niels Henrik Abel (**1802**–1829) i Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). La publicació dels seus resultats tingué lloc els anys 1826 i 1827, però Abel els havia desenvolupat l'any 1823.[56] La idea motriu de l'obra d'aquests dos matemàtics fou *invertir* les integrals de Legendre, procedint *per analogia* amb la relació existent entre les funcions $u = \arcsin x$ i $x = \sin u$.

Per exemple, la integral

$$u = F(k, \Phi) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta(k,\Phi)}, \quad \text{amb} \quad x = \sin\Phi$$

la invertim, posant $\Phi$ en funció de $u$ (amb el mòdul $k$ fix). S'obté

$$\Phi = am\, u \quad (\text{amplitud de } u).^{57}$$

Aleshores, amb la notació de Jacobi de 1829 [94], simplificada per Christophe Gudermann (1798–**1852**) en la forma $x = sn\ u$, etc., s'obté

$$\begin{aligned} x = \sin\Phi &= \sin am\, u = &&= sn\ u \quad (\text{sinus amplitud de } u),\\ \cos\Phi &= \cos am\, u = &&= cn\ u \quad (\text{cosinus amplitud de } u),\\ \Delta\Phi &= \Delta\, am\, u = \sqrt{1-k^2\sin^2\Phi} &&= dn\ u \quad (\text{delta amplitud de } u). \end{aligned}$$

És fàcil veure que

$$sn^2\, u + cn^2\, u = 1, \;\; dn^2\, u + k^2\, sn^2\, u = 1,$$

i calcular-ne les derivades.[58] A més, si canviem $\Phi$ per $-\Phi$, $u$ canvia de signe. Per tant,

$$am(-u) = -am\ u, \;\; sn(-u) = -sn\ u, \;\; cn(-u) = cn\ u, \;\; dn(-u) = dn\ u.$$

$Mag(a, b)$ i les integrals el·líptiques, no en digué res més fins al 1827, l'any en què van aparèixer els resultats d'Abel. Aleshores en va reclamar la prioritat. Així, en una carta del 30 de març de 1828, adreçada a Friedrich Bessel (1784–1846), diu: «Veig que no he estat prou diligent a preparar les investigacions sobre funcions transcendents de què disposo des de 1798 [...] Se m'ha anticipat Abel i m'ha rellevat d'aquesta responsabilitat... ([69, p. 477–478]).» Al final del paràgraf donarem aquest resultat de Gauss.

56 Recordem, encara que sigui de passada, que el treball d'Abel, entregat a l'Acadèmia de Ciències de París, el 30 d'octubre de 1826, perquè fos publicat a la revista de l'Acadèmia, es va perdre, per la mort de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) i per la manca d'interès de Cauchy. Ja mort l'autor, l'Acadèmia el va publicar a les *Mémoires des Savants Etrangers*, 7, 1841, 176–264. Aquesta anècdota recorda moltíssim la que tingué lloc amb el treball que Évariste Galois (1811–1832) va presentar també a l'Acadèmia de Ciències de París per poder participar al *Prix de mathématiques* de 1830 (Pla, J. [156, p. 146–147]).

57 De fet, $\Phi = am\,(k, u)$, però el mòdul $k$ solament es posa quan hi ha perill d'ambigüitat.

58 Les derivades s'aconsegueixen, per exemple, fent

$$\frac{du}{d\Phi} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}} = \frac{1}{dn\ u}.$$

D'on:

$$\frac{d(am\ u)}{du} = dn\ u.$$

Si $K$ és la integral completa de tipus $F$, aleshores $am\ K = \frac{\pi}{2}$, i $am\ (u + 2K) = am\ u + \pi$. A més, les funcions el·líptiques $sn, cn$ i $dn$ són *periòdiques*: les dues primeres tenen període $4K$ i la darrera, període $2K$. És a dir,

$$sn(u \pm 4K) = sn\ u,\ \ cn(u \pm 4K) = cn\ u,\ \ dn(u \pm 2K) = dn\ u.$$

L'altra gran avenç, tant per part d'Abel com de Jacobi, és que les van estendre al camp dels nombres complexos, molt anàlogament a com ho havia intuït Gass. Abel va introduir

$$\sin\theta = i\tan\Phi, \quad \cos\theta = \frac{1}{\cos\Phi}, \quad \Delta(k,\theta) = \frac{\Delta(k',\Phi)}{\cos\Phi},$$

on $\theta = am\ iu$ i $k'$ —el *mòdul complementari*, en la terminologia de Legendre—[59] està definit per la relació $k^2 + k'^2 = 1$. Per tant,

$$sn(k, iu) = i\frac{sn(k', u)}{cn(k', u)} = tn(k', u),$$

$$cn(k, iu) = \frac{1}{cn(k', u)},$$

$$dn(k, iu) = \frac{dn(k', u)}{cn(k', u)}.$$

D'aquest fet en resulta que $sn\ u$ té un segon període, però és imaginari: $2iK'$, on $K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin\varphi}}$, i té pols simples en els punts $iK'$, i $2K + iK'$.[60]

---

Per tant,

$$\frac{d(sn\ u)}{du} = \frac{d(sn\ u)}{d\Phi}\frac{d(am\ u)}{du} = \frac{d(\sin\Phi)}{d\Phi}\frac{d(am\ u)}{du} = cn\ u \cdot dn\ u.$$

Anàlogament, $\frac{d(cn\ u)}{du} = -sn\ u \cdot dn\ u$, i $\frac{d(dn\ u)}{du} = -k^2\, sn\ u \cdot cn\ u$.

59 Legendre [116, I, p. 61] va establir un lligam molt notable entre les dues integrals completes:

$$F(k)E(k') * E(k)F(k') - F(k)F(k') = \frac{\pi}{2}.$$

60 La doble periodicitat les distingeix de les funcions transcendents elementals que, com a molt, són *simplement periòdiques*. Curiosament, els casos $k = 0$ i $k = 1$ s'han exclòs de les funcions el·líptiques perquè són *elementals* i, de retruc, simplement periòdiques. En efecte, si fem $k = 0$, tenim que $u = \int_0^\Phi d\Phi = \Phi$. Per tant, $\Phi = am\,u = u$ i, conseqüentment,

$$x = \sin\Phi = sn\,u = \sin u,\ \ \cos\Phi = cn\,u = \cos u,\ \ dn\,u = 1.$$

És a dir, les funcions el·líptiques $sn\,u, cn\,u$ es converteixen en les funcions trigonomètriques circulars. Per a $k = 1$,

$$u = \int_0^x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^\Phi \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctan} x.$$

Per tant,

$$sn\,u = \sin\Phi = x = \tanh u.$$

Amb aquestes funcions invertides és possible donar la *fórmula additiva* següent. Siguin $u, v \in \mathbb{R}$. Aleshores

$$sn(u+v) = \frac{sn\ u \cdot cn\ v \cdot dn\ v + sn\ v \cdot cn\ u \cdot dn\ u}{1 - k^2\, sn^2 u \cdot cn^2 v},$$

i les anàlogues per a $cn(u+v)$ i $dn(u+v)$. (Vegeu Abel, N. H. [4, p. 268] i Jacobi, C. G. J. [95, p. 199].) Això permet estendre les funcions el·líptiques $sn\ u, cn\ u$ i $dn\ u$ al camp complex. Només cal fer $z = u + iv$ i usar la fórmula additiva.

Abel i Jacobi havien obert una porta nova —tal com havia intuït Gauss—, un camp de recerca molt important i amb molt de futur en el qual, a partir del 1860, treballarien matemàtics de gran anomenada, com ara Joseph Liouville, Karl Weiertrass (1815–1897) i Charles Hermite (1822–1901), per esmentar-ne tres. (Vegeu Kline, M. [101], edició castellana de 1992, II, 857–861.)

És precisament en aquestes recerques on Karl Weierstrass aconsegueix expressar qualsevol integral el·líptica en una de les formes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{4x^3 - g_1 x - g_3}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{4x^3 - g_1 x - g_3}}.$$

I invertint la *integral fonamental*

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

va aconseguir la funció el·líptica coneguda actualment amb el nom de *funció* $\wp$ *de Weierstrass*:

$$x = \wp(u(g_2, g_3)).^{61}$$

És doblement periòdica i fa el paper que feia $sn\ u$ en la teoria d'Abel-Jacobi. És la més senzilla de les funcions el·líptiques doblement periòdiques. Amb $\wp(u)$ i $\wp'(u)$ és possible *parametritzar* qualsevol funció el·líptica.[62] La *trigonometria*

D'on:

$$cn\, u = \sqrt{1 - \tanh^2 u} = \frac{1}{\cosh u}.$$

És a dir, per a $k = 1, sn\, u$ i $cn\, u$ es converteixen en funcions trigonomètriques hiperbòliques.

61 És la solució de l'equació diferencial

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \ \ (g_2, g_3 \text{ constant}).$$

Té un pol en $u = 0$. Weierstrass la va obtenir suposant-la desenvolupada en sèrie, usant la fórmula additiva

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4 \times 5}u^2 + \frac{g_3}{4 \times 7}u^4 + \cdots \quad (g_2, g_3 \text{ complexos}).$$

Per tal d'aconseguir la funció completa, va haver d'utilitzar, com ja havia fet abans Abel, el teorema d'addició per a la funció $\wp(u)$ (Weierstrass, K. [199, p. 23–31]). Si volem que no degeneri en una funció elemental —exponencial o trigonomètrica— cal que el discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ sigui $\neq 0$. És a dir, cal que les tres arrels de la cúbica, reals o complexes, siguin diferents.

62 Per exemple, la corba $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ parametritza amb $x = \wp(u)$ i $y = \wp'(u)$.

de les funcions el·líptiques és molt més senzilla amb la formulació de Weierstrass.[63]

Per acabar esmentem que el teorema additiu s'expressa en la forma

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2 - \wp(u) - \wp(v).$$

Deixem-ho de moment aquí. Tanmateix, les funcions el·líptiques tornaran a aparèixer més endavant.

### Una curiositat de Gauss

En la nota del 30 de maig de 1799, Gauss s'adona que la *mitjana aritmeticogeomètrica* d'1 i $\sqrt{2}$ és igual a $\frac{\pi}{\varpi}$ fins a onze llocs. Aleshores escriu ([70]):

> *La demostració d'aquest fet probablement obrirà un camp d'anàlisi completament nou.*

Per acabar aquest paràgraf, veiem a què fa referència Gauss amb aquesta frase.

Donats dos nombres $a$ i $b$, amb $a \geq b > 0$, definim les dues successions $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per mitjà de

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n), \\ b_0 &= b, & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}. \end{aligned}$$

El límit d'ambdues successions és $\mathrm{Mag}(a,b)$. Bé doncs, $\mathrm{Mag}(1,\sqrt{2}) = \frac{\pi}{\varpi}$. L'únic resultat important que va establir Gauss, en aquest context, va ser donar $\mathrm{Mag}(a,b)$ com una integral el·líptica.

1 LEMA *D'antuvi, com que $a \geq b > 0$, resulta que $a_n \geq b_n$, atès que*

$$\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},$$

*on $a_0 = a$ i $b_0 = b$. Per tant, $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$. És a dir, la successió $\{a_n\}$ és decreixent i està fitada inferiorment per $b$, i la successió $\{b_n\}$ és creixent i fitada superiorment per $a$. Per tant, tenen límit. Aquests límits són iguals, perquè*

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n).$$

El límit $\mathrm{Mag}(a,b)$ s'anomena la *mitjana aritmeticogeomètrica.*

63 Per al càlcul numèric, tanmateix, són molt més útils les funcions de Jacobi i les integrals de Legendre.

2 Lema *És clar que $Mag(a,b) = Mag(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}$, i que, per a tot nombre real $\lambda > 0$, $Mag(\lambda a, \lambda b) = \lambda Mag(a,b)$.*

3 Lema *La convergència de les successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ cap a $Mag(a,b)$ és* geomètrica *i, molt millor encara,* quadràtica. *De fet,*

$$0 \le a_n - b_n \le \frac{1}{2^n}(a-b),$$

*i*

$$0 \le a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{1}{2}\frac{(a_n - b_n)^2}{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} \le \frac{1}{8b}(a_n - b_n)^2.$$

L'any 1816, Gauss va donar la primera demostració de la fórmula següent:

4 Teorema

$$Mag(a,b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Per veure-ho fem la integral de (5) igual a $\mathrm{I}(a,b)$, i provem el lema:

5 Lema *Per a tot $n \in \mathbb{N}$, $I(a_n, b_n) = I(a,b)$.*

En efecte: constatem que la funció $x \mapsto f(x) = \frac{2ax}{(a+b)+(a-b)x^2}$ és creixent en $[0,1]$, amb $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Fem ara el canvi de variables lícit

$$\sin\phi = \frac{2a\sin\phi'}{a+b+(a-b)\sin^2\phi'},$$

i calculem $(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}$ i $\cos\phi\, d\phi$, i substituïm-ho a la integral anterior. Obtenim

$$\mathrm{I}(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+b+(a-b)\sin^2\phi'}\,\frac{\cos\phi'}{\cos\phi} d\phi'. \tag{6}$$

Seguidament calculem

$$\cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi = \frac{\left((a+b)+(a-b)\sin^2\phi'\right)^2 - 4a^2\sin^2\phi'}{\left((a+b)+(a-b)\sin^2\phi'\right)^2}.$$

El numerador val $4(a_1^2\cos^2\phi' + b_1^2\sin^2\phi')\cos\phi'$, atès que

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4a_1^2 - 2b_1^2$, i $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 4a_1^2 - 4b_1^2$.

En definitiva, doncs, $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a_1, b_1)$.

Demostració del teorema La funció $\phi \mapsto (a_n\cos^2\phi + b_n\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}}$ convergeix uniformement quan $n \to \infty$ cap a la constant $\mathrm{Mag}(a,b)^{-1}$. Per tant podem invertir el límit i la integral i obtenim

$$\mathrm{I}(a,b) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{I}(a_n, b_n) = \frac{\pi}{2\mathrm{Mag}(a,b)}.$$

□

Lliguem ara $\varpi$ i $\pi$, tornant a les integrals el·líptiques. Recordem que la longitud del quart d'arc $\mathcal{L}$ de lemniscata del quadrat positiu és

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta.$$

El canvi de variables $\cos 2\theta = \cos^2\phi$ porta a l'expressió

$$\begin{aligned}\frac{\varpi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi\cos\phi}{\cos\phi\sin 2\theta} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\phi\, d\phi}{\sqrt{(1-\cos^2\phi)(1+\cos^2\phi)}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos^2\phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\phi + \sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi = \mathrm{I}(\sqrt{2}, 1).\end{aligned}$$

El perímetre $2\varpi$ de $\mathcal{L}$ és, per tant, igual a $\dfrac{2\pi}{\mathrm{Mag}(\sqrt{2},1)}$. D'aquí la igualtat

$$\frac{\pi}{\varpi} = \mathrm{Mag}(\sqrt{2}, 1).$$[64]

## 4 On apareixen les equacions polinòmiques

Hem vist que, en l'àmbit de les equacions diferencials, hi ha problemes aparentment senzills —per exemple, la rectificació de l'el·lipse— que no admeten integrals elementals. Això obligà els matemàtics a introduir funcions noves, més complexes —les funcions el·líptiques— per tal de poder-los resoldre d'alguna manera.[65] També hem vist que no és possible resoldre totes les equacions diferencials —per exemple, l'equació de Riccati— ni recorrent a les funcions el·líptiques, que són elementals en sentit ampli, segons la classificació d'Albert Dou. Tot això portà els matemàtics a cercar condicions suficients per poder garantir l'existència de les equacions diferencials ordinàries $y' = f(x, y)$.

Hem vist també que treballar amb polinomis de primer i segon grau és força diferent que treballar amb polinomis de tercer i quart grau.

Aquesta mena de situacions és força corrent en matemàtiques i les trobem en un context, aparentment més senzill que no pas el de les equacions dife-

64 El valor aproximat de $\mathrm{Mag}(\sqrt{2}, 1)$ fins a la xifra decimal dinou és

$$\mathrm{Mag}(\sqrt{2}, 1) = 1{,}1981402347355922074\ldots$$

L'any 1937, T. Schneider va establir la transcendència de $\varpi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ i l'any 1941, la de $B = \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^4}}$, que James Stirling (1692–1770) havia aproximat força anys abans: $B = 0{,}59907011736779611\ldots$ (Siegel, C. L. [169]). Més informació sobre la teoria i la història de la $\mathrm{Mag}(a, b)$, a Cox, D. A. [34].

65 Un fet diferent del que plantejava la catenària: no calia introduir cap funció nova per poder-la integrar, atès que la integral era elemental.

rencials, com és l'àmbit de la *resolució de les equacions polinòmiques d'una variable*. Però les retrobem vistes des d'una altra perspectiva.[66]

La humanitat sap resoldre *equacions quadràtiques concretes* i *amb solució real* des de fa molt de temps.[67] A més la solució s'obté fàcilment i algorísmica a partir dels coeficients numèrics. En concret, l'equació quadràtica genèrica

$$aX^2 - 2bX + c = 0 \tag{7}$$

té les solucions

$$x = +b \pm \sqrt{\Delta}, \quad \text{on} \quad \Delta = b^2 - c.$$[68]

És clar que, per tal que l'equació (7) tingui solució, és necessari que $\Delta = b^2 - c \geq 0$. Això, de fet, és conseqüència d'un problema *geomètric* —és a dir, d'un problema *real* i no només numèric— que podem plantejar en els termes següents:

> *Dividir un segment $AB$, de longitud $2b$, en dues parts $AC$ i $CB$, de manera que el rectangle que formen els segments $AC$ i $CB$ tinguin una àrea donada $c$.*

Ara bé, el màxim rectangle que podem aconseguir dividint el segment $AB$ s'aconsegueix amb el segment $AM$, on $M$ és el punt mitjà del segment $AB$. Per tant, l'equació anterior solament té solució real —geomètrica— quan $b^2 \geq c$.[69] Per als matemàtics grecs, mancats de la concepció numèrica, el problema geomètric adquireix una rellevància molt notable: consisteix a veure que, donat el segment $AB$, el punt $C$ que permet construir un rectangle $AC \times CB$ d'àrea donada, tant si és interior com exterior al segment $AB$, és construïble amb regle i compàs. (Vegeu Euclides [50], II, proposicions 5 i 6, edició castellana de 1970, 739–741.)

Sorgia aleshores la qüestió de resoldre problemes relacionats amb paral·lelepípedes, els quals portaven, de forma natural, a les equacions cúbiques. És

66 Mentre corregia les mates del text, em van demanar una ressenya d'*Abel's Proof*, de Peter Pesic [151]. És un text molt clar que aconsello al lector.

67 En l'anomenada matemàtica mesopotàmica trobem problemes de segon grau datats entre el 1800 aC i el 1600 aC.

68 En algunes ocasions, els matemàtics babilònics donen les dues solucions, encara que, segons Gandz, S. [66, § 9], a la matemàtica mesopotàmica no hi ha cap problema d'aquesta mena precisament perquè no podien comprendre que un problema pogués tenir dues solucions. Aquesta afirmació de Gandz és, tanmateix, força sorprenent si tenim en compte la tauleta trobada a Senkereh i que data de la dinastia d'Hammurabi (1792–1750 aC). El problema diu: «Trobar la llargada i l'amplada d'un rectangle, sabent que l'àrea més la diferència entre la llargada i l'amplada és 183, i la llargada juntament amb l'amplada és 27.» L'escriba resol el sistema $xy' = 210$, $x + y' = 29$. Troba les dues solucions que són, segons ells, els valors de $x$ i de $y'$ (Waerden, B. L. van der [188, p. 63–65]).

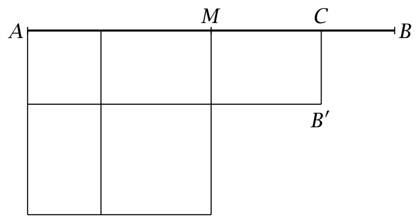
69 Curiosament aquests problemes menen a equacions de segon grau del tipus $X^2 + c = 2bX$, i les dues solucions són positives. Si dividim el segment $AB$, de longitud $2b$, en dues parts, les parts valdran $x = b + h$, $y = b - h$. La superfície serà $c = xy = b^2 - h^2 < b^2$, si $h \neq 0$. El cas $c = b^2$ fa que $x = y = b$. Si $c > b^2$, no hi ha solució. És més que probable que els matemàtics mesopotàmics coneguessin aquesta limitació del problema geomètric. De fet, cada solució dóna un dels trossos amb què s'ha dividit $AB$. (Vegeu Waerden, B. L. van der [188, p. 66].)

a dir, a equacions del tipus

$$3X^3 + bX^2 + cX + d = 0. \tag{8}$$

Els matemàtics de la Mesopotàmia —dotats d'una gran inspiració numèrica— feien servir taules de nombres d'expressions de la forma $n^3 + n^2$, amb $n = 1, 2, \ldots$, i aconseguien resoldre alguns casos d'equacions cúbiques.[70] Els matemàtics grecs s'adonaren que, per resoldre geomètricament el que, en el llenguatge algèbric, és una equació cúbica, necessitaven còniques. És a dir, en general, no eren problemes *plans*.[71] La tècnica de resoldre les cúbiques tallant còniques i circumferències la dugué a terme, de manera molt acurada i completa, el poeta[72] i matemàtic musulmà 'Umar Hayyām (1048–1123) a l'*Àlgebra*

---




Els casos en els quals una solució és positiva i l'altra negativa —és a dir, problemes amb una única solució real des del punt de vista geomètric— s'anunciaven en els termes següents: «Trobar els costats d'un rectangle d'àrea donada $c$ tal que la diferència dels costats sigui $2b$.» Aquesta mena de problema té una solució real única, que ve donada per $X = \sqrt{b^2 + c} - b$. Si el volguéssim convertir en un problema del tipus anterior hauríem d'agafar un segment $A'B'$ de longitud $\sqrt{b^2 + c}$. És a dir, hauríem de resoldre l'equació de segon grau $X^2 + \gamma = 2\beta X$, on $\gamma = c$ i $\beta = \sqrt{b^2 + c}$.

70 Vegeu, per exemple, Waerden, B. L. van der [188, p. 71]. Val la pena indicar que, quan la solució no era exacta, recorrien a la *interpolació lineal*. És difícil saber si els matemàtics babilònics eren conscients que tota cúbica (8) es reductible a una equació cúbica de la forma $X^3 + X^2 = k$. D'entrada fem desaparèixer el terme quadràtic, seguidament fem $X = \frac{1}{Y}$. Obtenim una equació de la forma $Y^3 + aY^2 = b$. Ara ho dividim tot per $a^3$, i fem $Z = \frac{Y}{a}$.

