Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 2, 2003. Pàg. 7–24

La teoria de Ramsey infinita: una mica d'història i alguns resultats recents

Joan Bagaria

1 Introducció

L'origen de la combinatòria es troba en l'anomenat *principi de les caselles* de Dirichlet, també conegut com el principi *Pigeonhole*, segons el qual si en n caselles hi col·loquem més de n objectes, aleshores en alguna casella hi haurà almenys dos objectes. Per exemple, si repartim 6 coloms en 5 caselles, aleshores en alguna de les caselles hi haurà d'haver almenys 2 coloms.

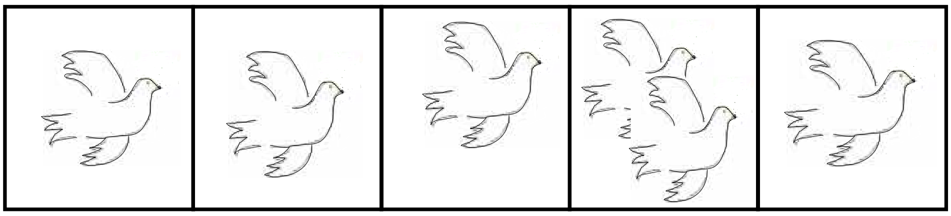

Figura 1: El principi de les caselles.

Això normalment es representa així:

$$6 \to (2)_5 \,.$$

I en general escrivim

$$n \to (2)_r$$

per indicar que, si distribuïm n objectes en r caselles, aleshores en alguna casella hi haurà almenys 2 objectes.

És clar que si tenim r caselles, $r > 0$, i hi col·loquem $sr + 1$ objectes, aleshores hi haurà una casella que contindrà com a mínim $s+1$ objectes. Així, tenim

$$sr + 1 \rightarrow (s + 1)_r \,.$$

Per exemple, si repartim 11 coloms en 5 caselles, aleshores en alguna de les caselles hi haurà d'haver almenys 3 coloms. Així doncs,

$$11 \rightarrow (3)_5 \,.$$

Fixem-nos que si

$$n \rightarrow (s)_r$$

i $n' \geq n$, $s' \leq s$ i $r' \leq r$, aleshores també

$$n' \rightarrow (s')_{r'} \,.$$

Donats n i r, el valor òptim de s, això és, el major s per al qual

$$n \rightarrow (s)_r$$

és clarament n/r, si r és divisor de n, o la part entera de n/r més 1, en cas contrari. Amb la mateixa facilitat podem calcular el menor n, un cop fixats els altres dos valors, r i s, o el major r, un cop fixats n i s, per als quals val

$$n \rightarrow (s)_r \,.$$

Com el lector pot comprovar fàcilment, $6 \rightarrow (2)_5$ i $11 \rightarrow (3)_5$ contenen els valors òptims de n, s i r.

Del que acabem de veure es desprèn, doncs, que el principi de les caselles és, de fet, trivial. La situació es complica enormement, però, quan en lloc de col·locar objectes en les caselles hi col·loquem parelles d'objectes.

La teoria de Ramsey té el seu origen en la versió bidimensional del principi de les caselles. Això és, donats n objectes i r caselles, col·loquem en les caselles *parelles* d'objectes. Suposarem sempre que $n > 1$ i $r > 0$.

Continuant amb la notació anterior, ara escriurem

$$n \rightarrow (s)_r^2$$

per indicar que si repartim totes les parelles que es poden formar amb n objectes en r caselles, aleshores hi haurà un subconjunt de s objectes del conjunt inicial tal que totes les parelles formades amb objectes d'aquest conjunt estaran en la mateixa casella. El superíndex 2 indica, naturalment, que ara estem considerant parelles d'objectes.

En teoria de Ramsey, en lloc de parlar de *caselles*, hom parla normalment de *colors*. Així: donat un conjunt A de n elements, si pintem els parells d'elements de A amb r colors, hi ha un subconjunt B de A de s elements tal que tot parell d'elements de B té el mateix color.

El problema principal és el següent: donats dos dels valors n, r i s, trobar el valor òptim del tercer. Per exemple, donats n i r, trobar el màxim s per al qual val $n \to (s)^2_r$. És clar que el primer valor no trivial de s és 3 i el primer valor no trivial de