71 Un problema és *pla* quan es pot resoldre amb regle i compàs; *sòlid*, quan necessita, a més, una cònica, i *gràmic*, quan necessita algun tipus de corba més sofisticat que una cònica (Pappos [150], edició castellana de 1970, 948). Dos dels anomenats *problemes clàssics grecs* —la *duplicació del cub* i la *trisecció de l'angle*— són, quan els considerem algèbricament, problemes cúbics. També Arquimedes (287 aC-212 aC), a *De l'esfera i el cilindre*, llibre II, proposició 5, planteja un problema cúbic: «Tallar una esfera per un pla de manera que els segments esfèrics obtinguts estiguin en raó donada». En termes algèbrics equival a resoldre la cúbica $x^2(x - a) = cb^2$. De fet, Arquimedes generalitza un problema anàleg —el de la proposició 4, on es demana «que les superfícies estiguin en una raó donada»—, que és quadràtic. Per tant, resoluble amb regle i compàs. (Vegeu Vera, F. [184, II, p. 83–85].) Tanmateix el llenguatge algèbric és totalment aliè als matemàtics grecs del segle III aC. Les seves solucions eren totes sintètiques. Val a dir que, en la matemàtica grega, no hi ha cap estudi detallat i complet de les cúbiques, malgrat la important aportació que, al segle III, però en un context ben diferent, féu Diofant d'Alexandria (III dC). Una possible raó és que, en no disposar del llenguatge algèbric, els era difícil saber quins problemes geomètrics corresponen a cúbiques i quines són totes les cúbiques possibles. Vegeu, en aquest sentit, la crítica que fa Descartes al començament del llibre II de la *Géométrie*.

72 A la introducció de la recent traducció francesa comentada de R. Rashed i B. Vahabzadeh, de 1999, els autors posen en dubte que el matemàtic i el poeta siguin la mateixa persona, malgrat la coincidència que hi ha sobre aquest fet en la totalitat d'històries de la matemàtica.

(∼1079).[73] D'altres autors islàmics, com ara Jehmshid ibn Massoud al-Kashĭ (†1430), fan reduccions dels problemes clàssics grecs a l'àlgebra. En particular la trisecció de l'angle es converteix en una cúbica i aleshores es resol per mitjà de mètodes que proporcionen solucions aproximades. (Vegeu Aaboe, A. [1].)[74] Els matemàtics islàmics del segle XI —en particular al-Nasawi (∼1025)— van idear el mètode conegut amb el nom de *mètode de Hörner* perquè, a Occident, el va descobrir William George Horner (1786–1837) [86]. De fet, des del segle III aC, era conegut pels matemàtics xinesos, i es troba desenvolupat al capítol quart dels *Nou capítols de la matemàtica xinesa* (*Xin Xang Suan Shu*). (Vegeu Ling, W. i Needham, J. [129].)

Malgrat tots aquests avenços, la resolució de la cúbica, per mitjà d'expressions algèbriques amb radicals dels coeficients, es resistia amb tossuderia als esforços dels matemàtics, fins al punt que, l'any 1494, Luca Pacioli (1445–1517), al final de la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proporcionalità* —una de les primeres obres d'àlgebra impresses [149, 149r]—, diu:

> *La resolució de les equacions cúbiques $X^3 + mX = n$ i $X^3 + n = mX$ (en notació moderna) és tan impossible com la quadratura del cercle.*

Una afirmació ben desafortunada, si tenim en compte que, a començaments del segle XVI, probablement pels volts del 1515, un professor de matemàtiques de la Universitat de Bolonya, Scipione dei Ferro (1465–1526), havia trobat l'algorisme algèbric que permetia resoldre les equacions cúbiques de la forma (vegeu [157, p. 15–20]):

$$X^3 + mX = n.$$

No sabem si es va endur la seva creació a la tomba o si la va comunicar als seus deixebles Antonio Maria dei Fiore (∼ 1506) i Anniballe della Nave (∼1500–1558). Deixant de banda la discussió sobre la primacia de la descoberta,[75] el fet és que l'any 1545 s'editià l'*Ars Magna sive de regulis algebraicis*, de Gerolamo Cardano (1501–1576), on s'ofereix la resolució de Niccolò Fontana, de sobrenom *Tartaglia* (1499–1557),[76] de la cúbica reduïda:

---

73 Recordem, encara que sigui de passada, que l'àlgebra, en sentit estricte, comença amb l'obra del matemàtic musulmà Mohammad ibn Mūsà al Hwārizmī (788–850) *Al-jabr w'al muqābala* (∼830), en la qual es proporciona l'*algorisme* de resolució de les equacions de segon grau i s'observa la possibilitat d'aplicar aquesta tècnica a la resoluió de problemes diversos, alguns dels quals són geomètrics, amb què es produeix una inversió en la manera de fer, heretada dels matemàtics grecs.

74 Amb aquesta metodologia va aconseguir també una aproximació del nombre $\pi$, molt bona, amb 16 xifres decimals exactes (Pla, J. [159]).

75 En el capítol 11 de l'*Ars Magna*, Cardano diu: «Fa més de trenta anys Scipione dei Ferro de Bolonya va trobar la fórmula per resoldre aquesta equació i la va comunicar a Antonio Maria dei Fiore de Venècia, el qual desafià Niccolò Fontana de Brescia. Aquest repte va permetre a Fontana descobrir-la. Me la va donar a conèixer en resposta a les meves demandes, però me'n va amagar la demostració. Un cop vaig conèixer [l'algorisme], vaig buscar-ne la demostració. Tanmateix em va costar.» (Cardano, G. [29], edició anglesa de 1968, 8–9 i 96).

Pel que fa a la disputa entre Cardano i Tartaglia, vegeu Vera, F. [183, p. 47–59].

76 Quan els francesos van prendre Brescia, Niccolò i el seu pare es van refugiar a la catedral,

$$X^3 + pX + q = 0,$$

la qual és suficient per poder resoldre la cúbica general.

Els passos són els següents:

1) La cúbica general

$$Y^3 + aY^2 + bY + c = 0,$$

es transforma en la cúbica reduïda, fent $X = Y + \frac{a}{3}$:

$$X^3 + pX + q = 0.^{77}$$

2) Fent $X = u + v$, s'obté:[78]

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad \text{on} \quad \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Com succeïa en el cas de l'equació de segon grau, hi ha un cas delicat. Aquell en què $\Delta < 0$ i que Cardano anomena *casus irreductibilis*.[79] Però ara la situació és molt diferent de la d'abans.[80]

Considerem, com féu Rafaelle Bombelli (~1526–1573), la cúbica

$$X^3 = 15X + 4.$$

Té una solució òbvia, entera i positiva, $x = 4$, però no és possible aconseguir-la amb la fórmula anterior perquè, quan l'apliquem, resulta que $\Delta = -121$. S'obté, doncs (vegeu Bombelli, R. [23, p. 225–226]),

$$X = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{9}$$

Ens trobem amb una situació molt diferent de la que teníem en el cas quadràtic, i molt més greu. Allà, $\Delta < 0$ quan l'equació no té solució real

---

però això no va aturar els soldats de Lluís XII. Van entrar dins la catedral i van massacrar tothom. El pare de Niccolò va morir. Ell, greument ferit per un cop de sabre que li va travessar la cara i que el deixaria tartamut —*tartaglia*—, va sobreviure perquè el van deixar per mort.

77 Aleshores $p = b - \frac{a^2}{3}$ i $q = c - \frac{a}{3}b + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$.

78 Si fem $X = u + v$, obtenim $X^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvX = -q - pX$. Si ara igualem els coeficients corresponents, tenim que $u^3 + v^3 = -q$, i $27u^3v^3 = -p^3$. Tot rau, doncs, a resoldre una equació de segon grau de la qual es coneix la suma i el producte de les arrels. Després només caldrà treure l'arrel cúbica de les solucions i sumar-les.

79 És *irresoluble* amb l'algorisme de resolució i, per tant, no reductible per l'algorisme.

80 Cardano s'adona que la cúbica $X^3 + 16 = 12X$ té la solució $x = 2$, però, usant la fórmula de Tartaglia, obté $x = -4$ ([29], edició anglesa de 1968, 12). De fet, en aquest cas, $\Delta = 0$, i l'arrel $x = -4$ és doble. Això fa que Cardano s'adoni que una cúbica pot tenir tres arrels reals, si acceptem les negatives i la multiplicitat.

—*geomètrica*.[81] Ara, en canvi, l'equació té solució, però el fet que $\Delta < 0$ no ens permet trobar-la.[82] De fet, segons el *teorema de Bolzano*, totalment acceptat des de l'antiguitat,[83] tota cúbica té sempre una arrel real.

Aquesta situació suggerí a Bombelli la necessitat d'introduir els *nombres complexos*[84] —els nombres de la forma $a + b\sqrt{-1}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$— i un mètode per calcular-ne les arrels cúbiques. (Vegeu Bombelli, R. [23, p. 141–152].) A l'*Àlgebra* (1572), ho aplica aleshores a l'equació (9) i obté ([23, p. 226]), com era d'esperar:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.$$

D'aquesta manera la resolució de qualsevol cúbica es podia aconseguir per radicals.

Però, atès que la *trisecció de l'angle* mena a equacions cúbiques irreductibles,[85] hom podia plantejar-se un problema nou:

> *És possible vincular la resolució d'una cúbica irreductible amb les funcions trigonomètriques?*

La resposta a aquesta pregunta, intuïda ja per Bombelli ([23, p. 639–641]) la donà l'insigne matemàtic francès François Viète (1540–**1603**).[86] Viète s'adonà que la cúbica irreductible —amb $\Delta < 0$— equival a trisecar un angle,

---

81 Recordem que Cardano, en el capítol 37 de l'*Ars Magna*, havia palpat els *nombres complexos*. Hi trobem plantejat i resolt el problema següent:

> *Dividir 10 en dues parts el producte de les quals sigui 30 o 40 és absolutament impossible. Malgrat tot, si procedim* formalment, *obtenim* $5 + \sqrt{-15}$ *i* $5 - \sqrt{-15}$. *Sumats donen 10, i multiplicats 40. Aquest avenç aritmètic, que s'aconsegueix si* deixem de banda les tortures mentals que suposa admetre-les, *és* tan subtil com inútil ([29], edició anglesa de 1968, 219. Els èmfasis són meus.)

De fet, el que Cardano vol dir és: Per què ens hem d'entestar a buscar solucions numèriques d'un problema que geomètricament no en té?

82 El més curiós de tot és que quan $\Delta < 0$ les tres arrels de la cúbica són reals. En canvi, quan $\Delta > 0$, només una és real.

83 Els matemàtics de la Mesopotàmia el van fer servir ja pel 1800 aC. Tanmateix el primer matemàtic que el va formular rigorosament i que intentà demostrar-lo fou Bernhard Bolzano (1781–1848), l'any 1817.

84 Bombelli, R. [23, p. 133]. Anomena *piú di meno* a $i = \sqrt{-1}$ i *meno di meno* a $-i = -\sqrt{-1}$. Després dóna la llei de la multiplicació que regeix entre aquestes i amb *piú* $(+1)$ i *meno* $(-1)$.

85 De fet, aplicant la fórmula additiva del cosinus, resulta que

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Ara bé, si fem $p = -\frac{3}{4}$ i $q = -\frac{1}{4}\cos\theta$, tenim la cúbica $X^3 + pX + q = 0$, que és clarament irreductible, atès que

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{1}{64} + \frac{1}{64}\cos^2\theta = \frac{1}{64}(\cos^2\theta - 1) \le 0.$$

Per tant, la trisecció de l'angle mena a una cúbica irreductible.

86 Va néixer a Fontenay-le-Comte, el 1540, i va morir a París el dia 13 de desembre de 1603.

És el primer matemàtic que introduiex *lletres* per designar els *coeficients*. Això permet tractar les equacions polinòmiques de forma genèrica, sense haver de distingir casos.

mentre que la cúbica normal —amb $\Delta \geq 0$— està lligada a la duplicació del cub.[87] En efecte, si $X^3 + pX + q = 0$ és una cúbica irreductible, podem fer $\cos 3\alpha = \frac{b}{2a}$.[88] Aleshores les solucions són:[89]

$$x_1 = 2a\cos\alpha,$$
$$x_2 = 2a\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = -a\cos\alpha - a\sqrt{3}\sin\alpha,$$
$$x_3 = 2a\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = -a\cos\alpha + a\sqrt{3}\sin\alpha.$$

Avui aquesta aportació pot sorprendre'ns, atès que l'extracció d'una arrel cúbica, en el camp dels complexos, té sempre tres solucions, que vénen donades precisament dividint per tres l'argument del nombre complex, i afegint-hi les terceres parts successives de $2\pi$. Però aquest resultat fou molt més tardà que no pas el de Viète. Data de l'any 1797, i l'establiren, simultàniament i independent, Jean Robert Argand (1768–1822) i Caspar Wessel (1745–1818), malgrat l'intent fallit de John Wallis de 1673. (Vegeu [8], [201] i [193].)

L'obra de Cardano ofereix també la manera de resoldre la quàrtica general, fruit de les intuïcions de Ferrari. S'aconsegueix resolent una equació cúbica i una de quadràtica els coeficients de les quals s'obtenen mitjançant expressions algèbriques, sense radicals, dels coeficients de la quàrtica; resulta que també les quàrtiques són resolubles per radicals. (Vegeu [29], edició anglesa de 1968, 238–240; per a una exposició completa, vegeu, per exemple, Tignol, J. P. [179, p. 22–25].) Malgrat que la resolució de Ferrari seria represa per Viète, el mètode més elegant de resoldre una quàrtica l'ofereix Descartes al llibre tercer de la *Géométrie*. (Vegeu [38], edició catalana de 1999, 118–121.)[90]

Albert Girard (1595–1632), a l'*Invention nouvelle en algèbre* (1629), dóna un exemple molt interessant que permet interpretar geomètricament les quatre solucions reals de la quàrtica. És el següent:

> *Pel vèrtex $A$ del quadrat $AFOB$, de quatre unitats de costat, fem una recta transversal $ANC$ tal que el segment d'aquesta interceptat pels costats $OB$, $OF$ del quadrat tingui una longitud igual a $\sqrt{153}$.*[91]

---

87 Viète, F. [186], edició anglesa de 1983, 174–175 i 403–408. Descartes ho sistematitza i explica a [38], edició catalana de 1999, 130–137.

88 Atès que $\Delta < 0$, $p < 0$. Per tant, sense perdre generalitat, podem suposar que $p = -3a^2$ i $q = -a^2 b$, amb $a > 0$. Aleshores, $\Delta < 0$ implica $a > \left|\frac{b}{2}\right|$.

89 Viète no accepta les solucions negatives. Només dóna la primera de les tres solucions, que és positiva si $b > 0$ ([185], edició anglesa de 1983, 174).

90 Tot rau a posar la quàrtica reduïda $X^4 + pX^2 + qX + r = (X^2 + \alpha X + \beta)(X^2 - \alpha X + \gamma)$ i a resoldre després, igualant els coeficients corresponents, una sèxtica en $\alpha$ —que, de fet, és cubicoquadràtica—, la qual sempre té una arrel real.

91 Girard, A. [76], edició anglesa de 1986, 145–146. Aquest exemple serà reprès per Descartes amb el mateix objectiu ([38], edició catalana de 1999, 122-124, nota 80).

És precisament en aquesta obra de Girard on s'estableix l'afirmació general que tota equació polinòmica té tantes arrels com el grau.[92] De fet afirma que tota equació polinòmica

$$X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2}s_{n-2}X^2 + (-1)^{n-1}X + (-1)^n s_n = 0$$

té $n$ arrels $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que, a més, compleixen

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s_2 = \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j, \quad s_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k, \ldots, s_n = x_1 \cdots x_n.$$

Davant la pregunta hipotètica: «per a què serveixen aquestes arrels impossibles?» —siguin com siguin—, respon que les *arrels impossibles*

> *serveixen per tres raons: 1) les fórmules anteriors són generals, 2) no n'hi poden haver més i 3) són útils.*[93]

La discussió sobre la validesa del *teorema fonamental de l'àlgebra* que afirma que tot polinomi amb coeficients reals té tantes arrels complexes com el grau serà motiu de discussió durant tota la resta del segle XVII i no s'aclarirà definitivament fins que l'any 1746 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) en doni la primera demostració.[94] Quedarà definitivament establert l'any 1799, en què Carl Friedrich Gauss en dóna la primera demostració rigorosa.[95]

Girard s'adonà també que les *funcions simètriques elementals*:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{i}^{n} X_i,\\
\sigma_2(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{1\le i<j\le n} X_iX_j,\\
\sigma_3(X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{1\le i<j<k\le n} X_iX_jX_k,\\
&\vdots\\
\sigma_n(X_1,\ldots,X_n) &= X_1X_2\cdots X_n,
\end{aligned}$$

92 En el text de Girard no queda clar si creu que totes les arrels són complexes o que cal recórrer altres camps de nombres, més sofisticats, encara no descoberts per tenir-les totes. El que sí que queda clar és que n'hi ha d'haver tantes com el grau. Vegeu Pla, J. [154, p. 882–884].

93 Girard, A. [76], edició anglesa de 1986, 138–141. També Newton, a la segona edició de l'any 1728 de l'*Arithmetica universalis* diu que les «arrels complexes són útils perquè posen de manifest la impossibilitat de resoldre un problema geomètric *realment*, és a dir, *geomètricament*» ([145], edició anglesa de 1967–1981, IV, 343). Els èmfasis són meus.

94 Pla, J. [154]. El teorema s'enunciava de la manera següent: «Tot polinomi amb els coeficients reals descompon en producte de binomis de primer grau i de trinomis de segon grau reals».

95 És el tema de la tesi doctoral que va llegir a Helmstädt. Hi critica les demostracions de d'Alembert (1746), d'Euler (1749), de Foncenet (1759) i de Lagrange (1772). Recordem que, al llarg de la seva vida, va elaborar quatre demostracions diferents del teorema fonamental de l'àlgebra. A més de la de 1799 va elaborar les de 1814–1815, 1816 i 1848–1850.

permeten expressar la suma de les potències $k$-èsimes de les arrels

$$S_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_1^n X_i^k$$

com a polinomis de les funcions elementals amb coeficients enters. De retruc, si substituïm $X_1, X_2, \dots, X_n$ per $x_1, x_2, \dots, x_n$, on $x_i$, $i = 1, \dots, n$, són les arrels de l'equació polinòmica

$$P(X) = X^n - s_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} X + (-1)^n s_n = 0, \qquad (10)$$

aleshores les expressions $S_k(x_1, \dots, x_n)$ són polinomis dels coeficients $s_1$, $s_2, \dots, s_{n-1}, s_n$ del polinomi de l'equació (10).

Aquest teorema serà reprès per Newton. (Vegeu Newton, I. [145], edició anglesa de 1967–1981, 360–363.) Però el *teorema fonamental de les funcions simètriques* el formulà i demostrà Edward Waring (1734–1798), l'any 1770. Diu:

> *Un polinomi simètric de n variables, amb els coeficients en un cos K, es pot escriure com un polinomi amb els coeficients en K, les variables del qual són les funcions simètriques elementals.*[96]

De forma anàloga al que succeïa amb les solucions de certes equacions diferencials disposem d'un teorema general d'existència molt precís:

> *En el camp $\mathbb{C}$ dels nombres complexos tota equació polinòmica real de grau n té n arrels complexes.*

Estem, doncs, legitimats a preguntar:

> *És possible trobar una fórmula —un* algorisme*— que permeti calcular una almenys de les arrels i que usi radicals d'expressions algèbriques dels coeficients?*

### El teorema d'Abel d'irresolubilitat de la quíntica

La qüestió de trobar un algorisme d'obtenció de les arrels de l'equació polinòmica de cinquè grau, i de graus superiors, fou motiu de treballs importants des de l'època d'Euler. Entre els més notables podem remarcar, a més dels del mateix Euler i del seu amic Ehrenfreid Walter von Tschirnhaus (1651–1708), els de Gian Francesco Malfiatti (1731–1807), Edward Waring, Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Louis Augustin Cauchy, a banda dels treballs de Carl Friedrich Gauss relatius a la

96 Waring, E. [197, capítol I, problema III, cas 4]. També aparegué a Vandermonde, A. T. [182]. Lagrange el considera un teorema que és totalment evident (Lagrange, J.-L. [108, article 98, 372]). Recordem que un polinomi $P(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ és un polinomi *simètric* de $n$ variables si, i només si, per a tota permutació $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

caracterització dels polígons regulars construïbles amb regle i compàs i de la resolució d'equacions ciclotòmiques per radicals. (Vegeu, per exemple, Waerden, B. L. van der [189, p. 76–88 i 88-95].)

Només esmentaré el treball de Lagrange de 1770 ([108]; fixem-nos que el treball té dues-centes setze pàgines). El matemàtic de Torí intenta resoldre una equació polinòmica per mitjà d'una *resolvent*[97] amb l'esperança fallida, després de realitzar un estudi molt acurat, complet i intens, de les equacions de segon, de tercer i de quart grau, en què el grau de la resolvent sigui més petit que el grau de l'equació polinòmica que es vol resoldre.[98] Però va resultar que, en el cas irresolt de la quíntica (Lagrange, J.-L. [108, p. 372]), la resultant és una sèxtica pròpia, a diferència del que succeïa en el cas de la cúbica i de la quàrtica.

Malgrat l'esforç —i el gran desengany—, Lagrange no aconsegueix provar ni la resolubilitat ni la irresolubilitat de les equacions generals de grau superior al cinquè. Caldrà esperar fins que, a la primavera de 1824, Niels Henrik Abel faci pública la seva prova de la *impossibilitat* de resoldre la quíntica per radicals (Abel, N. H. [2], [3]). Tanmateix, en honor a la veritat i el rigor històric, cal

---

97 En termes genèrics podem dir que els mètodes de resolució de la cúbica i la quàrtica de l'*Ars Magna* recorren a una resolvent, però no hi ha una anàlisi d'aquest fet que serveixi per poder anar més enllà.

98 El mètode de Lagrange té, *grosso modo*, tres etapes:

1. La formació d'una expressió lineal (encara que el fet que sigui lineal no és essencial) $\chi = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ tal que la seva potència $p$-èsima $z = \chi^p$ prengui, quan permutem les arrels $x_1, \ldots, x_n$ de totes les maneres possibles, només un nombre finit $\nu < n$ de valors diferents $z_1, \ldots, z_\nu$ dels $n!$ que, en principi, hauria de prendre.
2. La formació del polinomi
$$(Z - z_1)(Z - z_2) \cdots (Z - z_\nu) = Z^\nu + A_1Z^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu-1}Z + A_\nu,$$
on els coeficients $A_\nu$ són funcions simètriques de les arrels $x_1, \ldots, x_n$. És el que actualment coneixem com la *resolvent de Lagrange*. En principi ha de servir per reduir la resolució de l'equació polinòmica $P(X) = 0$ a una equació polinòmica de grau inferior.
3. Donar les arrels $x_i$ en funció de $\chi = z^{\frac{1}{p}}$, per mitjà d'expressions racionals.

De fet, en l'anàlisi de les equacions de grau dos, tres i quatre, Lagrange obté el diagrama següent:

| *Grau* | *Expressió lineal:* $\chi$ | *Funció:* $z = \chi^p$ | *Índex* | *Resolvent* |
|---|---|---|---|---|
| $n=2$ | $x_1 - x_2$ | $z = (x_1 - x_2)^2$ | $\nu = 1$ | $z = \Delta = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ |
| $n=3$ | $x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3$ | $z = (x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3)^2$ | $\nu = 2$ | $z^2 + 27qz - 27p^3 = 0$ |
| $n=4$ | $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ | $z = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$ | $\nu = 3$ | $z^3 - 8pz^2$ $+16(p^2 - 4r)z - 64q^2 = 0.$ |

En el darrer cas tenim $z_1 = (x_1+x_2-x_3-x_4)^2, z_2 = (x_1+x_3-x_2-x_4)^2, z_3 = (x_1+x_4-x_2-x_3)^2$ que corresponen, respectivament, a les permutacions

$$\begin{gathered}\text{id}, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423);\\ (23), (123), (234), (1342), (1243), (124), (143), (14);\\ (24), (142), (243), (1432), (13), (134), (123), (1234).\end{gathered}$$

(Vegeu Nobý, L. [146, p. 26–43].)

dir que uns quants anys abans Paolo Ruffini (1765–1822) s'hi havia aproximat moltíssim.[99]

És força difícil veure en els textos d'àlgebra —i àdhuc en els d'història de la matemàtica— la demostració d'Abel, perquè, en l'actualitat, queda integrada —de fet, n'és un corol·lari— dins la *teoria de Galois* de les equacions polinòmiques.[100] Però a mi em sembla molt bonica, relativament simple, i penso que val la pena de recordar-la. Per això en reprodueixo quelcom que s'apropa a una traducció.[101]

Demostració del teorema d'Abel d'irresolubilitat de la quíntica

Sigui

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \tag{11}$$

una quíntica general —és a dir, les lletres $a, b, c, d$ i $e$ són *variables independents*. Suposem que és resoluble algèbricament —és a dir, suposem que $y$ es pot expressar com a funció de les quantitats $a, b, c, d$ i $e$, usant radicals. Aleshores

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{12}$$

on $m$ és un nombre primer i $R, p, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ són funcions del mateix tipus que $y$,[102] i així successivament fins a arribar a funcions racionals dels coeficients de l'equació (11). Podem suposar, diu Abel, que $R^{\frac{1}{m}}$ no es pot expressar com a funció racional de $a, b, c, d, e, p, p_1, \ldots, p_{m-1}$.[103]

Ara substituïm $R$ per $\frac{R}{p_1^m}$ i podem suposar que $p_1 = 1$.[104] Obtenim

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Fem $R^{\frac{1}{m}} = z$. Resulta que

$$y = p + z + p_2 z^2 + \cdots + p_{m-1} z^{m-1}. \tag{13}$$

Substituïm $y$ en (11) i obtenim, atès que $z^m = R$,

$$P = q + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0, \tag{14}$$

on $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$ són polinomis en $a, b, c, d, e, p, p_2, \ldots, p_{m-1}$ i $R$.

99 Ruffini, P. [167], I, 1–324 i 345–406, i II, 155–268. El primer treball de Ruffini sobre la qüestió es va publicar a Bolonya el 1898; el segon, a Mòdena, el 1802, i el tercer data de 1813. Es basa en la *hipòtesi* que els radicals es poden expressar com a funcions racionals de les arrels, hipòtesi que Abel demostra en els seus treballs.

100 És molt semblant al que passa amb la demostració de la *resolubilitat per radicals* de Pierre Wantzel (1824–1848) de 1837.

101 Vegeu la traducció anglesa a Smith, D. E. [171], edició de 1959, 261–266, o a Ore, O. [147], edició de 1982, 6–10.

102 En termes de Galois comencem en el cos de les funcions racionals de $a, b, c, d, e$ i coeficients constants i anem afegint arrels d'índex primer d'expressions del tipus anterior. Cal indicar, no obstant això, que, en les constants, Abel inclou les arrels de la unitat corresponents a cada índex de les arrels afegides.

103 Altrament l'adjunció del radical seria supèrflua. És a dir, l'extensió no seria pròpia.

104 Aquesta restricció de l'article de 1824 no és essencial i no apareix en l'article de 1826.

Ara hem de veure que, si desitgem que es compleixi l'equació (14), cal que $q = 0, q_1 = 0, \ldots, q_{m-1} = 0$.[105]

En efecte. Tenim dues equacions que són satisfetes per $z = R^{\frac{1}{m}}$:

$$z^m = R \quad \text{i} \quad q + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0.$$

Si les quantitats $q = 0, q_1 = 0, \ldots, q_{m-1} = 0$ no són nul·les, les dues equacions tenen almenys una arrel comuna. Si en tenen $k$, hi ha un polinomi de grau $k$, els coeficients del qual són funcions racionals de $R, q, q_1, \ldots, q_{m-1}$.[106] És a dir,

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k = 0. \tag{15}$$

Totes les seves arrels són també arrels de $z^m - R = 0$. Per tant són de la forma $\alpha_\mu z$, on $\alpha_\mu$ és una arrel $m$-èsima de la unitat.[107] Les substituïm a (15) i obtenim el sistema

$$\begin{aligned} r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k &= 0, \\ r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha^k r_k z^k &= 0, \\ &\cdots \\ r + \alpha_{k-1} r_1 z + \alpha_{k-1}^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha_{k-1}^k r_k z^k &= 0. \end{aligned}$$

D'aquestes $k$ equacions podem eliminar $z$ i expressar-la com a funció racional de les quantitats $r, r_1, \ldots, r_k$, que, al seu torn, són funcions racionals de $a, b, c, d, e, R, p, p_2, \ldots, p_{m-1}$, però això va en contra de la hipòtesi segons la qual $z$ no és d'aquesta forma.[108] Per tant és necessari que

$$q = 0, q_1 = 0, \ldots, q_{m-1} = 0$$

que és la condició que volíem establir.

Però l'equació $z^m = R$, que és satisfeta per $z = R^{\frac{1}{m}}$, també ho és per

$$z, \alpha z, \alpha^2 z, \ldots, \alpha^{m-1} z,$$

on $\alpha^m = 1, \alpha \neq 1$.[109] Si repetim el procés amb les arrels diferents de $z^m = R$ tindrem que

$$\begin{aligned} y_1 &= p + z + p_2 z^2 + \cdots + p_{m-1} z^{m-1}, \\ y_2 &= p + \alpha z + p_2 \alpha^2 z^2 + \cdots + p_{m-1} \alpha^{m-1} z^{m-1}, \\ &\cdots \\ y_m &= p + \alpha^{m-1} z + p_2 \alpha^{m-2} z^2 + \cdots + p_{m-1} \alpha z^{m-1}, \end{aligned}$$

105 És el punt clau de la demostració d'Abel.

106 És el màxim comú divisor dels dos polinomis, o si el voleu irreductible, un divisor irreductible d'aquest.

107 La podem posar en la forma $\alpha_\mu = \alpha^\mu$, on $\alpha$ és l'arrel d'angle mínim $\neq 0$.

108 En el treball de 1826 agafa un factor minimal —irreductible— de (15) i amb dues arrels en té prou per reduir el grau, eliminant el terme de grau $k$.

109 Satisfà $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1} = 1$.

totes diferents.[110] Aleshores $m \leq 5$, i

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \cdots + y_m), \\ z &= \frac{1}{m}\left(y_1 + \alpha^{m-1}y_2 + \cdots + \alpha y_m\right), \\ p_2 z^2 &= \frac{1}{m}\left(y_1 + \alpha^{m-2}y_2 + \cdots + \alpha^2 y_m\right), \\ &\vdots \\ p_{m-1}z^{m-1} &= \frac{1}{m}\left(y_1 + \alpha y_2 + \cdots + \alpha^{m-1}y_m\right). \end{aligned}$$

Aleshores tindríem que $p, p_2, \cdots, p_{m-1}, R, z$ serien funcions racionals de les arrels de l'equació. Considerem ara una d'aquestes quantitats, per exemple $R$. Tindrem que

$$R = s + v^{\frac{1}{k}} + S_2 v^{\frac{2}{k}} + \cdots + S_{k-1} v^{\frac{m-1}{k}}$$

i repetim el procés. O bé l'adjunció de $v^{\frac{1}{k}}$ és innecessària o bé els coeficients $S, S_2, \ldots, S_{k-1}$ i $v^{\frac{1}{k}}$ són funcions racionals de les arrels $y_1, y_2, \ldots, y_5$.

Raonant d'aquesta manera resulta que totes les funcions racionals de l'expressió que produeix $y$ són funcions racionals de les arrels $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ de la quíntica incial.[111]

Ara ja no és difícil acabar la demostració.[112] Considerem ara les funcions irracionals de la forma $R^{\frac{1}{m}}$, on $R$ és una funció racional de $a, b, c, d$ i $e$. Sigui $r = R^{\frac{1}{m}}$.[113] Aleshores $r$ és una funció racional de $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$, i $R$ una funció simètrica d'aquestes quantitats.[114] Però, atès que, per hipòtesi, la quíntica és general, les variables $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ són independents. Per tant, l'equació $R^{\frac{1}{m}} = r$ s'ha de satisfer amb aquest supòsit. Aleshores, les permutem en $R^{\frac{1}{m}} = r$ de les 120 maneres possibles i, atès que $R$ és una funció simètrica, $R^{\frac{1}{m}}$ prendrà $m$ valors diferents.[115] Atès que $m$ és un nombre primer,[116] segons un resultat de Cauchy, $m = 5$ o $m = 2$.[117]

110 Si n'hi haguessin dues d'iguals tindríem una expressió $P = 0$, semblant a (14) però diferent, i això no és possible perquè els coeficients no serien nuls!

111 Abel demostra, doncs, la hipòtesi de Ruffini: totes les quantitats irracionals que adjuntem són funcions racionals de les arrels.

112 És la part més delicada, atès que es basa en resultats establerts per Lagrange i Cauchy.

113 És el primer radical que s'introdueix o adjunta.

114 Pel *teorema de les funcions simètriques* els coeficients de l'equació polinòmica són funcions simètriques de les arrels.

115 Són els valors $r, \alpha r, \alpha^2 r, \alpha^3 r \ldots, \alpha^{m-1} r$.

116 Segons un resultat de Lagrange, ha de dividir a 5!=120. És a dir, hi ha tres casos possibles $m = 2, m = 3$ i $m = 5$.

117 Abel cita explícitament la «Mémoire sur le nombre de valeurs qu'un fonction peut acquérir», del *Journal de l'École polytechnique*, 17. Diu: «El nombre de valors diferents d'una funció *no*

Aleshores Abel constata que cap d'aquests casos no és possible. (Vegeu Ore, O. [147], edició de 1982, 8–9.) Vegem els dos casos per separat:

Cas $m = 5$. Aleshores la funció $r$ té 5 valors diferents. Per tant, és de la forma

$$\sqrt[5]{R} = p_0 + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 = P(y_1),$$

on $p, p_1, p_2, p_3$ i $p_4$ són funcions simètriques de $y_1, y_2, y_3, y_4$ i $y_5$. Si canviem $y_1$ per $y_2$, tindrem un resultat de la forma

$$P(y_1) = \alpha P(y_2), \text{amb } 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 1.$$

Això estableix un lligam entre $y_1$ i $y_2$, que, segons hem dit, són independents! Per tant, no és possible que $m = 5$.[118]

Cas $m = 2$. Coneixem una funció que només pren dos valors. És el producte de les diferències

$$r = \prod_{i<j} (y_i - y_j),$$

on $r^2 = S$ és el *discriminant de l'equació.* Aleshores, pel resultat de Cauchy,

$$R^{\frac{1}{2}} = r = vS^{\frac{1}{2}},$$

on $v$ és una funció simètrica.

A l'etapa següent caldrà considerar radicals de la forma

$$s = \left(p_0 + p_1\sqrt{S}\right)^{\frac{1}{m}},^{119}$$

on $p_0$ i $p_1$ són funcions simètriques.

---

*simètrica* de $n$ variables, no pot ser inferior al més gran nombre primer $p$ contingut a $n$, sense devenir igual a 2». L'èmfasi és meva.

118 Abel, N. H. [3] fa una variació més elaborada. Considera $y_1$ com una arrel comuna de l'equació inicial i la relació que defineix $R$. Aleshores $y_1$ s'expressa en la forma

$$y_1 = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}.$$

Substituint $R^{\frac{1}{5}}$ per $\alpha^t R^{\frac{1}{5}}$ obté les altres arrels de l'equació, i resolent el sistema format per les cinc equacions lineals obté

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\left(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5\right).$$

La identitat és impossible perquè el membre de la dreta pren 120 valors diferents, mentre que el de l'esquerra només en pot prendre 5.

Vegeu l'analogia d'aquest raonament en el cas en què $m = 2$.

119 De fet, són de la forma $\left(p + p_1 R^{\frac{1}{\mu}} + p_2 R_1^{\frac{1}{\nu}} + \cdots\right)^{\frac{1}{m}}$, on $p, p_1, p_2, \ldots, R, R_1, \ldots$ són funcions racionals de $a, b, c, d$ i $e$, i, per tant, funcions simètriques de $y_1, y_2, y_3, y_4$ i $y_5$. Per tot el que hem vist és necessari que $\mu = \nu = \cdots = 2, R = v^2 S, R_1 = v_1^2 S, \ldots$.

Si fem

$$s_1 = \left(p_0 - p_1\sqrt{S}\right)^{\frac{1}{m}},$$

resulta que

$$ss_1 = \left(p_0^2 - p_1^2 S\right)^{\frac{1}{m}} = v.$$

I $v$ és una funció simètrica de les arrels $y_i$. Si no ho fos, pel teorema de Cauchy, tindríem que $m = 2$. Però aleshores $s$ satisfaria una equació irreductible de grau quatre, i $s$ seria una funció que prendria quatre valors, en contra del resultat de Cauchy. Impossible!

Examinem ara la quantitat

$$z = s + s_1 = s + \frac{v}{s} = \left(p_0 + p_1\sqrt{S}\right)^{\frac{1}{m}} + v\left(p_0 + p_1\sqrt{S}\right)^{-\frac{1}{m}}. \tag{16}$$

És una expressió que pren $m$ valors. Però atès que $m$ és un nombre primer, $m = 5$ perquè $m = 2$ i $m = 3$ estan exclosos pel teorema de Cauchy.

Però hem vist que una funció amb cinc valors pot ser representada per una sola arrel $y$ de (11):

$$z = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = \left(p_0 + p_1\sqrt{S}\right)^{\frac{1}{5}} + v\left(p_0 + p_1\sqrt{S}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

on els coeficients són funcions simètriques de $y_1, y_2, y_3, y_4$ i $y_5$. Però aleshores, per mitjà d'aquesta equació i de l'equació original (11), per eliminació, s'obté l'expressió

$$y = s_0 + s_1 z + \cdots + s_4 z^4,$$

que té coeficients simètrics. Substituïm $z$ per l'expressió (16) amb $m = 5$ i obtenim

$$y = P_0 + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}}, \tag{17}$$

on $R = p_0 + p_1\sqrt{S}$, i els coeficients són formes semblants $P_i = A_i + B_i\sqrt{S}$. La fórmula (17), que expressa una arrel de l'equació (11), és una expressió per radicals de la forma (12). Pel mateix raonament que abans tenim, corresponent a (15),

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\left(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5\right). \tag{18}$$

Això porta a contradicció. La quantitat $R^{\frac{1}{5}}$, per la seva forma, hauria de ser l'arrel d'una equació de grau deu, de manera que és una funció de les $y_i$ que pren deu valors. D'altra banda, tots els coeficients en l'expressió lineal de les $y_i$ del segon membre de (18) són diferents. Per tant, quan efectuem totes les permutacions possibles, prendrà 120 valors.

De tot això concloem, com afirmàvem a l'inici, que és impossible resoldre la quíntica general per radicals. □

Ara sabem, sense cap mena de dubte, que tota equació polinòmica té tantes arrels com el grau, però que no podem aconseguir-les algèbricament, és a dir, amb les operacions algèbriques elementals. Aquests resultats fan que sigui lícit preguntar-se:

1) El *resultat de Sturm*. Donat un polinomi

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X],$$

quantes arrels reals i quantes arrels complexes té l'equació polinòmica $P(X) = 0$?

Quantes n'hi ha, de reals, a l'interval $(a, b)$, amb $a, b \in \mathbb{R}, a < b$?

2) El *resultat de Kronecker*. Hi ha polinomis concrets que no siguin resolubles per radicals?
3) El *resultat d'Hermite*. És possible resoldre una quíntica usant funcions transcendents, com havia fet Viète amb la cúbica?

Doncs bé, alguns dels matemàtics que enguany celebren l'aniversari tenen quelcom a dir amb relació a la pregunta 1 que, de retruc, permet respondre també la pregunta número 2. És el que analitzarem tot seguit. La 3 la contestarem a la secció següent.

### El resultat de Sturm

A la *Géométrie*, René Descartes estableix la *regla dels signes* que permet conèixer fites superiors per a les arrels positives i negatives d'una equació polinòmica real en funció de les *variacions dels signes dels coeficients de polinomi*.[120]

Hi ha historiadors de la matemàtica, com ara Cantor i Eneström, que defensen que ja era coneguda per Cardano. (Vegeu Smith, D. E. [170], edició de 1953, II, 471.) Uns anys més tard, Newton a l'*Arithmetica universalis* dóna un mètode molt sofisticat per afitar inferiorment el nombre d'arrels complexes d'una equació polinòmica real, tot fabricant una successió de signes realment molt elaborada.[121]

És precisament en aquest context que el matemàtic suís Jacques Charles François Sturm (**1803**–1855)[122] va establir un teorema molt senzill del qual Liouville digué:

> *Amb aquesta descoberta Sturm ha simplificat i perfeccionat alhora els elements de l'algebra, enriquint-la amb resultats nous.*[123]

I Charles Hermite afegeix: «El teorema de Sturm ha tingut la fortuna enorme de convertir-se immediatament en un clàssic i de trobar un lloc en l'ensenyament

120 Descartes, R. [38], edició catalana de 1999, 103. Sembla que aquesta llei l'havia trobat ja Thomas Harriot (1560–1621), que la publicà a l'*Analytica Praxis ad æquationes algebraicas resolvendas* [81, p. 80, 18 i 268]. A partir d'aleshores moltíssims matemàtics en donarien una demostració, però la més clara és la de Fourier i data de l'any 1780. Vegeu Cajori, F. [26, p. 248].
121 Newton, I. [145], edició anglesa; [202, IV 347–353]. La primera demostració la donà James Joseph Sylvester (1814–1897), l'any 1865 [176].
122 Nascut a Ginebra el dia 29 de setembre de 1803 i mort a París el 18 de desembre de 1855.
123 Citat a Dörrie, H. [44], edició anglesa de 1965, 112.

que mai no perdrà. La seva demostració, que només fa servir consideracions elementals, és un exemple rar de simplicitat i elegància.»[124]

La qüestió de determinar el nombre d'arrels reals ja l'havia intentat resoldre Michel Rolle (**1652**–1719),[125] però, com Descartes, només va aconseguir establir una fita superior. Un altre matemàtic, que forma part del grup de matemàtics que avui distingim, Ferdinand Buran de Boislaurent (~1800–**1853**), proporcionà un mètode per afitar el nombre d'arrels d'un polinomi. La demostració que dóna —bàsicament és la mateixa que la de Jean-Baptiste Joseph Fourier— es basa en l'ús del polinomi $P(X)$ i de les derivades. Aquest teorema es coneix amb el nom de *teorema de Budan-Fourier*.[126]

El mètode de Sturm es basa en quelcom tan simple i conegut des de temps antic com és l'*algorisme d'Euclides* aplicat als polinomis $P(X)$ i $P'(X)$, i dóna el nombre *exacte* d'arrels reals que hi ha a l'interval $(a, b)$, amb $a < b$. El teorema diu (Sturm, C. [175]): suposem que el polinomi $P(X)$ només té arrels simples.[127] Considerem la successió

$$F_0(X), F_1(X), \dots, F_{s-1}(X), F_s(X), \tag{19}$$

on $F_0(X) = P(X)$ i $F_1(X) = P'(X)$ i, per a cada $1 < i \leq s-2, F_i$ s'obté per l'expressió

$$F_i(X) = F_{i+1}(X)Q_{i+1}(X) - F_{i+2}(X).$$

Aleshores el nombre d'arrels reals que l'equació polinòmica $P(X) = 0$ té a l'interval $(a, b)$, amb $a < b$, és igual al nombre de variacions de signe perdudes quan $X$ passa de $a$ a $b$. És a dir, el nombre de variacions perdudes quan passem de la successió

$$F_0(a), F_1(a), \dots, F_s(a),$$

a la successió

$$F_0(b), F_1(b), \dots, F_s(b).$$

La demostració és molt bonica per la seva simplicitat, com podem veure a continuació. (Vegeu Chabert, J.-L. i d'altres [32, p. 133–134].)

Demostració del teorema de Sturm

Només cal observar tres fets:

124 Citat a Gillespie, C. C. [74, IV, p. 2360–2361].

125 Michel Rolle va néixer a Ambert el 21 d'abril de 1652 i va morir a París el 8 de novembre de 1719.

126 El teorema diu:

> *El nombre d'arrels reals del polinomi $P(X)$ que hi ha dins l'interval $(a, b)$, comptades amb la seva multiplicitat, no excedeix mai el nombre de variacions de signe perdudes per la successió*
>
> $$P(X), P'(X), \dots, P^{(n)}(X)$$
>
> *quan la variable $X$ passa de $a$ a $b$, i és de la mateixa paritat.*

127 Si $P(X)$ té arrels múltiples, aleshores seran arrels simples del polinomi $Q(X) = \frac{P(X)}{M(X)}$, on $M(X) = \text{mcd}\,(P(X), P'(X))$. Aleshores apliquem el teorema a $Q(X)$ i quedarà per aclarir, en tot cas, la multiplicitat de cada una de les arrels.

*a)* Dues funcions polinòmiques veïnes $F_i(X)$ i $F_{i+1}(X)$ de la successió (19) no s'anul·len mai alhora en cap punt de l'interval $(a, b)$.

Si, per exemple, $F_i(X)$ i $F_{i+1}(X)$ s'anul·lessin ambdues en el punt $x_0 \in (a, b)$, també s'hi anul·laria $F_{i+2}(X)$, per la manera com està definida. Però aleshores iterant el raonament s'hi anul·laria $F_s(X)$. Però $F_s(X)$ és una constant $k \neq 0$, ja que altrament $P(X)$ i $P'(X)$ tindrien una arrel comuna, que no fóra una arrel simple de $P(X)$.

La continuïtat de les funcions polinòmiques permet afirmar que existeix un entorn de $x_0$ en el qual no s'anul·len simultàniament dues funcions polinòmiques veïnes $F_i(X)$ i $F_{i+1}(X)$ de la successió (19).

*b)* Si $x_0$ anul·la una de les funcions polinòmiques $F_i(X), 0 < i < s$, de la successió (19), aleshores, en el punt $x_0$, les dues funcions veïnes $F_{i-1}(X)$ i $F_{i+1}(X)$ tenen signe oposat. És obvi, atès que

$$F_{i-1}(X) = F_i(X)Q_i(X) - F_{i+1}(X) \quad \text{implica} \quad F_{i-1}(x_0) = -F_{i+1}(x_0).$$

*c)* En un entorn prou petit d'una arrel $x_0$ de l'equació polinòmica $P(X) = 0$, $F_1(X)$ és $> 0$ o $< 0$.

Si $P(x_0) = 0$, aleshores $P'(x_0) = F_1(x_0) \neq 0$ i, per la continuïtat de la funció $P'(X)$, manté el signe en un interval prou petit de $x_0$.

Ara tot és a punt per veure que el teorema de Sturm és cert.

Considerem la successió (19) i un punt $x \in \mathbb{R}$ que no anul·li cap de les funcions polinòmiques $F_i(X)$. Considerem la funció $N(x)$ que compta els canvis de signe de la successió

$$F_0(x), F_1(x), \ldots, F_{s-1}(x), F_s(x).$$

Si fem variar $x$, les funcions $F_i(x)$ només canviaran de signe quan $x$ passi per un zero d'alguna d'aquestes.

Sigui, doncs, $x_0$ un zero de $F_i(X), i > 0$, i $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ dos punts propers a $x_0$. Aleshores

A) $F_i(X)$ només s'anul·la a $x_0$.

B) $F_{i-1}(x)$ i $F_{i+1}(x)$ no s'anul·len i, per tant, mantenen el signe. Però en $x_0$ tenen signes oposats. Per tant, en tot l'interval tenen signes oposats.

Fixem-nos que, quan $x$ recorre els valors de $a$ a $b$, si passa per un zero $x_0$ de $F_i(X)$, $i > 0$, aleshores no es produeix cap canvi de signe perquè, abans de passar per $x_0$ i després de $x_0$, $F_i(x)$, amb $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, canvia de signe. Per tant, a la terna $F_{i-1}(x), F_i(x), F_{i+1}(x)$, sempre hi ha un canvi de signe i només un.

La qüestió és, doncs, analitzar els punts $x_0 \in (a, b)$ que són zeros de l'equació polinòmica $P(X) = 0$, atès que, en aquest cas, no existeix $F_{i-1}(X)$. Aleshores, tot depèn de si, en un entorn de $x_0, P(X)$ és creixent o decreixent.

En el primer cas, quan $x$ recorre $x_0-\delta, x_0+\delta$, $P(X)$ passa de negatiu a positiu, però $F_1(X) = P'(X)$ es manté positiu; en el segon cas, en canvi, $P(X)$ passa de positiu a positiu, però $F_1(X) = P'(X)$ es manté negatiu. És a dir, $F_0(X)$ canvia de signe d'una manera ben precisa, però $F_1(X)$ manté el signe, també de manera ben determinada. Així doncs, si considerem les successions

$$F_0(x_0-\delta), F_1(x_0-\delta), F_2(x_0-\delta), \dots, F_{s-2}(x_0-\delta), F_{s-1}(x_0-\delta), F_s(x_0-\delta),$$

$$F_0(x_0+\delta), F_1(x_0+\delta), F_2(x_0+\delta), \dots, F_{s-2}(x_0+\delta), F_{s-1}(x_0+\delta), F_s(x_0+\delta),$$

resulta que

- si $F_0(X)$ és creixent, $F_1(X)$ és positiu a $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, com dèiem, i les dues successions són de la forma
$$\begin{matrix} - & + & \cdots, \\ + & + & \cdots, \end{matrix}$$
i hem perdut un canvi de signe;
- si $F_0(X)$ és decreixent, $F_1(X)$ és negatiu a $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, com dèiem, i les dues successions són de la forma
$$\begin{matrix} + & - & \cdots, \\ - & - & \cdots, \end{matrix}$$
i hem perdut un canvi de signe.

En definitiva, la successió dels signes perd un canvi de signe quan passem per un zero de l'equació polinòmica de $P(X) = 0$, i només en aquest cas. Per tant, $N(x)$ és decreixent i va comptant els zeros de $P(X) = 0$, quan $x$ recorre $(a, b)$.

1 Exemple Volem determinar les arrels reals del polinomi $X^5 - 3X - 1$ als intervals $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$.

$$\begin{aligned} F_0(X) &= X^5 - 3X - 1, \\ F_1(X) &= 5X^4 - 3, \\ F_2(X) &= 12X + 5, \\ F_3(X) &= 12. \end{aligned}$$

Aleshores

| $x$ | $F_0(X)$ | $F_1(X)$ | $F_2(X)$ | $F_3(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $-2$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $-1$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $0$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $+1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $+2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $+\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Hi ha, doncs, tres arrels reals: una entre $-2$ i $-1$, l'altra entre $-1$ i 0, i la darrera entre $+1$ i $+2$.

2 EXEMPLE Tota quíntica de la forma $X^5 - aX - b$, amb $4^4a^5 - 5^5b^4 > 0$, té tres arrels reals i dues de complexes.

□

**El resultat de Kronecker**

L'any 1856, Leopold Kronecker (1823–1891) va donar una demostració diferent de la impossibilitat de resoldre la quíntica per radicals, i va trobar quíntiques *concretes* que no eren resolubles per radicals. De fet, va establir el teorema següent ([103, p. 203]): «Qualsevol equació polinòmica de grau primer senar, irreductible en $\mathbb{Q}$, resoluble per radicals, només posseix una arrel real o totes ho són, de reals.»[128]

Ara, ho apliquem a la quíntica $x^5 - ax - b = 0$, amb $a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 0$, divisibles per un nombre primer $p$ tal que $p^2$ no divideixi $b$,[129] amb $4^4a^5 > 5^5b^4$.[130] Per tant, no és resoluble per radicals. Anàlogament, $X^7 - aX - b = 0$, si hi ha un nombre primer $p$ que divideix $a$ i $b$, però $p^2$ no divideix $b$, amb $6^6a^7 > 7^7b^6$. (Vegeu Dörrie, H. [44], edició anglesa de 1965, 116–127.)

## 5 On reapareixen les funcions el·líptiques

Hem vist que Niels Henrik Abel, que, amb Jacobi, ha introduït les funcions el·líptiques, ens diu que les arrels d'una quíntica general —que sabem que existeixen en el camp $\mathbb{C}$ dels nombres complexos— no són calculables d'una forma algèbrica senzilla, com és la resolució per radicals. Però no diu res sobre altres camins possibles per resoldre-la. Això ho farà un matemàtic francès, Charles Hermite. Però el més curiós i interessant —i és el que vull remarcar aquí— és la forma com ho fa per resoldre la quíntica. Recorre a les funcions el·líptiques.[131] Era l'any 1858. Havien passat trenta-quatre anys des que Abel havia demostrat la impossibilitat de la resolució de la quíntica per radicals,[132] i trenta-u des que havien introduït les funcions el·líptiques.

128 Fixem-nos que una arrel d'una equació polinòmica de grau senar, sempre té una arrel real. Bé, doncs, si és irreductible i de grau primer, el fet que sigui resoluble per radicals dóna una condició sobre la naturalesa de la totalitat de les arrels.

129 El *criteri d'Eisenstein*, en honor de Ferdinand Gotthold Einsenstein (1823–**1852**), de 1846, garanteix la irreductibilitat de la quíntica.

130 El criteri de Sturm diu que té tres arrels reals i dues de complexes.

131 Hermite, C. [82]. Vegeu les exposicions de Bottazzini, U. [24], o el capítol setè de l'excel·lent text de King, R. B. [100].

132 L'any 1783 el matemàtic suec Erland Samuel Bring (1736–1798) va provar que la quíntica es pot posar en la forma $P(x, A) = 0$, on $P(x, A)$ és un polinomi de cinquè grau els coeficients del qual són funcions racionals del paràmetre $A$. L'any 1834, George Birch Jerrard (1804–1863) va demostrar que sempre és possible transformar una equació polinòmica de grau $n$ en una altra, també de grau $n$, que no contingui els termes de grau $n-1, n-2$ i $n-3$. Per fer-ho es va basar en el *mètode de Tschirnhaus*, degut al matemàtic Ehrenfreid Walter von Tschirnhaus

Hermite *resol*, doncs, la quíntica general.[133] Per aconseguir-ho parteix, com dèiem, de la reduïda de Bring-Jerrard

$$X^5 - X - a = 0.^{134}$$

Aleshores considera els períodes $K$ i $K'$ de la integral el·líptica

$$\int_0^{\phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}}.$$

Considera

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}} \quad \text{i} \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \Phi}},$$

on $k + k'^2 = 1$, amb $0 < k < 1$. Ara fa

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Però, d'acord amb els resultats obtinguts per Abel [5, p. 470 i 475] i Jacobi [94, p. 146], les arrels quartes dels mòduls $k$ i $k'$ es poden posar com a sèries de

(1651–1708), que data de l'any 1683. La idea de l'alemany era transformar

$$X^n + a_X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0,$$

usant l'equació auxiliar

$$X^{n-1} = b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1} + Y$$

i eliminant $Y$. S'obté

$$Y^n + c_1Y^{n-1} + \cdots + c_{n-1}Y + c_n = 0,$$

on els coeficients $c_k$ depenen dels $b_k$. Estava convençut que podria determinar els $b_k, k = 1, 2, \ldots, n-1$, de manera que els $c_k = 0$. És a dir, de manera que l'equació inicial es transformés en $Y^n + c_n = 0$. Per a $n = 5$, Jerrard, usant el mètode de Tschirnhaus, va aconseguir transformar la quíntica en l'equació

$$X^5 + X + a = 0.$$

És d'aquí que parteix Hermite en el seu treball. Cal indicar que, l'any 1854, l'italià Enrico Betti (1823–1892), usant la transformació $X^5 + 5X^3 = Y$ i diferenciant obté $5X(X^2 + 3)dX = dY$. Eliminant $X$ de l'equació anterior i de $X^2 + 3 = 0$, després de fer alguns càlculs, obté l'equació diferencial

$$\frac{dY}{5(Y^2 + 108)^{\frac{1}{2}}} = \frac{X^2 dX}{(X^6 + 4X^4 - 8X + 12)^{\frac{1}{2}}}.$$

El membre de l'esquerra és integrable amb funcions elementals, però el de la dreta es transforma en una integral el·líptica, si fem $Z = X^2$.

133 Hermite s'adona del fet que $X^3 - 3X + 2a = 0$ es pot resoldre fent $a = \sin\alpha$. Aleshores les arrels se separen en les tres funcions ben determinades

$$2\sin\frac{1}{3}\alpha, \;\; 2\sin\frac{1}{3}(\alpha + 2\pi), \;\; 2\sin\frac{1}{3}(\alpha + 4\pi).$$

La idea és veure si això es pot generalitzar d'alguna manera amb funcions més complexes que no pas el sinus, però que, d'alguna manera, siguin del mateix tipus, encara que més generals.

134 Fixem-nos en la nota 27.

potències de $q$. És a dir,

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}\frac{\sum q^{2m^2+m}}{\sum q^{m^2}}, \quad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^m q^{2m^2}}{\sum q^{m^2}}.$$

Ara fa $q = e^{i\pi\omega}$ i obté $\sqrt[4]{k} = \varphi(\omega)$ i $\sqrt[4]{k'} = \psi(\omega)$,[135] que compleixen les propietats següents:

$$\begin{aligned}
&\varphi^8(\omega) + \psi^8(\omega) = 1,\\
&\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right) = \psi(\omega),\\
&\varphi(\omega+1) = e^{\frac{i\pi}{8}}\frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)},\\
&\psi(\omega+1) = \frac{1}{\psi(\omega)}.^{136}
\end{aligned}$$

Per a $n$ primer, fa $v = \varphi(n\omega), u = \varphi(\omega)$. Aquests paràmetres estan lligats per una equació polinòmica de grau $n+1$, quan $n = 5, 7$ i $11$, que avui coneixem amb el nom d'*equació modular*, les arrels de les quals tenen algunes propietats especials.[137]

Per a $n = 5$, l'equació modular és

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0, \tag{20}$$

les arrels de la qual són

$$-\varphi(5\omega) \quad \text{i} \quad \varphi\left(\frac{\omega + 16m}{5}\right),$$

on $m = 0, 1, 2, 3$ i $4$.[138]

Ara ja pot relacionar la sèxtica (20) amb la quíntica de Bring-Jerrard. Per fer-ho considera la funció de les sis arrels de l'equació (20):

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) = \left(\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right)\left(\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+64}{5}\right)\right)&\\
\left(\varphi\left(\frac{\omega+32}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+48}{5}\right)\right).&
\end{aligned} \tag{21}$$

135 Vegeu l'observació que fa King, R. B. [100, p. 129] sobre la variable $\omega$ d'Hermite que ell anomena $\tau$.

136 Es dedueix que

$$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) \quad \text{i} \quad \psi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)$$

s'expressen en funció de $\varphi(\omega), \psi(\omega)$, on $a, b, c$, i $d$, són enters arbitraris, lligats per $ad-bc = 1$.

137 Aquest resultat el trobem a la carta testament d'Évariste Galois de l'any 1832 ([64], edició de 1962, 177–179).

138 En general les $n+1$ arrels $u$ de l'equació modular són de la forma

$$\epsilon\varphi(n\omega) \quad \text{i} \quad \varphi\left(\frac{\omega+16m}{n}\right),$$

on $m \in \mathbb{Z}_n$, i $\epsilon = \pm 1$, segons que el 2 sigui residu quadràtic mòdul $n$ o no.

Les cinc quantitats $\Phi(\omega), \Phi(\omega+16), \Phi(\omega+32), \Phi(\omega+48)$ i $\Phi(\omega+64)$ són les arrels de la quíntica

$$\Phi^5 - 2000\varphi^4(\omega)\psi^{16}(\omega)\Phi - 1600\sqrt{5}\varphi^3(\omega)\psi^{16}(\omega)\big(1+\varphi^8(\omega)\big) = 0, \quad (22)$$

els coeficients de la qual són funcions racionals de $\varphi(\omega)$.

Ara fa

$$\Phi = \sqrt[4]{2^4 5^3}\varphi(\omega)\psi^4(\omega)X,$$

i obté la quíntica de Bring-Jerrard

$$X^5 - X - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\frac{1+\varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\psi^4(\omega)} = 0.$$

Aleshores, per tal d'aconseguir les arrels de la quíntica de Bring-Jerrard per mitjà de la funció $\Phi(\omega)$, fa $a = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\frac{1+\varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\psi^4(\omega)}$ i considera el mòdul indeterminat de l'el·líptica $k = \varphi^4(\omega)$ com a incògnita, recordant que $\psi^4(\omega) = k'$. Obté la quàrtica

$$k^4 + A^2k^3 + 2k^2 - A^2k + 1 = 0,$$

amb $A = \frac{1}{\sqrt[4]{5^5}}a$, la qual admet una solució algèbrica. Fent $\sin\alpha = \frac{1}{4A^2}$, troba que les arrels s'expressen

$$k = \tan\frac{1}{4}\alpha, \quad \tan\frac{1}{4}(\alpha+2\pi), \quad \tan\frac{1}{4}(\pi-\alpha), \quad \tan\frac{1}{4}(3\pi-\alpha).$$

Les solucions de la quíntica de Bring-Jerrard estan determinades per l'expressió següent:

$$x_i = \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}}\frac{\Phi(\omega+16i)}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)}, \quad i = 0,1,2,3,4.$$

Per acabar la seva exposició Hermite considera la possibilitat de calcular aquestes arrels numèricament, observant que les sèries infinites que defineixen $\varphi(\omega)$ i $\psi(\omega)$ convergeixen molt ràpidament, si $q$ té component imaginària. Amb $Q = \sqrt[5]{q}$, obté

$$\Phi(\omega) = \sqrt{2^3 5}\sqrt[8]{Q^3}(1 + Q - Q^2 + Q^3 - 8Q^5 - 9Q^6 + \cdots),$$

$$\Phi^2(\omega) = 2^3 5\sqrt[4]{Q^3}(1 + 2Q - Q^2 + 3Q^4 - 18Q^5 - 33Q^6 + 14Q^7 + \cdots),$$

$$\Phi^3(\omega) = \sqrt{2^9 5^3}\sqrt[8]{Q^9}(1 + 3Q - 2Q^3 + 6Q^4 - 24Q^5 - 79Q^6 + \cdots),$$

on, respectivament, falten les potències de $Q$ congruents amb $4, 3$ i $2$ mòdul 5.

L'efecte que té en $Q$ canviar $\omega$ per $\omega + 16m$ consisteix a multiplicar $Q$ per les arrels quíntiques de la unitat diferents.[139]

139 Val a dir que l'any 1858, inspirat en el treball d'Hermite, Francesco Bioschi (1824–1897) va

## 6 On apareixen els nombres $e$ i $\pi$

Acabem de veure que hi ha un lligam entre les funcions el·líptiques i la resolubilitat de la quíntica. Amb aquest exemple ens adonem que el descobridor d'un mètode no sempre s'adona de la potència i possibilitats d'allò que ha descobert. D'una banda, Abel féu una aportació important en el camp de les funcions el·líptiques i, d'una altra, contribuí moltíssim a comprendre les quíntiques. Tanmateix no s'adonà de les possibilitats que les funcions el·líptiques tenen per a la resolució de la quíntica.

Bé doncs, aquest fet no és rar, com veurem en aquesta secció, on analitzarem una aportació matemàtica nova, amb la qual clourem aquesta història breu d'algunes qüestions i resultats matemàtics.

De moment, atès que hem parlat de polinomis, podem fer-nos la pregunta següent:

> *Quins són els nombres reals o complexos que podem aconseguir com a arrels de polinomis?*

Aquesta pregunta, feta amb tanta generalitat, no té cap mena de sentit.[140] Cal, doncs, restringir el domini dels coeficients del polinomi al cos $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals, o a l'anell $\mathbb{Z}$ dels enters.

Amb aquesta precisió els nombres complexos es classifiquen en *nombres algèbrics* i *nombres transcendents*:

> *Un nombre $z \in \mathbb{C}$ és* algèbric *(de grau $n$) si, i només si, és l'arrel d'un polinomi (irreductible) de grau $n$,*
>
> $$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0,$$
>
> *amb $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$.*

La qüestió de la transcendència dels nombres, com gairebé tots els problemes matemàtics, té una història que ve de lluny. De fet, ve de tan lluny com Grècia. Nosaltres, però, defugirem l'anàlisi de les aportacions incipients gregues.[141] Com ja hem indicat abans, ens situarem en el moment del naixement

trobar un camí basat en la resolució de Jacobi de l'equació diferencial

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{P(y)}} = \frac{dx}{\sqrt[4]{P(x)}},$$

on $P(x)$ és un polinomi de quart grau, que data de 1827–1828. Serà, però, Kronecker qui establirà el mètode amb tota mena de rigor, l'any 1861, que serà completat, l'any 1866, per Hermite. Una altra solució la donà l'any 1878 Paul Albert Gordan (1837–1912). El seu mètode, basat en la *teoria d'invariants*, és un mètode alternatiu al d'Hermite.

140 Si no precisem el domini dels coeficients del polinomi resulta que el problema és massa general. Si el domini és $\mathbb{R}$, aleshores tot nombre complex és una arrel d'un polinomi. Si $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, aleshores $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = 0$ és un polinomi amb coeficients reals que té l'arrel $\alpha + i\beta$.

141 Malgrat que la matemàtica grega va defugir el concepte de nombre com a mesura de les magnituds per la seva possible incommensurabilitat i, com a alternativa, va elaborar la *teoria de les proporcions*, hem de considerar que les seves idees són, quan les traduïm al llenguatge

de la concepció numèrica i del concepte de funció, al bell mig del segle XVII. És precisament en aquest moment quan es planteja la qüestió de si «una magnitud variable depèn algèbricament d'altres». Aquesta qüestió és força natural atès que, com ja hem vist a la pàgina 55, la primera manera d'establir lligams matemàtics fou l'algèbrica. Així, per exemple, James Gregory, a *Vera Circuli et Hyperbola Quadratura* (1667), intenta demostrar que «l'àrea d'un sector circular no es pot posar com a funció algèbrica del radi i de la corda». (Vegeu Gregory, J. [80, proposició XVI].)

Fou, però, Leibniz ([118, p. 97–98]) qui demostrà que la funció sinus de $x$ no és funció algèbrica de $x$, provant, de retruc, el resultat de Gregory.

Serà Leonhard Euler qui aprofundirà i consolidarà l'estudi del concepte de funció ([55],traducció castellana de 2000, 13–27) i també qui, l'any 1744, farà la distinció entre *nombre algèbric* i *nombre transcendent*. (Vegeu Kline, M. [101], edició castellana de 1992, II, 785 i [55]. Traducció castellana de 2000, pàgina 118, per a la irracionalitat de $\pi$, i pàgina 18 per a la transcendència.) Malgrat que ningú no havia aclarit encara la naturalesa exacta dels nombres irracionals perquè ningú no havia fonamentat encara què eren —i qui eren— els nombres reals, durant la primera meitat del segle XVIII es féu un avenç important,[142] en aclarir la naturalesa irracional dels nombres $e, e^2, \pi$ i $\pi^2$.

L'any 1737, Euler va demostrar essencialment el caràcter irracional de $e$ i de $e^2$, encara que, en 1714, Roger Cotes ja havia aconseguit expressar $e$ per mitjà de la fracció contínua simple:

$$e = [[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}},$$

que n'implica la irracionalitat. (Cotes, R. [33], i Euler, L. [53, p. 121–122]). La irracionalitat de $\pi$ trigà una mica més. L'establí Johann Heinrich Lambert, l'any 1761. (Vegeu Lambert, J. H. [110], Berggren, L., Borwein, J. i Borwein, P. [11, p. 129–276].)[143]

algèbric, la base del que, amb el pas dels segles, seria l'existència i naturalesa dels nombres reals.

142 Com anirem veient, en aquest context conceptual són molt importants les *fraccions contínues*.

143 Com observa Henri Lebesgue, a [113], la demostració es basa en dos fets. D'una banda en el fet d'expressar la funció $\tan x$ en fracció contínua, desenvolupant el sinus i el cosinus en sèries

Així, d'una forma relativament senzilla, Lambert aconsegueix resoldre el problema de la irracionalitat de $e$ i $\pi$. Poc temps després, amb els mateixos mètodes, Legendre estableix que $\pi^2$ també és irracional.[144]

De fet, el primer matemàtic que, a Occident,[145] va obtenir una expressió per a calcular $\pi$ fou François Viète. L'expressió era

$$\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdots .^{146}$$

L'any 1665, John Wallis (1616–**1703**),[147] a l'obra *Arithmetica Infinitorum*, es va plantejar la qüestió de determinar el valor de la integral que donava l'àrea d'un quart de cercle. És a dir, la quadratura

---

de potència i dividint formalment com si fossin polinomis. N'obté

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{\ddots-\cfrac{x^2}{(2k-1)-\ddots}}}}}=\frac{x}{1-}\,\frac{x^2}{3-}\,\frac{x^2}{5-}\cdots\frac{x^2}{(2k-1)-}\cdots .$$

L'altre fet és el lema següent: $\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots$ *una fracció contínua il·limitada que convergeix cap un nombre real* $x$*. Suposem que, per a tot* $i$*,* $|a_i|<|b_i|$*. Aleshores:*

*1)* $|x|\le 1$*;*

*2) Si* $x_n$ *és el límit de* $\frac{a_n}{b_n+}\,\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}+}\,\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}+}\cdots$ *i, per a tot natural* $n, x_n\neq\pm 1$*, aleshores* $x$ *és irracional.*

Conjuntant aquests dos resultats, per a $x=\frac{\pi}{4}$, tenim que $\frac{\pi}{4}$ és irracional. I, en general, si $x\in\mathbb{Q}$, no nul, aleshores $\tan x$ és irracional. També es pot veure que, per a tot valor racional $x\neq 0$, $\tanh x$ i $e^x$ són irracionals.

144 Legendre, A.-M. [115]. Observa que

$$\tan\pi=0=\frac{\pi}{1-}\,\frac{\pi^2}{3-}\,\frac{\pi^2}{5-}\,\frac{\pi^2}{7-}\cdots .$$

Per tant, $1-\frac{\pi^2}{3-}\,\frac{\pi^2}{5-}\,\frac{\pi^2}{7-}\cdots$ és divergent vers l'infinit. Això fa que $3-\frac{\pi^2}{5-}\,\frac{\pi^2}{7-}\cdots=0$. Aleshores, $3=\frac{\pi^2}{5-}\,\frac{\pi^2}{7-}\cdots$, que, d'acord amb el lema anterior, prova la irracionalitat de $\pi^2$.

145 A l'Índia, al segle XV, ja s'havia aconseguit desenvolupar la funció $\arctan x$ en sèrie de potències (Rajacoal, C. T. i Rangachari, M. S. [161] i [162]). Aquest resultat el retrobaria James Gregory, l'any 1663, i el comunicaria a John Collins (1625–1683) el 15 de febrer de 1671. (Vegeu Turnbull, H. W. [180, p. 170]).

146 Viète, F. (1593), a [187, p. 398–400]. Vegeu [11, p. 53–67]. Tot rau a veure $\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=2\cos\frac{x}{2}$, i a identificar el perímetre d'un polígon regular d'infinits costats amb la circumferència.

147 Va néixer a Ashford, el 3 de desembre de 1616, i va morir a Oxford, el 28 d'octubre de 1703.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Ho féu amb un mètode d'*interpolació* molt original i aconseguí

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times\cdots}{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times\cdots}.$$ [148]

És ben conegut el fet que William, lord Brouncker (1620–1684) s'adonà que l'expressió de Wallis es podia transformar en la fracció contínua

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2 - \cfrac{3^2}{2 - \cfrac{5^2}{2 - \cfrac{7^2}{\ddots}}}}.$$

Malgrat els intents de Wallis per provar-ho ([192, p. 469–471]), el primer a fer-ho fou Euler [55, p. 372]. Així doncs, veiem que, durant la segona meitat del segle XVII i tot el segle XVIII, una bona aproximació als nombres reals fou l'ús de les fraccions contínues.[149]

148 Vegeu Wallis, J. [192, proposició 191, p. 469]. Per poder fer la interpolació, abans havia de calcular les integrals de la forma $\int_0^1 x^{\frac{m}{n}}\, dx$. Aleshores integrar $I_{m,n} = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^m$ era fàcil. Només calia aplicar la llei del binomi i la linealitat de la integral. Aleshores el problema era integrar

$$\int_0^1 (1-x^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Estén les propietats que dedueix d'una taula 10 per 10 de les integrals $I_{m,n}$. (Vegeu l'excel·lent exposició d'Edwards, C. H. [48, p. 171–176].)

149 Vegeu Miralles, J. [140]. Deixant de banda els qui opinen que les fraccions contínues són ja en l'anàlisi que 'Umar Khayyām fa de les irracionalitats euclidianes ([99], edició francesa de 1999, 340–382) en un intent de millorar la presentació d'Euclides (III aC), la primera vegada que apareix una fracció contínua és a l'*Àlgebra* (1572) de Bombelli —en el mateix text en què apareixen, també per primera vegada, els nombres complexos [23, p. 37–39]. Les presenta com un mètode alternatiu per calcular arrels quadrades. No n'aprofundeix l'estudi. Aquesta tècnica —calcular arrels quadrades per mitjà de fraccions contínues— serà represa per un matemàtic de la Universitat de Bolonya, l'any 1613. (Vegeu [31]). Hi va viure, a Bolonya, des del dia del seu naixement, el 15 d'abril de 1548, fins a la seva mort, esdevinguda l'11 de febrer de 1626. M'estic referint a Pietro Antoni Cataldi (1548–1626). (No hi ha un acord total sobre l'any del naixement de Cataldi. Hi ha autors, com ara Gillespie, C. C., que l'estableixen el 15 d'abril de 1552, [75, I, p. 426]. En canvi, Young [205, p. 102] li atribueix, com a data de naixement, l'any 1548, que sembla el que està més acceptat.) Serà, però, John Wallis [191, p. 474–476] el que introduirà el terme *fracció contínua* i qui en farà el primer estudi, encara que molt elemental. Aquesta anàlisi seria represa per Leonhard Euler, l'any 1737 [53]. Serà, però, Lagrange el matemàtic que farà l'estudi més elaborat i complet de les fraccions contínues de $\sqrt{A}, A \in \mathbb{Z}, A > 0$, no quadrat perfecte, i demostrarà que $\sqrt{A} = [[a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1; 2a_0}]]$. Aquest estudi li permetrà, entre d'altres resultats, demostrar que l'equació de Pell $X^2 - AY^2 = 1$ té sempre infinites solucions i que totes es troben entre les convergents del desenvolupament en fracció contínua de la $\sqrt{A}$ ([105] i [107]).

No és, doncs, estrany que el camí seguit per Lambert per veure que, per a cada $x \in \mathbb{Q}$, els valors que prenen les funcions $e^x$ i $\tan x$ són nombres irracionals sigui el camí força conegut de les fraccions contínues.[150]

La qüestió de la transcendència dels nombres reals, molt més recent, anirà per uns altres camins. Euler conjecturà que, si $q \in \mathbb{Q}$, aleshores $\ln q$ és transcendent.[151] Tanmateix, a començaments del segle XIX, ningú no sabia encara amb certesa si existien nombres transcendents. Fou a mitjan segle XIX, exactament l'any 1844, quan Joseph Liouville va demostrar que els nombres de la forma

$$\xi = \frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \frac{a_4}{10^{4!}} + \cdots + \frac{a_k}{10^{k!}} + \cdots ,$$

on els $0 \leq a_i \leq 9$, són transcendents.[152] Aquesta és una demostració

---

150 Ja Euler, en el seu estudi de les fraccions contínues, en veure que una fracció contínua representa un nombre racional si, i només si, el desenvolupament és finit [53, p. 194], havia demostrat implícitament la irracionalitat de $e$ i de $e^2$ [53, p. 203–204]. Li va mancar veure que la representació d'un nombre real per fraccions contínues és única, si imposem, en el cas finit, que el darrer quocient $a_n \neq 1$.

151 Vegeu [55], edició castellana de 2000, 90–91. També havia conjecturat la transcendència de $e$ i de $\pi$, conjectura que fou assumida completament per Lambert.

152 Liouville, J. [135]. Es basa en el lema següent: *Si $x$ és un nombre algèbric, no racional, de grau $\leq n$, existeix una constant $c > 0$ tal que, per a tot nombre racional $\frac{p}{q}$, amb $q > 0$, es compleix la desigualtat*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{cq^n}.$$

La demostració es basa en el *teorema dels increments finits* i en el fet que la derivada d'un polinomi, atès que és contínua, està fitada en l'interval $[x-1, x+1]$. En concret, sigui $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ un polinomi (irreductible), no nul, amb coeficients enters que tingui l'arrel $x$, i $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Aleshores

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{|a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n},$$

atès que el numerador és un nombre enter no nul.

El teorema dels increments finits diu que

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = P\left(\frac{p}{q}\right) - P(x) = \left(\frac{p}{q} - x\right) P'(\theta),$$

on $\theta \in (x-1, x+1)$ de manera que $|P'(\theta)| < M$, per a una certa constant $M > 0$.

Per a tot nombre racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left|\frac{p}{q} - x\right| \leq 1$ i $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, en resulta la desigualtat

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{P\left(\frac{p}{q}\right)}{P'(\theta)} \right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Només hi ha una quantitat finita de nombres racionals $\frac{p}{q}$ tals que $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Per tant, existeix una constant $c_1 > 0$ tal que $\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_1q^n}$ per a aquests racionals. Finalment, per als nombres racionals que no es troben a l'interval $(x-1, x+1)$ tenim que $\left|x - \frac{p}{q}\right| > 1 \geq \frac{1}{q^n}$. Cal, doncs, agafar $c = \sup(M, c_1, 1)$. □

Ara ja podem veure que $\xi$ és un nombre transcendent. Considerem, per a $n > \nu$, amb $\nu$ enter fix, el nombre racional $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{p}{q}$, amb $q = 10^{n!}$, que és la suma dels $n$ primers directa —és a dir, estableix la veracitat de l'afirmació «existeixen nombres transcendents», mostrant-ne alguns testimonis concrets. L'any 1874, Georg Cantor (1845–1910) donaria una demostració totalment indirecta. Establiria l'existència d'una gran quantitat de nombres transcendents, però sense mostrar-ne cap de concret.[153] Ens trobem, de bell nou, amb l'existència d'objectes matemàtics sense construcció.

Les dues demostracions anteriors, però, no aclarien ni la transcendència de $e$ ni de $\pi$. La primera demostració en aquest sentit data de l'any 1873 i l'aconseguí Charles Hermite [83]. (Vegeu Berggren, L. *et al.* [11, p. 162–192].) El seu teorema estableix que $e$ és transcendent, fitant unes quantitats obtingudes integrant unes funcions aconseguides a partir de la funció

$$F(z) = (z - z_0)^{\mu_0}\,(z - z_1)^{\mu_1}\;\cdots\;(z - z_n)^{\mu_n}$$

i les seves derivades.[154] Malgrat aquest èxit i el mètode introduït en la demostració, no va aconseguir demostrar la transcendència de $\pi$. A més estava convençut que no s'aconseguiria pas sense molt d'esforç, segons podem comprovar llegint el paràgraf següent de la carta adreçada a Carl Wilhelm Borchard (1817–1880):

> *No m'atreveixo a provar la transcendència de $\pi$. Si algú ho aconsegueix ningú no se n'alegrarà més que jo. Però, creu-me amic meu!, li costarà molt d'esforç.*

(Citat a Kline [101], edició castellana de 1992, III, 1295.)

Aquest resultat l'aconseguí Ferdinand Lindemann (**1852**–1939), un matemàtic alemany, nascut ara fa cent-cinquanta anys.[155] Era l'any 1882, menys de deu anys després de la demostració d'Hermite. Però el més curiós és que el mètode de Lindemann segueix les mateixes pautes que el d'Hermite.

Com dèiem en considerar la solució d'Hermite de resolució de la quíntica, usant les funcions el·líptiques introduïdes per Abel, és molt corrent que el qui descobreix un mètode no aconsegueixi treure-li tot el suc que conté.[156]

De fet, Lindemann ([128], vegeu Berggren, L. *et al.* [11, p. 194–206]) demostra el teorema següent:

---

nombres de la sèrie $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{10^{k!}}$ que defineix $\xi$. Tenim que

$$0 < \xi - \frac{p}{q} = 10^{-(n+1)!} + 10^{-(n+2)!} + \cdots < 10^{(n+1)!}(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots) < 2\times 10^{-(n+1)!} < 2\,q^{-n}.$$

Per tant, $q^{\nu}|\xi - \xi_n| < \frac{2}{q^{n-\nu}}$ tendeix cap a 0, quan $n$ tendeix a $\infty$. Pel lema de Liouville, $\xi$ no és algèbric de grau $\leq \nu$. Però $\nu$ és un enter natural arbitrari. Per tant, $\xi$ és algèbric.

153 Estableix que la «majoria» —una quantitat no numerable— de nombres reals són transcendents atès que $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, on $\mathbb{A} \cap \mathbb{T} = \emptyset$, i que el cardinal de $\mathbb{A}$ és numerable. Aleshores necessàriament, $\mathbb{T}$ té el mateix cardinal que $\mathbb{R}$. Vegeu Cantor, G. [27, p. 115–116].

154 És una demostració barroca, difícil de seguir. Vegeu Smith, D. E. [171], edició de 1959, 99–103.

155 Va néixer a Hannover el dia 12 d'abril de 1852 i va morir a Munic el 6 de març de 1939. És, doncs, contemporani de Gaudí i Verdaguer.

156 Val a dir que no és gens fàcil demostrar la transcendència d'un nombre real i, a vegades,

*Si $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n \in \mathbb{C}$, diferents, i $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$, són nombres algèbrics, no tots nuls, la suma*

$$p_1 e^{z_1} + p_2 e^{z_2} + \cdots + p_{n-1} e^{z_{n-1}} + p_n e^{z_n}$$

*mai no pot ser zero.*

D'aquest resultat en resulta trivialment que:

1) Si $z_1$ és algèbric $\neq 0$, aleshores $e^{z_1}$ mai no és algèbric.
   Només cal fer $n = 2, p_1 = 1, p_2 = -e^{z_1}$ i $z_2 = 0$, en la hipòtesi que $e^{z_1}$ sigui algèbric. Contradicció!
   Per tant, $e^{z_1}$ és transcendent.
2) Atès que $e^{i\pi} + 1 = 0$, en resulta que $\pi$ és transcendent.
   Si fos algèbric i $i\pi$ també ho fóra. Aleshores, fent $n = 2, p_1 = 1, z_1 = i\pi, p_2 = 1$ i $z_2 = 0$, tindríem una contradicció amb la proposició de Lindemann.
3) Les funcions sin, cos, sinh i cosh no passen per cap punt algèbric, llevat del que té l'abscissa 0. Per exemple,
   $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$
   Si $\cos z$ fos algèbric quan $z$ és algèbric, aleshores tindríem
   $$e^{iz} + e^{-iz} - 2\cos z = 0.$$

Impossible!

En resulta, doncs, que la catenària és una corba molt astuta en el sentit que evita els punts algèbrics, que són *densos* en el pla real $\mathbb{R}^2$.

Per acabar m'ha semblat d'interès veure que, efectivament, el mètode d'Hermite proporciona el de Lindemann. Per això oferim la demostració d'ambdós teoremes. És una demostració alterada, però que s'ajusta a les demostracions originals, i que alhora permet veure les analogies i diferències entre ambdues demostracions:

6 Teorema (Teoremes d'Hermite i Lindemann) *Siguin $z_0, z_1, \ldots, z_n$ nombres algèbrics, reals o complexos, diferents, i $b_0, b_1, \ldots, b_n$ nombres algèbrics, no tots nuls. Aleshores la quantitat*

$$b_0 e^{z_0} + b_1 e^{z_1} + \cdots + b_n e^{z_n} \tag{23}$$

*mai no és nuŀla.*

fins i tot de la irracionalitat. Per exemple, no sabem si la *constant d'Euler* [51, p. 156–157]:

$$\gamma = \text{lím}_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \ln n\right) \simeq 0'577216\ldots,$$

que computa la sèrie harmònica —divergent— per mitjà de la funció logaritme —molt rellevant en l'estudi de les funcions gamma i zeta— és racional o irracional. Vegeu [159].

La demostració la farem a poc a poc, a passos.

DEMOSTRACIÓ:

I. **Les fórmules d'Hermite**. Siguin $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathbb{C}$ i $n_0, n_1, \ldots, n_m$, enters positius. Fem

$$F(y) = (y - \omega_0)^{n_0}(y - \omega_1)^{n_1} \cdots (y - \omega_m)^{n_m}$$

i

$$F(x, y) = \frac{F(y)}{x} + \frac{F'(y)}{x^2} + \cdots + \frac{F^{(N)}(y)}{x^{N+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k-1} F^{(k)}(y),$$

on $N = \sum_{k=0}^{m} n_k$. És clar que, pel mètode d'integració per parts,

$$\int F(y)e^{-xy}dy = -F(x, y)e^{-xy}. \tag{24}$$

Per a $k, \ell = 0, 1, \ldots, m$, considerem les funcions

$$A_k(x) = x^{N+1}F(x, \omega_k),$$

$$R_{k,\ell}(x) = x^{N+1}e^{\omega_k+\omega_\ell} \int_{\omega_k}^{\omega_\ell} F(y)dy\,.$$

De (24) s'obtenen les *identitats d'Hermite*:

$$A_k(x)e^{\omega_\ell x} - A_\ell(x)e^{\omega_k x} = R_{k,\ell}(x). \tag{25}$$

Estudiant les derivades de $F(y)$ en els punts $\omega_k$, atès que tots els termes que contenen $(y - \omega_k)^\alpha, \alpha > 0$, s'anul·len, i només queden els que no el contenen, i el de grau més gran s'obté derivant-lo $n_k$ vegades i no derivant cap dels altres factors, resulta que les funcions $A_k(x)$ són polinomis que tenen com a terme de grau màxim:

$$n_k! \prod_{\substack{0 \le \ell \le m \\ \ell \ne k}} (\omega_k - \omega_\ell)^{h_\ell} x^{N-n_k}.$$

Aleshores

$$A_k(x) = n_k! \prod_{\substack{0 \le \ell \le m \\ \ell \ne k}} (\omega_k - \omega_\ell)^{h_\ell} x^{N-n_k} + (n_k + 1)! A_k^*(x),$$

on $A_k^*(x)$ és un polinomi amb els coeficients enters.

De tot això resulta que $R_{k,\ell}(x)$ és una funció entera que s'anul·la per a $x = 0$ amb ordre $N + 1$, com a mínim. Per tant, existeix una constant $c > 0$, que només depèn de $x, \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$, tal que

$$|R_{k,\ell}(x)| \le c^{N+1}.$$

II. **Usem les fórmules d'Hermite**. Fem $x = 1$ i $A_k(1) = A_k$ i $R_{k,\ell}(1) = R_{k,\ell}$. Agafem $m$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_m$. (De fet, en podríem afagar $\mu \leq m$.) De (25) resulta que

$$e^{-\omega_0} A_0 \sum_{k=0}^{m} a_k e^{\omega_k} = \sum_{k=0}^{m} a_k A_k + e^{-\omega_0} \sum_{k=0}^{m} a_k R_{0,k}. \tag{26}$$

Ara fixem $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$, i $a_0, a_1, \ldots, a_m$, i deixem variar els exponents $n_0, n_1, \ldots, n_m$, i fem

$$S = \sum_{k=0}^{m} a_k A_k \quad \text{i} \quad T = \sum_{k=0}^{m} a_k R_{0,k}.$$

Aleshores (26) s'escriu

$$e^{-\omega_0} A_0 \sum_{k=0}^{m} a_k e^{\omega_k} = S + T.$$

De tot el que hem establert a I en resulta que

1) $S$ és un polinomi en $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$, i $a_0, a_1, \ldots, a_m$, els coeficients del qual són enters divisibles per $n!$, on $n = \text{mín}(n_0, n_1, \ldots, n_m)$.
2) Hi ha una constant $C > 0$, que només depèn de $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m, a_0, a_1, \ldots, a_m$, tal que
$$|T| \leq C^{N+1}.$$

III. **La transcendència de *e***. Suposem que $e$ és un nombre algèbric. Aleshores $e$ anul·la un polinomi $P(X) = b_0 X^{k_0} + b_1 X^{k_1} + \cdots + b_M X^{k_m}$, amb $k_0, k_1, \ldots, k_M$ enters positius diferents i $b_0, b_1, \ldots, b_M$ enters, no nuls. Aleshores tenim

$$b_0 e^{k_0} + b_1 e^{k_1} + \cdots + b_M e^{k_m} = 0 \tag{27}$$

Ara fem $m = M$ i $\omega_i = k_i, a_i = b_i, i = 0, 1, \ldots, m$, encara que és possible fer $m \geq M$ i $\omega_j, j = M+1, \ldots, m$, arbitraris. Ara elegim $n_0, n_1, \ldots, n_m$, amb la condició que $n! > C^{N+1}$. Aleshores, atès que $S$ és divisible per $n!$, resulta que

$$S = 0 \text{ o } |S| \geq n!.$$

Ara la condició (26) s'escriu

$$S + T = 0.$$

Però, atès que $|T| \leq C^{N+1}$ i $S = 0$ o $|S| \geq n!$, resulta que $S = T = 0$.

Per tant, tot consisteix a elegir $n_0, n_1, \ldots, n_m$, amb la condició $n_i! \geq C^{N+1}$, tals que $S$ o $T$ sigui no nul. D'aquesta manera arribaríem a una contradicció.

És un estudi elemental d'un sistema lineal de $m+1$ equacions amb $m+1$ incògnites. Elegim $m+1$ successions de $m+1$ enters positius $n_{i,0}, n_{i,1}, \ldots, n_{i,m}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, tals que

$$\Delta = \det\big(A_j(n_{i,0}, n_{i,1}, \ldots, n_{i,m})\big)_{i,j=0,1,\ldots,m} \neq 0.$$

Aleshores, una almenys de les sumes

$$S(n_{i,0}, n_{i,1}, \ldots, n_{i,m}) = \sum_{j=0}^{m} A_j(n_{i,0}, n_{i,1}, \ldots, n_{i,m})\, b_j$$

és no nul·la.

Tot rau, doncs, a provar que aquest $\Delta \neq 0$ existeix perquè aleshores tindrem que $S \neq 0$, que, com hem vist, no és possible. Fem doncs els exponents

$$n_{i,j} = k - \delta_{i,j} = \begin{cases} k-1, & \text{si } i = j, \\ k, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

on $k$ és un enter prou gran. Aleshores, siguin quins siguin els valors de $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$, resulta que

$$A = \big((k-1)!\big)^{m+1} \prod_{0 \le i \neq j \le m} (\omega_i - \omega_j)^k \neq 0.$$

Teorema d'Hermite. Hem vist, doncs, que $e$ és transcendent.

IV. **La transcendència de $\pi$**. Ara agafem $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$, nombres algèbrics de manera que, amb cada un, hi hagi tots els seus conjugats.

Sigui $N$ un nombre enter tal que, per a tot $i = 0, 1, \ldots, m$, $N\omega_i$ sigui un enter algèbric. Suposem que $b_0, b_1, \ldots, b_m$ siguin enters no nuls tals que, si $\omega_j$ és un conjugat de $\omega_i$, aleshores $b_j = b_i$.

Sigui $k$ un enter, $0 \le k \le m$, i $r$ un enter amb

$$(r-1)! > (CN)^{(m+1)r}.$$

Fem

$$n_j = r - \delta_{k,j}, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Aleshores el polinomi

$$\prod_{i=0}^{m} (y - \omega_i)^{r - \delta_{h,i}} = \frac{1}{y - \omega_h} \prod_{i=0}^{m} (y - \omega_i)^r$$

és de la forma $G(y, \omega_h)$, on $G(y, z)$ és un polinomi amb coeficients racionals. Existeix, doncs, un polinomi $H$, amb coeficients racionals, tal que

$$S_h = \sum_{i=0}^{m} b_i \left( \sum_{n=0}^{\infty} F_h^{(n)}(\omega_i) \right) = H(\omega_k).$$

Ara, de l'elecció de $N$ i de la naturalesa dels polinomis $S$, els nombres

$$s_k = \frac{N^{(m+1)r} S_k}{(r-1)!}$$

són enters algèbrics. Si $\omega_i, \omega_j$ són dos nombres complexos conjugats, aleshores $s_i, s_j$, també ho són. Ara bé, sabem que el valor absolut de la norma d'un enter algèbric no nul és $\geq 1$. De tot això resulta:

$$S_0 = S_1 = \cdots = S_m = 0\,,$$

o bé

$$|S_k| \geq \frac{(r-1)!}{N^{(m+1)r}},$$

per a un cert índex $h$, amb $0 \leq h \leq m$.
La suma $T$ és aleshores

$$T_h = e^{-\omega_0} \sum_{k=0}^{m} R_{k,0}(r - \delta_{h,o}, \ldots, r - \delta_{h,m})$$

i, d'acord amb l'elecció de $r$ i de l'afitació de $T$, resulta que

$$|T_h| \leq C^{(m+1)r} < \frac{(r-1)!}{N^{(m+1)r}}.$$

Igual que abans, si existís una relació del tipus

$$b_o e^{\omega_0} + \cdots + b_m e^{\omega_m} = 0,$$

on els $b_i$ i els $\omega_i$ són com els que hem indicat, en resulta que $S_h + T_h = 0, h = 0, 1, \ldots, m$, però novament resulta que $S_h = 0$, per a $h = 0, 1, \ldots, m$, que contradiu el fet que $\Delta \neq 0$.

Teorema de Lindemann. Això implica el teorema de Lindemann en general. Perquè si, amb cada $\omega_i$ no hi ha tots els seus conjugats, aleshores només cal considerar el producte

$$Q = \prod_{\sigma} (\sigma(a_0))e^{\sigma(\omega_0)} + \cdots + (\sigma(a_m))e^{\sigma(\omega_m)},$$

on $\sigma$ recorre totes les extensions del cos $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_m, \omega_0, \ldots, \omega_m)$.
Si

$$a_0 e^{\omega_0} + a_1 e^{\omega_1} + \cdots + a_m e^{\omega_m} = 0,$$

aleshores $Q = 0$. Contradicció!

□

Fixem-nos que Hermite usa que, si $z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$, aleshores $|z| \geq 1$, i Lindemann el fet que, si $\omega_1, \ldots, \omega_m$ són tots els conjugats d'un nombre algèbric

$\omega$, aleshores totes les funcions racionals d'aquests són racionals i que, si $\omega$ és un enter algèbric,[157] no nul, la norma del producte $\omega_1 \times \omega_2 \times \cdots \times \omega_m$ és, en valor absolut, $\geq 1$.

Una versió més actual, i molt més breu i clara, de les demostracions dels teoremes és la següent:

7 TEOREMA (TEOREMA D'HERMITE) . *El nombre e és transcendent.*

DEMOSTRACIÓ: D'entrada observem que, si $P(X)$ és un polinomi amb els coeficients reals, de grau $m$, i si

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u)\, du,$$

aleshores, aplicant reiteradament el mètode d'integració per parts, s'obté

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} P^{(j)}(t). \tag{28}$$

Sigui ara $P^*(X)$ el polinomi que s'obté de $P(X)$ quan canviem cada un dels coeficients pel seu valor absolut. Aleshores

$$\left| I(t) \right| \leq \int_0^t \left| e^{t-u} P(u) \right| du \leq |t| e^{|t|} P^*(|t|). \tag{29}$$

Ara suposem que $e$ és un nombre real algèbric. Això vol dir que existeixen enters $n > 0, q_0 \neq 0, q_1, \ldots, q_n$ tals que

$$q_0 + q_1 e + \cdots + q_n e^n = 0, \tag{30}$$

i compararem dues estimacions diferents de

$$J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \cdots + q_n I(n),$$

on $I(t)$ es defineix com abans, però amb el polinomi

$$P(X) = X^{p-1}(X-1)^p \cdots (X-n)^p,$$

on $p$ designa un nombre primer gran. De (28) i (30), en deduïm:

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k P^{(j)}(k),$$

on $m = (n+1)p - 1$. És clar que

$$P^{(j)}(k) = 0, \text{ si } j < p \text{ i } k > 0, \text{o bé, si } j < p - 1 \text{ i } k = 0.$$

157 És a dir, és l'arrel d'un polinomi unitari amb els coeficients enters.

Per tant, per a tot $j, k$ diferents de $j = p-1, k = 0$, $P^{(j)}(k)$ és un enter divisible per $p!$. A més,

$$P^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p.$$

Per tant, per a $p > n, P^{(p-1)}(0)$ és un enter divisible per l'enter $(p-1)!$, però no per l'enter $p!$. En resulta que, si agafem $p > |q_0|$, aleshores $J$ és un enter, no nul, divisible per $(p-1)!$. Tenim, doncs, que $|J| \geq (p-1)!$.

Però l'afitació evident $P^*(k) \leq (2n)^m$, aplicada a (29), dóna la desigualtat

$$|J| \leq |q_1|\, e\, P^*(1) + \cdots + |q_n|\, n\, e^n\, P^*(n) \leq c^p,$$

per a una certa constant $c$ independent de $p$. Quan $p$ és suficientment gran, les dues desigualtats que fan referència a $|J|$ és contradiuen. Això prova el teorema d'Hermite. □

8 Teorema (Teorema de Lindemann) *El nombre $\pi$ és transcendent.*

Demostració: Suposem contràriament que $\pi$ és algèbric. Aleshores $\theta = i\pi$ també ho serà. Suposem que l'equació polinòmica de la qual $\theta$ és arrel és de grau $d$. Suposem que les solucions complexes d'aquesta equació polinòmica són $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_d$. Sigui $L$ el coeficient del monomi de grau màxim del polinomi minimal de $\theta$, en el qual suposem que els coeficients són primers entre si. Utilitzant l'equació d'Euler $e^{i\pi} = -1$, obtenim

$$(1 + e^{i\theta_1})(1 + e^{i\theta_2}) \cdots (1 + e^{i\theta_d}) = 0. \tag{31}$$

El producte corresponent al costat esquerre de (31) el podem escriure, després de fer les operacions pertinents, com la suma de $2^d$ termes $e^{\Theta}$, on:

$$\Theta = \epsilon_1\theta_1 + \epsilon_2\theta_2 + \cdots + \epsilon_d\theta_d, \text{ on cada } \epsilon = 0 \text{ o } 1. \tag{32}$$

Suposem que $n$ dels nombres $\Theta$ són no nuls i designem-los $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Aleshores obtenim l'equació

$$q + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots + e^{\alpha_n} = 0, \tag{33}$$

on $q$ és l'enter $2^d - n$.

Com abans, farem dues estimacions diferents de $J = I(\alpha_1) + \cdots + I(\alpha_n)$, on $I(t)$ es defineix com en la demostració de la transcendència de $e$, però amb la funció

$$f(x) = L^{np} x^{p-1}(x-\alpha_1)^p \cdots (x-\alpha_n)^p,$$

essent novament $p$ un nombre primer que, per tal d'aconseguir els nostres objectius, haurà de ser gran. De (28) i (33) deduïm

$$J = -q \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k),$$

on $m = (n+1)p - 1$. La suma sobre $k$ és un polinomi simètric en $L\alpha_1, \dots, L\alpha_n$ (entenent que és invariant enfront de la permutació d'aquests nombres) amb coeficients enters. En resulta, d'acord amb el teorema de les funcions simètriques que hem enunciat a la nota 4, que la suma sobre $k$ és un nombre enter. A més, atès que $f^{(j)}(\alpha_k) = 0$, quan $j < p$, el nombre és divisible per $p!$. S'observa també, quan $j \neq p - 1$, que $f^{(j)}(0)$ és un racional divisible per $p!$, i que $f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-L)^{np}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)^p$ és un nombre enter divisible per $(p-1)!$, però no pas per $p!$, sempre que $p$ sigui prou gran. De tot això en resulta que, si $p > q$, tenim que $|J| \geq (p-1)!$.

Ara bé, de (29), en deduïm que per a una certa constant $c$ independent de $p$.

$$|J| \leq |\alpha_1| e^{|\alpha_1|} f^*(|\alpha_1|) + \cdots + |\alpha_1| e^{|\alpha_n|} f^*(|\alpha_n|) \leq c^p,$$

Les dues desigualtats relatives a $|J|$ són incompatibles quan $p$ s'elegeix prou gran. Això acaba la demostració. □

## 7 Cloenda

Una idea —aparentement no gaire coherent ni lògica— com és fer una anàlisi històrica de la matemàtica basada en el fet que els seus protagonistes en els anys 2002 i 2003, que conformen el curs acadèmic 2002–2003, celebrin un cinquantenari o un centenari del naixement o de la mort, ha permès, potser fins i tot en contra de les nostres expectatives, fer una presentació força interessant d'alguns segments de la matemàtica, molt més encara si tenim en compte la important limitació —en la tria de les possibilitats i aspectes— que imposa una simple conferència.

Tanmateix, amb aquesta opció atzarosa hem pogut apreciar, d'una banda, la riquesa enorme de la matemàtica, una riquesa que es tradueix de manera immediata en l'elevat nombre de protagonistes que compleixen la limitació que imposen les dates triades.[158] Però aquesta riquesa no és només en quantitat, sinó que també ho és en qualitat, en objectius per assolir i en perspectives de recerca.

L'anàlisi ha permès veure tres o quatre característiques molt remarcables del quefer matemàtic que constitueixen el nucli de l'exposició i que, com a cloenda, sintetitzarem breument.

En primer lloc, hem observat com alguns problemes es plantegen abans de disposar de les eines mínimes necessàries per poder-los resoldre d'una manera general i independent del problema concret.[159] És el cas del naixement

158 Més de vuitanta. Vegeu l'apèndix.

159 Malgrat que, sobretot als segles XVI i XVII, molts problemes es resolien *ad hoc*, és a dir, basant-se en les peculiaritats particulars del problema, una de les recerques permanents i importants de la matemàtica és aconseguir mètodes generals que, fins i tot quan tenen l'origen en un problema o una família de problemes concrets, s'alliberin del caràcter particular per esdevenir prou generals per poder ser aplicats amb un cert èxit a d'altres problemes que, inicialment, no formaven part del nucli inicial. (Vegeu [85].)

de la primera equació diferencial —la recerca d'una corba basant-se en certes característiques de la seva tangent: els anomenats, als segles XVI i XVII, *problemes inversos* i, actualment, *equacions diferencials.* El fet de trobar el llengutge i la tècnica —o metodologia— adequats per a la seva resolució va generar tot seguit una quantitat d'expectatives que podien quedar frustades per la complexitat del camp que s'acabava de descobrir —del qual abans ningú no havia parat esment— i que es pretenia cobrir: és el que succeí precisament amb el *mètode de les primitives elementals* promulgat per l'escola de Leibniz. Però, alhora suggereix, pel *mètode de generalització* —tan útil i apreciat en la recerca matemàtica—, la creació de funcions noves que abans no s'havien considerat perquè ni es disposava del llenguatge adequat, ni del context idoni, ni de la necessitat de crear-les. És el que succeeix amb les *funcions trigonomètriques hiperbòliques* —sinus i cosinus hiperbòlics. Amb la seva aparició es resol, de retruc, el problema general de les quadratures de les funcions racionals els denominadors dels quals són arrels quadrades de polinomis quadràtics. És a dir, de les funcions de la forma

$$F(x) := \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \text{on} \quad P(X) \in \mathbb{R}[X].$$

El *mètode de generalització* porta a plantejar la resolució quan el radicand és una cúbica o una quàrtica. És a dir, funcions de la forma

$$G(x) := \frac{P(x)}{\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}}, \quad \text{on} \quad P(X) \in \mathbb{R}[X] \mathrm{i} ab \neq 0.$$

Sorgeix un problema totalment nou. Aquest fet potser no va sorprendre gaire els matemàtics del segle XVII, ja que també havia passat el mateix amb la resolució de les equacions polinòmiques quadràtiques en comparació amb la resolució de les cúbiques i quàrtiques.[160] Aquest problema nou porta a descobrir tot un món de funcions que ja no són elementals en el sentit de Leibniz. Tanmateix, el *mètode matemàtic* que consisteix a avançar *per analogia* permet adonar-se de la similitud —i alhora de la gran diferència— que hi ha entre aquesta mena de funcions i la funció arcsinus. Aquest inici, aparentment elemental, permet introduir les *funcions doblement periòdiques en el camp complex*, que obre un camp d'estudi i de recerca molt important a partir de la segona meitat del segle XIX.

D'altra banda, les equacions polinòmiques, que tan bon comportament havien tingut fins al quart grau, presenten una resistència molt gran a ser resoltes per a graus superiors. Tanmateix, el tercer grau ja havia obligat a crear tot un món numèric nou: els *nombres complexos.* La matemàtica avança per creacions noves davant de reptes nous. S'aconsegueix veure que el problema de *resoldre* una quíntica o una equació de grau superior d'una manera concreta —*per radicals*— és impossible. Això ens col·loca un cop més davant d'una de

160 És curiós observar l'analogia en el fet que les cúbiques i quàrtiques vagin, en els dos casos, aparellades, malgrat que la raó de l'aparellament no sigui la mateixa.

les característiques més notables de la matemàtica —que encara que ve de lluny, mai no deixa de sorprendre— que *consisteix a demostrar matemàticament que un cert problema matemàtic no és resoluble*,[161] si posem certes restriccions a l'àmbit on es pot resoldre, malgrat que, d'entrada, res no permeti sospitar-ho. Això no obstant, no significa que el problema no sigui resoluble si li llevem les restriccions. Un dels nostres protagonistes —Niels Henrik Abel— va proporcionar els mitjans per resoldre un problema que ell mateix havia vist que, amb certes restriccions, és irresoluble. Ara bé, no fou capaç d'adonar-se de la potència de l'eina que havia creat. Apareguda en un àmbit de la matemàtica, no fou capaç de transportar-la a un altre que, d'entrada, sembla totalment deslligat del primer. Sorgeix així una de les caraterístiques més preuades de la matemàtica —i també una de les que la fan alhora molt més difícil i alhora molt més coherent. La matemàtica és un entramat de mètodes, tècniques i camins que, tard o d'hora, es troben. La matemàtica és una disciplina fortament travada i connexa. Quan més desprevinguts estem, sorgeix un camí que uneix regions que semblaven totalment inconnexes. És curiós observar que per poder integrar un funció racional, cal disposar del teorema fonamental de l'àlgebra; per poder demostrar el teorema fonamental de l'àlgebra cal el teorema de Bolzano —un teorema típic de l'anàlisi matemàtica— i, finalment, per poder resoldre una quíntica cal recórrer a les funcions el·líptiques que s'introdueixen invertint funcions que estan expressades per mitjà d'una integral.

No és estrany que un descobridor no s'adoni de tota la potència d'allò que acaba de crear, tant si és una tècnica, com un teorema, com un món numèric. Per poder-se adonar de les potencialitats d'un nou descobriment cal que es desenvolupi, s'apliqui, s'usi fins que esdevingui familiar a la comunitat. El darrer problema que hem exposat al treball ens proporciona un segon exemple d'aquest fet.

En definitiva, doncs, un petit nombre de matemàtics, pel simple fet d'estar units per quelcom tan atzarós com és l'any del seu naixement o mort, ha permès elaborar una història breu, petita i esbiaixada de la matemàtica, però prou rica per fer-nos adonar dels vincles que la matemàtica té entre el que normalment es consideren àrees de coneixement disjuntes, de l'ús d'algunes de les tècniques de recerca i de progrés —com ara, per analogia, per generalització, etc.— i, finalment, les limitacions que té la capacitat creadora d'un matemàtic —que és el que fa que un matemàtic sigui un prohom, o no ho sigui, en el seu camp de recerca— considerada individualment i, en canvi, les possibilitats que té quan la considerem col·lectivament. És a dir, en l'esdevenir de la història que és, en definitiva, el context d'aquesta lliçó.

161 Potser la importància de la resolució de problemes impossibles —és a dir, del fet de demostrar la seva impossibilitat— mai no fou enunciada explícitament —malgrat que ja s'havien resolt força qüestions d'aquesta índole— fins que David Hilbert (1862–1943), en la conferència històrica dels *Vint-i-tres Problemes*, del Congrés Internacional de la Matemàtica, celebrat a París l'any 1900, l'expressà en veu alta i clara (Hilbert, D. [1985]). Vegeu, per exemple, Bayer, P. [9].

## 8 Apèndix

**Matemàtics homenatjats: Any 2002–2003** Heus aquí els matemàtics que, durant el curs 2002–2003, celebren un aniversari o cinquantenari del naixement o de la mort, però nascuts abans de començar el segle XX. Si hi incloguéssim els nascuts durant la primera meitat del segle XX, caldria afegir-ne, com a mínim, una quarantena més.

Els matemàtics homenatjats i indicats amb un $*$ són citats al text. Naturalment, el text en cita també molts d'altres que no formen part d'aquest col·lectiu.

Val a dir que, depenent de la font consultada, el dia, i àdhuc el mes de naixement i mort dels matemàtics citats, pot variar. Tanmateix, com ja hem comentat en el text, el cas de Pietro Antonio Cataldi és molt particular. No hi ha acord amb l'any del seu naixement: per a uns és el 1548 i per a d'altres, el 1552.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gerbert d'Orlhac [Silvestre II] | Aquitània, ~945 | – | Roma, 12 de maig de 1003 | francès | †1003 |
| | Xi'n Xiu-Shao | Szechwan (avui Sichuan), ~1202 | – | Kwangtung, ~1261 | xinès | 1202 |
| | Leonardo da Vinci | Vinci, abril de 1452 | – | Cloux (França), 2 de maig de 1519 | italià | 1452 |
| | Charles de Bouvelles | Sauyecourt, ~1470 | – | Noyon, 1553 | francès | †1553 |
| | Pedro Nunes Salaciense | Alcácer do Sal, 1502 | – | Coimbra, 11 d'agost de 1578 | portuguès | 1502 |
| | Ostilio Ricci | Fermo, 1540 | – | Florència, 15 de gener de 1603 | italià | †1603 |
| ∗ | François Viète | Fontenay-le-Comte (Vendée), 1540 | – | París, 13 de desembre de 1603 | francès | †1603 |
| | Luca Valerio | Nàpols, 1552 | – | Roma, 17 de gener de 1618 | italià | 1552 |
| | Juan Bautista Villalpando | Còrdova, 1552 | – | Roma (Itàlia), 1608 | espanyol | 1552 |
| | Mateo Ricci | Macerata, 6 d'octubre de 1552 | – | Pequín (Xina), 11 de maig de 1610 | italià | 1552 |
| | Joost Bürgi | Litchtensteig, 28 de febrer de 1552 | – | Kassel (Alemanya), 31 de gener de 1632 | suís | 1552 |
| ? | Pietro Antonio Cataldi | Bolonya, 15 d'abril de 1548 (1552?) | – | Bolonya, 11 de febrer de 1626 | italià | 1552? |
| | Jan Bržek | Kurelow, novembre de 1585 | – | Krakov, 21 de novembre de 1652 | polonès | †1652 |
| | Peter Turner | Londres, 1586 | – | Londres, gener de 1652 | anglès | †1652 |
| | Benjamín Bramer | Felsberg, febrer de 1588 | – | Zeigenhai, 17 de març de 1652 | alemany | †1652 |
| | Charles de la Faille | Antwerp, 1 de març de 1597 | – | Barcelona (Espanya), 4 de novembre de 1652 | belga | †1652 |
| ∗ | Florimond de Beaune | Blois, 7 d'octubre de 1601 | – | Blois, 18 d'agost de 1652 | francès | †1652 |
| | Abraham Bosse | Tours, 1602 | – | París, 14 de febrer de 1676 | francès | 1602 |
| | Jacques de Billy | Compègne, 18 de març de 1602 | – | Dijon, 14 de gener de 1679 | francès | 1602 |
| ∗ | Gilles Personne de Roberval | Senlis, 10 d'agost de 1602 | – | París, 27 d'octubre de 1675 | francès | 1602 |
| | Viśvarūpa Munīśvara | Benarés, 17 de març de 1603 | – | ? | indi | 1603 |
| ∗ | John Wallis | Ashford, 3 de desembre de 1616 | – | Oxford, 28 d'octubre de 1703 | anglès | †1703 |
| | Vicenzo Viviani | Florència, 5 d'abril de 1622 | – | Florència, 22 de setembre de 1703 | italià | †1703 |
| | Jean le Fèvre | Lisieux, 9 d'abril de 1652 | – | París, 1706 | francès | 1652 |
| ∗ | Michel Rolle | Ambert, 21 d'abril de 1652 | – | París, 8 de novembre de 1719 | francès | 1652 |
| | William Whiston | Norton, 9 de desembre de 1667 | – | Lyndon, 22 d'agost de 1752 | anglès | †1752 |
| | Gerge Berkeley | Dysert Castle, 12 de març de 1685 | – | Oxford (Anglaterra), 14 de gener de 1753 | irlandès | †1753 |
| | Thomas Bayes | Londres, 1702 | – | Tunbridge Wells, 17 d'abril de 1761 | anglès | 1702 |
| | Antoine Deparcieux | Clotet-de-Cessous, 28 d'octubre de 1703 | – | París, 2 de setembre de 1768 | francès | 1703 |
| | Gabriel Cramer | Ginebra, 31 de juliol de 1704 | – | Bagnols-sur-Cèze (França), 4 de gener de 1752 | suís | †1752 |
| | Franz Ulrich Theodosius Aepinus | Rostock, 13 de desembre de 1724 | – | Dopart (Estònia), 10 d'agost de 1802 | alemany | †1802 |
| ∗ | Adrien-Marie Legendre | París, 18 de setembre de 1752 | – | París, 9 de gener de 1833 | francès | 1752 |
| | Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot | Nolay, 13 de maig de 1753 | – | Magdeburg (Alemanya), 2 d'agost de 1823 | francès | 1753 |
| | Edward Troughton | Corney, octubre de 1753 | – | Londres, juny de 1835 | anglès | 1753 |
| | Louis François Antoine Arbogast | Mutzig (Alsàcia), 4 d'octubre de 1759 | – | Estrasburg, 18 d'abril de 1803 | francès | †1803 |
| | Jósef Maria Ho'né-Wronski | Wolsztyn, 23 d'agost de 1778 | – | Neuilly (França), 8 d'agost de 1853 | polonès | †1853 |
| | John Farrar | Lincoln (Mass.), 1 de juliol de 1779 | – | Cambridge (Mass.), 8 de maig de 1853 | nord-americà | †1853 |
| ∗ | Niels Henrik Abel | Finny, 5 d'agost de 1802 | – | Froland, 6 d'abril 1829 | noruec | 1802 |
| | János Bolyai | Kolozsvár (Cluj), 15 de desembre de 1802 | – | Marosvásárhely, 27 de gener de 1860 | hongarès | 1802 |
| | Johann Christian Doppler | Salzburg, 29 de novembre de 1803 | – | Venècia (Itàlia), 17 de març de 1853 | austríac | 1803 |
| | | | | | | †1853 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Gugliemo LIBRI Carucci della Sommaja | Florència, 1 de gener de 1803 | – Fiesole, 28 de setembre de 1869 | hongarès | 1803 |
| * | Jacques Charles François STURM | Ginebra, 29 de setembre de 1803 | – París (França), 18 de desembre de 1855 | suís | 1803 |
| | Giusto BELLAVITIS | Bassano, 22 de novembre de 1803 | – Tezze, 6 de novembre de 1880 | italià | 1803 |
| | Augusta Ada BYRON, comtessa Lovelace | Londres, 10 de desembre de 1815 | – Londres, 27 de novembre de 1852 | austríaca | †1852 |
| | George Gabriel STOKES | Skreen, 13 d'agost de 1819 | – Cambridge, 1 de febrer de 1903 | austríac | †1903 |
| * | Ferdinand Gotthold Max EISENSTEIN | Berlín, 16 d'abril de 1823 | – Berlín, 11 d'octubre de 1852 | alemany | †1852 |
| | Carl Anton BJERKNES | Kristania, 24 d'octubre de 1825 | – Kristania, 20 de març de 1903 | austríac | †1903 |
| | Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe CREMONA | Pavia, 7 de desembre de 1830 | – Roma, 10 de juny de 1903 | italià | †1903 |
| * | Rudolf Otto Sigismund LIPSCHITZ | Könisberg, 14 de maig de 1832 | – Bonn, 7 d'octubre de 1903 | alemany | †1903 |
| | Immanuel Lazarus FUCHS | Moschin, 5 de maig de 1833 | – Berlín (Alemanya), 26 d'abril de 1902 | polonès | †1902 |
| | E. L. W. Maximilian CURTZE | Ballenstedt, 4 d'agost de 1837 | – Thorn (Polònia), 3 de gener de 1903 | alemany | †1903 |
| | Nicolay Vasilievich BUGAEV | Dusheti, 14 de setembre de 1837 | – Moscou, 11 de juny de 1903 | rus | †1903 |
| | Josiah Willard GIBBS | New Haven, 11 de febrer de 1839 | – New Haven, 28 d'abril de 1903 | nord-americà | †1903 |
| | Friedrich Wilhelm Karl Ernst SCHRÖDER | Mannheim, 25 de novembre de 1841 | – Karlsruhe, 16 de juny de 1902 | alemany | †1902 |
| | Constant LE PAIGE | Lieja, 9 de març de 1852 | – Lieja, 26 de gener de 1929 | belga | 1852 |
| * | Carl Louis Ferdinand von LINDEMANN | Hannover, 12 d'abril de 1852 | – Munic, 6 de març de 1939 | alemany | 1852 |
| * | Antoni GAUDÍ | Reus, 25 de juny de 1852 | – Barcelona, 7 de juny de 1926 | català | 1852 |
| | William BURNSIDE | Londres, 20 de juliol de 1852 | – West Wickham, 21 d'agost de 1927 | anglès | 1852 |
| | Francis Robbins UPTON | Peabody, 1852 | – Orange, 10 de març de 1921 | nord-americà | 1852 |
| | Gregorio RICCI-CURBASTRO | Lugo, 12 de gener de 1853 | – Bolonya, 6 d'agost de 1925 | italià | 1853 |
| | Salvatore PINCHERLE | Trieste, 11 de març de 1853 | – Bolonya, 10 de juliol de 1936 | italià | 1853 |
| | Hendrik Antoon LORENTZ | Arnhem, 18 de juliol de 1853 | – Haarlem, 4 de febrer de 1928 | holandès | 1853 |
| | Arthur Moritz SCHŒNFLIES | Landsberg an der Warthe (Gorzów), 17 d'abril de 1853 | – Frankfurt am Main, 27 de maig de 1928 | alemany | 1853 |
| | Heinrich MASCHKE | Breslau, 24 d'octubre de 1853 | – Chicago, 1 de març de 1908 | alemany | 1853 |
| | George Bruce HALSTED | Newark, 23 de novembre de 1853 | – Nova York, 16 de març de 1922 | nord-americà | 1853 |
| | Evgraf Stepanovich FYDOROV | Orenburg, 22 de desembre de 1853 | – Petrograd, 21 de maig de 1919 | rus | 1853 |
| | Henri Eugène PADÉ | desembre de 1863 | – 9 de juliol de 1953 | francès | †1953 |
| | Ernest VESSIOT | Marsella, 8 de març de 1865 | – La Bauche, 17 d'octubre de 1952 | francès | †1952 |
| | Guido CASTELNUOVO | Venècia, 14 d'agost de 1865 | – Roma, 27 d'abril de 1952 | italià | †1952 |
| | Benjamin Fedorovich KAGAN | Shavli, 10 de març de 1869 | – Moscou, 8 de maig de 1953 | lituà | †1953 |
| | Gino FANO | Màntua, 5 de gener de 1871 | – Verona, 8 de novembre de 1952 | italià | †1952 |
| | Giovanni Enrico Eugenio VACCA | Gènova, 18 de novembre de 1872 | – Roma, 6 de gener de 1953 | italià | †1953 |
| | Ernets BARNES | Birmingham, 1 d'abril de 1874 | – Sussex, 25 de novembre de 1953 | anglès | †1953 |
| | Edward Vermilye HUNTINGTON | Clinton, 26 d'abril de 1874 | – Cambridge, 25 de novembre de 1952 | nord-americà | †1952 |
| | Max Wilhelm DEHN | Hamburg, 13 de novembre de 1878 | – Black Mountain (EUA), 27 de juny de 1952 | alemany | †1952 |
| | Lewis Fry RICHARDSON | Newcastle upon Tyne, 11 d'octubre de 1881 | – Kilmun (Escòcia), 30 de setembre de 1953 | anglès | †1953 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Richard von MISES | Lemberg, 19 d'abril de 1883 | – | Boston (Mass.), 14 de juliol de 1953 | austríac | †1953 |
| Otto SZÁSZ | 11 de desembre de 1884 | – | Cincinnati (EUA), 19 de desembre de 1952 | austríac | †1952 |
| Edwin Powell HUBBLE | Marshfield, 20 de novembre de 1889 | – | San Marino, 28 de setembre de 1953 | nord-americà | †1953 |
| Pierre HUMBERT | París, 13 de juny de 1891 | – | Montpellier, 17 de novembre de 1953 | francès | †1953 |
| Hans REICHENBACH | Hamburg, 26 de setembre de 1891 | – | Los Ángeles (EUA), 9 d'abril de 1953 | alemany | †1953 |
| Jacov Il'ich FRENKEL | Rostov-on-Don, 10 de febrer de 1894 | – | Leningrad, 23 de gener de 1952 | austríac | †1952 |

## Referències


[1] Aaboe, A. «Al-Kashi's iteration method for sin 1º». *Scripta Mathematica*, 20 (1954), 24–29.

[2] Abel, N. H. «Mémoires sur les équations algébriques ou l'on demonstre l'impossibilité de la résolution de l'équation général du cinquième degré» (1824). A: Abel, N. H. [6, i, p. 28–38]. [Traducció anglesa d'Oysteix Ore, a Smith, D. E. [171], edició de 1959, 262–266]

[3] Abel, N. H. «Démonstration de l'impossibilité de la resolution algébrique des équations générals qui passent le quatrième degrée». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2 (1826), 65–84. A: Abel, N. H. [6, i, p. 66–87].

[4] Abel, N. H. «Recherches sur les fonctions elliptiques». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2 (1826), 65–84; 3 (1827), 160–190. A: Abel, N. H. [6, i, p. 263–388].

[5] Abel, N. H. «Note sur quelques formules elliptiques» (1829). A: Abel, N. H. [6, i, p. 467–477].

[6] Abel, N. H. *Oeuvres complètes*. Christiana: Sylow-Lie, 1881.

[7] Aiton, E. J. *Leibniz. A biography*. Adam Hilger Limited, 1985. [Traducció castellana de Cristina Corredor Lanas, *Leibniz. Una biografía*. Madrid: Alianza Editorial, 1992]

[8] Argand, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. París, 1806.

[9] Bayer, P. «Los problemas de Hilbert» [Pendent de publicació (2002)]

[10] Beaumont, É. de. «Éloge historique de Adrien Marie Legendre». París, 1864.

[11] Berggren, L.; Borwein, J.; Borwein, P. *Pi: A Source Book*. Nova York: Springer-Verlag, 1997.

[12] Bernoulli, Jk. «Curvatura Laminæ Elasticæ». *Acta Eroditorum*, 13 (1694), 262–276. A: Bernoulli, Jk. [14, ii, p. 576–600].

[13] Bernoulli, Jk. «Constructio Curvæ Accessus et Recessus æquabilis, ope rectificationis Curvæ cujusdam Algebraicæ». *Acta Eroditorum*, 13 (1694), 336–338. A: Bernoulli, Jk. [14, ii, p. 608–614].

[14] Bernoulli, Jk. *Opera*. Ginebra: G. Cramer ed. 1774, 2 v.

[15] Bernoulli, Jh. «Solutio problematis funicularii». *Acta Eroditorum*, 10 (1691), 274–276. A: [18, i, p. 48–51].

[16] Bernoulli, Jh. «Lectiones mathematicæ, de methodo integralium, aliisque, conscriptæ in usum Ill. Marchonis Hospitalii». París, 1691–1692. Publicat a [18, iii, p. 385–558].

[17] BERNOULLI, JH. «Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelque abregés par raport à ce calcul». *Mémoire de l'Académie Royal des Sciences de Paris*, (1702), 289–297. A [18, I, p. 393–397]. [Traducció anglesa de Jerewy Gray, [60, p. 436–439]]

[18] BERNOULLI, JH. *Opera Omnia*. Lausana i Ginebra, 1742. 4 v. [Reeditat a Hildesheim: Georg Olms, 1968.

[19] BETTI, E. «Sulla risoluzione delle equazioni algebriche» (1852). A: [20, I, p. 31–80].

[20] BETTI, E. *Opere mathematiche*. Milà: Ulrico Hoepli, 1903–1913. 2 v.

[21] BIEBERBACH, L. *Theorie der gewoehnlichen Differentialgleichungen*. Berlín: Springer-Verlag, 1953.

[22] BOLZANO, B. «Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege». Praga, 1817. Ostwald's Klassiker, vol. 153. Leipzig: Engelmann, 1905. [Traducció anglesa de S. B. Russ, a *Historia Mathematica*, 7 (1980), 156–185]

[23] BOMBELLI, R. *Algebra*. 1572. Milà: Feltrinelli Edittore, 1966.

[24] BOTTAZZINI, U. «Solving higher-degree-equations» (1994). A: Grattan-Guinness, I. [78, I, p. 567–572].

[25] BRING, E. S. «Meletemata quædam mathematica circa transformationem æquationum algebraicarum». Ludud University. Promotionschrift, 1786.

[26] CAJORI, F. *A History of Mathematics*. Nova York: Macmillan. [Reeditat a Nova York: Chelsea Publishing Company, 1919.

[27] CANTOR, G. «Über eine Eigenschaft der Inbegriffes aller reellen algebarischen Zahlen». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77 (1874), 258–262. A: [28, p. 115–118].

[28] CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen*. Berlín: Springer, 1932. [Reeditat a Hildesheim: Georg Olms, 1962]

[29] CARDANO, G. *Artis Magnæ sive de regulis algebraicis* (1545). [Traducció anglesa de Witmer T. Richard [203]]

[30] CARDANO, G. *De Vita Propia Liber*. 1575. [Traducció anglesa de J. Stoner. *The Book of My Life*. Nova York: Dubon, 1930. Reeditat a Nova York: Dover Publications, Inc., 1962. Traducció castellana de Francisco Socas. *Mi Vida*. Madrid: Alianza Editorial, 1991]

[31] CATALDI, P. A. *Trattato del modo brevíssimo di trovare la radice quadra delli numeri*. Bolonya, 1613.

[32] CHABERT, J.-L. *Histoire des algorithmes. Du caillou à la puce* 1994. [Traducció anglesa de Chris Weeks. *A History of Algorithms. From Pebble to the Microchip*. Berlín: Springer, 1999]

[33] Cotes, R. «Logometria». *Philosophical Transactions*, 29 (1575), 5–45.

[34] Cox, D. A. «The arithmetic-geometric mean of Gauss». *Enseignement Mathématique*, 30 (1984), 275–330.

[35] Davenport, J. H. *On the Integration of Algebraic Functions.* Nova York: Springer, 1981. Lectures Notes in Computation Science.

[36] De Beaune, F. «Carta a Mersenne de 10 d'octubre 1638». A: Descartes, R. [40], edició de 1996, v, 517–524.

[37] De Beaune, F. «Carta a Mersenne de 5 de març 1639». A: Descartes, R., [40], edició de 1996, v, 534–536.

[38] Descartes, R. *Géométrie.* Leiden, 1637. [Traducció catalana de Josep Pla i Carrera, i Pelegrí Viader i Canals. *René Descartes. Geometria.* Vic: Eumo editorial, 1999. Traducció anglesa de D. Eugene Smith i Marcia Latham, *The Geometry of René Descartes.* Reeditat a Nova York: Dover Publication, Inc., 1954. Traducció castellana de Guillermo Quintás Alonso. *René Descartes. Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría.* Madrid: Alfaguara, 1981]

[39] Descartes, R. «Carta a Fl. De Beaune de 20 de febrer». A: [40], edició de 1996, ii, 513–518.

[40] Descartes, R. *Oeuvres complètes* (1897–1913). París: Edició de Adam i Tannery. [Reeditat a París: Vrin, 1996]

[41] Dhombres, J. *Nombre, mesure et continu. Épistemologie et histoire.* París: Nathan, 1978.

[42] Dieudonné, J. [ed.]. *Abregé d'histoire des mathématiques.* París: Hermann, 1978. 2 v.

[43] Dieudonné, J. [ed.]. *Abregé d'histoire des mathématiques.* París: Hermann, 1986. [Edició abreujada en un volum]

[44] Dörrie, H. *Triumph der Mathematik: Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur.* Würzburg: Physika-Verlag, 1958. [Traducció anglesa de David Antin. *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution.* Nova York: Dover Publications, Inc., 1965]

[45] Dou, A. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Madrid: Dossat, 1964.

[46] Duncan, D. E. *The Calendar.* 1998. [Traducció castellana de María Luz García de la Hoz. *El Calendario.* Barcelona: Emecé Editores, 1999]

[47] Durán, A. J. *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* Madrid: Alianza Editorial, 1996.

[48] Edwards, C. H. jr. *The Historical Development of the Calculus.* Nova York: Springer-Verlag, 1979.

[49] ELIA, A. D'. *Christiaan Huygens. Una biografia intelletualle.* Milà: Franco Angeli Libri s. r. l., 1985.

[50] EUCLIDES. $\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$. (III aC). A: Vera, F. [184, p. 702–980].

[51] EULER, L. «De progressionibus harmonocis observationes». *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ*, 7 (1734–1735), 150–161, publicat el 1740, i a [58, XIV, p. 87–100].

[52] EULER, L. «Additamentum ad Dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis». *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ*, 7 (1734–1735), 184–200, publicat el 1740, i a [58, XXII, p. 57–75].

[53] EULER, L. «Fractionibus Continuis». *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ*, 9 (1737), 98–137. A: [58, XVI, p. 187–215].

[54] EULER, L. «De Summis Serierum Reciprocicarum ex postestatibus numerorum naturalium artatum Dissertatio altera in qua æadem summationes ex fonte maxime diverso derivantur». *Miscellanea Berlinensia*, 7 (1743), 1792–192. A: [58, XIV, p. 138–155].

[55] EULER, L. *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748. Volumem Primum. A: [58, VIII]. Traducció castellana de José Luís Arantegui Tamayo, *Introducción al análisis de los infinitos.* Sevilla: Real Sociedad Matemática Española, SAEM Thales 2000.

[56] EULER, L. «De Integratione Aequationum Differentialium» (1760). *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ*, 9 (1763), 3–63. A: [58, XXII, p. 334–394].

[57] EULER, L. *Institutiones calculi integralis* 1768. Volumem Primum. A: [58, XI].

[58] EULER, L. *Opera Omnia.* Leipzig: Teubner i després Zuric: Füssli, [1911–].

[59] EYMARD, P.; LAFON, J.-P. *Autour du nombre* $\pi$. París: Hermann, 1999.

[60] FAUVEL, J.; GRAY, J. *The History of Mathematics: A Reader.* Hampshire: Macmillan Education Ltd., 1987.

[61] FONCENEX, D. F. DE. «Reflexions sur les quantités imaginaires». *Miscellanea Philosophico-Mathematica. Societate Taurinensis*, 1 (1759), 113–146.

[62] GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze.* Leiden, 1638. [Traducció castellana de Carlos Solís. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.* Madrid: Editora Nacional, 1981. Traducció anglesa de Henry Crew i Alfonso de Salvio. *Dialogues Concerning two new Sciences.* Nova York: The Macmillan Company, 1914. Reeditat a Dover Publications, Inc., 1954. Vegeu Galilei, G., [63, VIII]]

[63] GALILEI, G. *Le opere di Galileo Galilei.* Barbera, G. [ed.]. Florència: Editat per A. Favaro. Nova Ristampa della Edizione Nazionale, 1890–1909, 20 v.

[64] GALOIS, É. «Carta a M. Auguste Chevalier, 1832». A: [65, p. 173–186].

[65] GALOIS, É. *Écrits et mémoires mathématiques*. Bourgne, R. i Azra, J. P. [ed.]. París: Gauthier-Villars, 1962.

[66] GANDZ, S. «The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early Arabic algebra». *Osiris*, 3 (1937), 405–557.

[67] GAUSS, C. F. «Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicum rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse». Helmstedt dissertatione (1799). A: [71, III, p. 3-56]. [Traducció anglesa parcial de Struik, D. J. [174, p. 115–132].

[68] GAUSS, C. F. «Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionubus datæ excercerat planta si eins massa per totam orbitam ratione temporis quo singulæ partes describuntur uniformiter esset dispertita» (1818). *Communicationes Societatem Regiam Scientiarum Gottingensis Rec.*, 4. A: [71, III, p. 107–142].

[69] GAUSS, C. F. «Carta a Bessel de 20 de març de 1828». A: [72, p. 477–478].

[70] GAUSS, C. F. «Le journal mathématique de Gauss». *Revue d'Histoire des Sciences et de Leurs Applications* (1954).

[71] GAUSS, C. F. *Werke*. Göttingen: Ed. Köngl. des Wiss, 1863–1929. 12 v. [Reimprès a Hildesheim: Georg Olms, 1973]

[72] GAUSS, C. F. *Briefweschel mit F. W. Bessel*. Hildesheim: Georg Olms, 1975.

[73] GILAIN, C. «Condorcet et le calcul integral» (1988). A: Rashed, R. [163, p. 85–147].

[74] GILLESPIE, C. C. [ed.]. *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scriber's Sons. 16 volums. [Les biografies dels matemàtics han estat recollides a Gillespie, C. C. [1975]]

[75] GILLESPIE, C. C. [ed.]. *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Canadà: Collier Macmillan, 1991. 4 v.

[76] GIRARD, A. *Invention nouvelle en algèbre*. [Traducció anglesa d'Ellen Black. *New Discorery in Algebra*. 1629. A: *The Early Theory of Equations and their Nature and Constitution*. Maryland: Golden Hint Press, 1986.

[77] GORDAN, P. A. «Eber die Auftosung der Gleishungen von fäuften Grade». *Mathematische Annalen*, 13 (1878), 375–404; (1988), 85–147.

[78] GRATTAN-GUINNESS, I. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematics*. Londres: Routledge, 1994. 2 v.

[79] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Fontana History of Mathematical Sciences. The Rainbow of Mathematics*. Londres: FontanaPress, 1997.

[80] GREGORY, J. *Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura*. Londres, 1667.

[81] HARRIOT, TH. *Analytica Praxis ad æquationes algebraicas resolvendas*. Londres, 1631.

[82] HERMITE, C. «Sur la résolution de l'équation du cinquième degré». *Comptes Rendues*, 46 (1858), 508–515. A: [84, II, p. 8–12].

[83] HERMITE, C. «Sur la fonction exponentielle». *Comptes Rendues*, 77 (1873), 18–24, 74–79, 226–233 i 285–293. A: [84, III, p. 150–181].

[84] HERMITE, C. *Oeuvres*. Picard, Émile [ed.]. París: Gautheir-Villars, 1905–1917. 4 v.

[85] HILBERT, D. «Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900». *Nachrichten von der Königlichen Gesellscheft der Wissenschaften zu Göttingen* (1900), 253–297. [Traducció francesa amb afegits, a *Compte rendue du Deuxième congrés international des mathématicians tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, París: Gauthier-Villars, 1902, 58–114]

[86] HORNER, W. G. «A new method of solving numerical equations of all orders, by continuous aproximation». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 109 (1819), 308–335. [Reproduït a Smith, D. E. [171], edició de 1959, 232–252]

[87] HOUZEL, C. «Fonctions elliptiques et intégrals abéliennes» (1986). A: Dieudonné, J. [42, II, capítol VII, p. 1–113]; [43, p. 293–314].

[88] HUREWICZ, W. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Massachusetts Institute of Technology, 1958. [Traducció castellana de Joan Augé. *Sobre equaciones diferenciales ordinarias*. Madrid: Ediciones Rialp, 1966]

[89] HUYGENS, C. *Horlogium oscilatorium*. París, 1673. A: [92, XVIII, p. 69–368]. [Traducció francesa de Jean Peyroux: *Hologuim oscillatorium. L'horloge oscillante*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1980. Traducció anglesa. *The Pendulum Clock*. Iowa: Iowa State University Press, 1968]

[90] HUYGENS, C. «Carta a Leibniz del 9 d'octubre 1690». A: [92, IX, p. 496–497].

[91] HUYGENS, C. «Christianii Hugenii, dynastiæ Zülichem, solutio ejusdem problematis». *Acta Eroditorum*, 10 (1691), 281–282. A: [92, X, p. 95–98].

[92] HUYGENS, C. *Oeuvres complètes, (1888–1950)*. La Haya: Société Hollandaise des Sciences. 22 v.

[93] HWĀRIZMĪ, ABU-'ABDALLĀH MOḤAMMAD IBN-MŪSĀ AL-. *Al-jabr wa'l-muqabala*, ~830. [Traducció anglesa de Frederic Rosen, *The Algebra of Muhammed ben Musa*. Londres: The Oriental Translation Fundation, 1831]

[94] Jacobi, C. G. J. *Fundamenta nova theoriæ Functionum Ellipticarum.* Königsberg, 1829. Vegeu [96, i, p. 49–239].

[95] Jacobi, C. G. J. «Formulæ novæ in theoria transcendentum ellipticarum fundamentales». *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 15 (1835), 199–204. A: [96, i, p. 335–341].

[96] Jacobi, C. G. J. *Gesammelte Werke.* Berlín: Reimer, 1881–1891. 7 v.

[97] Kasper, T. «Integration in Finite Terms: The Liouville Theory». *Mathematics Magazine*, 53 (1980), 195–201.

[98] KāshǏi, Jehmshid ibn Mas'ūd al. *Miftāh al-hisāb.* Traducció russa de B. A. Rosenfeld. Moscou, 1956.

[99] Khayyām, Abū al-Fatḥ 'Umar b. Ibrāhīm al-. *Al-jabr.* ~1079. [Traducció francesa de Roshdi Rashed i B. Vahabzadeh. París: Librairie Scientifique Albert Blanchard, 1999]

[100] King, R. B. *Beyond the quartic equation.* Boston: Birkhäuser, 1996.

[101] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Londres: Oxford University Press, 1972. [Traducció castellana de Carlos Fernández Pérez i Alejandro Garcíadiego, coordinada i revisada per Jesús Hernández. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial, 1992. 3 v.]

[102] Koestler, A. *The Sleeepwalkers.* Hutchinson, 1959. Reeditat a Nova York: Penguin, 1964. [Traducció castellana de Domingo Santos. *Los sonámbulos.* Barcelona: Salvat Editores, 1994. 2 v.

[103] Kronecker, L. «Ȩber die algebraisch Auflösbaren Gleichungen ii». *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin von Jahre 1856*, 1853, 203–215. A: [104, iv, p. 25–37].

[104] Kronecker, L. *Leopold Kronecker's Werke.* Leipzig: Teubner. 1895–1931. 5 v. [Reeditat a Nova York: Chelsea Publishing Company, 1968]

[105] Lagrange, J.-L. «Solution d'un problème d'arithmétique». *Miscellania Taurinensia*, 4 (1766–1969). A: [109, i, p. 671–731].

[106] Lagrange, J.-L. «Mémoire sur la solution des problèmes indeterminés du second degrée» (1767). *Histoire de l'Académie Royale, Berlin*, 23 (1769), 311–352. A: [109, ii, p. 539–578].

[107] Lagrange, J.-L. «Addition au Mémoire sur la résolution des équations numériques» (1768). *Histoire de l'Académie Royale, Berlin*, 24 (1770), 111–180. A: [109, ii, p. 581–652].

[108] Lagrange, J.-L. «Reflexions sur la résolution algebrique des équations numèriques». *Nouveaux Mémoires de l'Academie de Berlin*, 1 (1770), 134–215; 2 (1771), 138–253. A: [109, iii, p. 203–401].

[109] Lagrange, J.-L. *Oeuvres*. 1867–1882. París: Gauthier-Villars. 14 v.

[110] Lambert, J. H. «Mémoire sur quelques propiétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques». *Histoire de l'Académie*, 17 (1761), 265–322. [Fou publicat l'any 1768, a [112, ii, p. 112–159]. Traducció anglesa parcial de Struik, D. J. [174, p. 369–374]]

[111] Lambert, J. H. «Observations trigonométriques» (1770). *Histoire de l'Académie de Berlin*, 24, 327–354. A: [112, ii, p. 245-269].

[112] Lambert, J. H. *Opera mathematica*. Speiser, A. [ed.]. Zuric: Füssli, 1946–1948. 2 v.

[113] Lebesgue, H. *Leçons sur les constructions géométriques*. París: Gauthier-Villars, 1950.

[114] Legendre, A.-M. *Mémoires sur les transcendentes elliptiques*. París, 1793.

[115] Legendre, A.-M. *Élements de géométrie*. París, 1794.

[116] Legendre, A.-M. *Exercices de calcul intégral*. París, 1811–1817. 3 v.

[117] Legendre, A.-M. *Traité des fonctions elliptiques*. París, 1825–1828. 3 v.

[118] Leibniz, G. W. «Præfatio Opusculi de Quadratura Circuli Arithmetica» 1676. A: [125, v, p. 93–98].

[119] Leibniz, G. W. «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus». *Acta Eroditorum*, 3 (octubre 1684), 467–473. Vegeu [125, v, p. 220–226]. [Traducció castellana de Teresa Martín Santos a [126, p. 3–15]. Traducció francesa a [127, p. 96–117]. Traducció anglesa de Dirk Struik a [174, p. 272–280]]

[120] Leibniz, G. W. «De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque infinitorum». *Acta Eroditorum*, 5, (juny 1686), 292–300. [Vegeu [125, v, p. 226–233]. Traducció castellana de Teresa Martín Santos a [126, p. 16–21]. Traducció francesa a [127, p. 126–143]. Traducció anglesa parcial de Dirk Struik a [174, p. 281–282]]

[121] Leibniz, G. W. «De Linea in quam flexile se pondere propio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales et Logarithmorum». *Acta Eroditorum*, 10 (juny 1691), 277–281 i 435–439. [Vegeu [125, v, p. 243–247]. Traducció francesa a [127, p. 186–199]]

[122] Leibniz, G. W. «De solutionibus Problematis Catenarii vel Funicularis in *Actis Junii An. 1961*, aliisque a Dm. Jac. Bernoullio propositis». *Acta Eroditorum*, 11 (setembre 1692). [Vegeu [125, v, p. 255–258]. Traducció francesa a [127, p. 200–209]]

[123] Leibniz, G. W. «Carta a l'Hospital de 27 de desembre de 1694». A: [125, ii, p. 255–262].

[124] Leibniz, G. W. «Specimen Novum Analyseos pro Scientia infiniti circa Summas et Quadraturas». *Acta Eroditorum*, 21 (maig 1702), 277–281. [Vegeu [125, v, p. 350–361]. Traducció francesa a [127, p. 383–401]]

[125] Leibniz, G. W. *Mathematische Scriften*. Hildesheim: Georg Olms, 1962. 7 v.

[126] Leibniz, G. W. *Análisis infinitesimal. Gottfried Wilhel Leibniz*. Madrid: Tecnos, 1987. [Estudi preliminar de Javier de Lorenzo]

[127] Leibniz, G. W. *Leibniz. Naissance du calcul differentiel*. París: Vrin, 1989. [Introducció, traducció i notes de Marc Parmentier]

[128] Lindemann, F. «Ęber die Zahl». *Mathematische Annalen*, 20 (1882), 213–225.

[129] Ling, W.; Needham, J. «Horner's method in Chinese mathematics: Its origins in the root extraction procedures of the Han dinasty». *Toung Pao*, 43 (1955), 345–388.

[130] Liouville, J. «Premier (et seconde) mémoire sur la determination des intégrales dont la valeur est algébrique». *Journal de l'École Polytechnique*, 22 (1833), 124–148, 149–193.

[131] Liouville, J. «Mémoire sur les transcendentes elliptiques de premiere et seconde spece considerées comme fonctions de leur amplitude». *Journal de l'École Polytechnique*, 23 (1833), 37–83.

[132] Liouville, J. «Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations differentielles de second ordre en quantités finites explicites». *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 4 (1839), 423–456.

[133] Liouville, J. «Mémoire sur les transcendentes elliptiques de premiere et seconde spece considerées comme fonctions de leur amplitude». *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 5 (1840), 441–464.

[134] Liouville, J. «Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati». *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 6 (1841), 1–13.

[135] Liouville, J. «Sur les classes trés-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques». *Journal des Mathématiques*, 16 (1844), 133–142.

[136] Liouville, J. «Nouvelle démonstration d'un theorème sur les irrationnelles algébriques». *Comptes Rendues*, 18 (1851), 910–911.

[137] Liouville, J. «Leçons sur les fonctions doublement périodiques». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 88 (1880), 277–310.

[138] Lipschitz, R. O. S. «Sur la possibilité d'intégrer complètement un système d'equations differentielles». *Butlletin des Sciences Mathématiques*, ser. i, 10 (1876), 149–159.

[139] Lützen, J. *Joseph Liouville 1809–1882. Master of pure and applied Mathematics.* Nova York: Springer, 1990.

[140] Miralles, J. *Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, 2000. [Tesi doctoral]

[141] Monjos de Montserrat, *Nou Testament.* Andorra: Editorial Casal i Vall, 1961.

[142] Montucla, É. *Histoire des Mathématiques.* París, 1758. 4 v. Reeditat a París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1960.

[143] Newton, I. *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas.* 1669. A: Whiteside, D. T. [ed.] [202, ii, p. 206–247].

[144] Newton, I. *De Methodis Serierum et Fluxionum.* 1671. A: Whiteside, D. T. [ed.] [202, iii, p. 32–353].

[145] Newton, I. *Arithmetica universalis.* 1707. A: Whiteside, D. T. [ed.] [202, iv, p. 54–517].

[146] Nobý, L. *Origins of Modern Algebra.* Leiden: Noordhoff International Publishing, 1973.

[147] Ore, O. *Niels Heinrik Abel.* Basilea: Birkäuser, 1950. [Reeditat l'any 1982]

[148] Ore, O. *Niels Heinrik Abel. Mathematician Extraordinary.* Universitat de Minnesota, 1957. [Traducció francesa de Gilles Chatelet. *Abel 1802–1829. Un Mathématicien romantique.* París, Berlín, 1989]

[149] Pacioli, L. *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportiona et Proportionalità.* Venècia, 1494.

[150] Pappos d'Alexandria. *Συναγωγή μαθηματική.* Parcialment a Vera, F. [184, ii, p. 925–1015].

[151] Pesic, P. *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability.* Cambridge: The MIT Press, 2003.

[152] Pla, J. «Les sèries en Newton». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 4 (1989), 9–20.

[153] Pla, J. «L'elena de les matemàtiques i el principi de la mínima acció». *Quaderns* [Barcelona: Fundació Caixa de Catalunya], 43 (1989), 61–71.

[154] Pla, J. «The fondamental theorem of algebra before Carl Friedric Gauss». *Publicacions Matemàtiques*, 36 (1992), 879–911.

[155] Pla, J. «Les matemàtiques i els matemàtics de la Revolució Francesa». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11 (2) (1996), 31–78.

[156] Pla, J. *Damunt les espatlles dels gegants.* Barcelona: La Magrana, 1998. [Premi de literatura científica 1998. Fundació Catalana per a la Recerca]

[157] PLA, J. *Addendes a «Damunt de les espatlles dels gegants»*. Barcelona: Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona, 1998.

[158] PLA, J. «Galileo i Gaudí». Llegit en un acte coral d'homenatge a Gaudí, celebrat al Palau Güell el dia 25 de juny de 2002, organitzat per KRTU. [Pendent de publicació]

[159] PLA, J. *Els nombres. Història i problemes*. Publicacions de la Universitat de Barcelona. [Pendent de publicació].

[160] PUIG ADAM, P. *Curso histórico-práctico de cálculo integral, aplicado a la física y a la técnica*. Madrid: Biblioteca Matemática Rey Pastor-Puig Adam, 1949. [Setena edició, 1964]

[161] RAJACOPAL, C. T.; RANGACHARI, M. S. «On an untapped of medieval Keralen mathematic». *Arch. Hist. Exact Sciences*, 18 (1977), 89–102.

[162] RAJACOPAL, C. T.; RANGACHARI, M. S. «On medieval kerala mathematics». *Arch. Hist. Exact Sciences*, 35 (1986), 91–99.

[163] RASHED, R. [ed.]. *Sciences a l'époque de la Revolution Française. Recherches Historiques*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1988.

[164] RICCATI, J. F. «Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus». *Acta Eroditorum* (1724), 66–73.

[165] RUFFINI, P. *Theoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazione generali di grado superiore al quarto*. Bolonya, 1799. A: [167, I, p. 1–324].

[166] RUFFINI, P. «Delle solutione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto» (1801). *Memorie di Matematica e di Fisica delle Società Italiana delle Scienze*, 9 (1802), 444–526. A: [167, I, p. 343–406].

[167] RUFFINI, P. *Opere matematiche*. Bortolotti, E. [ed.]. Roma: Ed. Cremonese della Casa Editrice Perrella, 1915–1954. 3 v.

[168] SCRIBA, C. J. «The Inverse Method of Tangents: A dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677)». *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1965), 113–137.

[169] SIEGEL, C. L. *Transcendental Numbers*. Princeton: Princeton University Press, 1949.

[170] SMITH, D. E. *History of Mathematics*. Toronto: General Publishing Company, Ltd., 1925. Reeditat, en dos volums, a Nova York: Dover Publications, Inc., 1953.

[171] SMITH, D. E. *Source Book in Mathematics*. Toronto: General Publishing Company, Ltd., 1929. Reeditat a Nova York: Dover Publications, Inc., 1959.

[172] Stilwell, J. *Mathematics and its History*. Nova York: Springer, 1989.

[173] Stewart, I. *Galois Theoy*. Londres: Chapman and Hall, 1973. [Reeditat en 1975, 1977, 1979, 1982 i 1998]

[174] Struik, D. J. *A Source Book in Mathematics 1200–1800*. Nova Jersey: Princeton University Press, 1969. Reeditat en 1986.

[175] Sturm, J. C. F. «Mémoire sur la résolution des équations numèriques». *Mémoires présentés à l'Acadèmie Royale des Sciences, Sciences mathématiques et physiques*, 6 (1835), 271–318.

[176] Sylvester, J. J. «Elementary proof and generalization of sir Isaac Newton's hitherto undemonstarted rule for the discovery of imaginary roots». *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1 (2) (1865), 1–16.

[177] Tannery, P. «Pour l'histoire du problème inverse des tangentes». *Verhandhungen der III Internationalen Mathematiker-Kongresses*. Leipzig, 1904. A: Tannery, P. [178, vi, p. 457–477].

[178] Tannery, P. *Mémoires Scientifiques* (1912–1926). París: Éditions Jacques Gabay. 6 v.

[179] Tignol, J.-P. *Galois' Theory of Algebraic Equations*. Singapur: World Scientific Publishing, 2001.

[180] Turnbull, H. W. *James Gregory Memorial*. Londres: G. Bell & Sons Ltd., 1939.

[181] Tschirnhaus, E. W. von «Methodus Auferendi Omnes Terminos Intermedios ex data æquationes». *Acta Eridotorum*, 2 (1638), 204–207.

[182] Vandermonde, A.-T. «Mémoire sur la résolution des équations». *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* (1771), 365–416.

[183] Vera, F. *20 matemáticos célebres*. Buenos Aires: Compañía General Fabril Editora, 1961.

[184] Vera, F. *Científicos griegos*. Madrid: Aguilar, 1970. 2 v.

[185] Viète, F. «Suplementum Geometriæ» Tours, 1593. A: [187], edició de 1970, 240–257. Traducció anglesa a [204, p. 403–418].

[186] Viète, F. «De recognitione Aequationum et Emmendatione Tractatus Duo» (1615). A: [187], edició de 1970, 84–158. Traducció anglesa a Witmer, R. T. [204, p. 159–310].

[187] Viète, F. *Opera Mathematica*. Leiden, 1646. Reeditat a Nova York, Georg Olms Verlag, 1970.

[188] Waerden, B. L. van der. *Science Awakening*. Nova York: Oxford University Press, 1961.

[189] Waerden, B. L. van der. *The History of Algebra.* Berlín: Springer, 1985.

[190] Walker, E. *A study of the Traité des Indivisibles.* Nova York: Teachers College. Columbia University, 1932.

[191] Wallis, J. *De Sectionibus Conicis, Nova Methodo Expositis.* 1655. A: [195, i, p. 291–354].

[192] Wallis, J. *Arithmetica Infinitorum.* 1665. A: [195, i, p. 355–478].

[193] Wallis, J. «On Imaginary Numbers» (1673). [Traducció anglesa a *Algebra*, ii, 290–292. Reeditat a Smith, D. E. [171], edició de 1959, 46–54]

[194] Wallis, J. *De Algebra Tractatus, Historicus & Practicus; Ejusdem Originem & Progressus varios oftendens.* 1673. A: [195, ii, p. 1–482].

[195] Wallis, J. *Opera Mathematica*, Oxford, 1693–1699. 3 v. Reeditat a Hildesheim: Georg Olms, 1972.

[196] Wantzel, P. «Recherches sur les moyens dereconnaître si un problème de géométrie peut se resoudre avec la règle et le compas». *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 4 (1770), 366–372.

[197] Waring, E. *Meditationes algebraicæ.* 1770. [Reditat amb una part geomètrica nova, l'any 1772. Traducció anglesa de D. Weeks. *Meditationes algebraicæ.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1991]

[198] Weierstrass, K. *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen.* 1863–1875. A: [200, vi].

[199] Weierstrass, K. «Zur Functionenlehre». *Zitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin* (1882), 443–451. A: [200, ii, p. 245–255].

[200] Weierstrass, K. et al. [ed.]. *Mathematische Werke.* Berlín: Mayer & Müller, 1894–1927, 7 v. Reimprès a Hildesheim: Georg Olms, 1967.

[201] Wessel, C. «Om diretionesu analytiske Betening, et Forsög anwendt fornemeling til plane og sphaeriske Polygoners Oplössing». (1797). *Danske Selsk. Skr. N. Samml* (1799), 5. [Traducció anglesa a Smith, D. E. [171], edició anglesa de 1959, 55–66]

[202] Whiteside, D. T. [ed.]. *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, 1967–1981. 8 v.

[203] Witmer, T. R. *Ars Magna or the rules of algebra.* The Massachusetts Institute of Technology, 1968. Reeditat a Nova York: Dover Publications, Inc., 1993.

[204] Witmer, T. R. *The Analyic Art.* Ohio: The Kent State University Press, 1983.

[205] Young, R. V. [ed.]. *Notable Mathematicians. From Ancient Times to the Present.* Detroit: Gali, 1998.

[206] Yushkevich, A. P. «Sur les origins de la “méthode de Cauchy-Lipschitz” dans la théorie des équations différentielles ordinaires». *Revue d’Histoire des Sciences Appliées*, 34 (1981), 209–215.

Departament de Lògica, Història
i Filosofia de la Ciència
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
pla@mat.ub.es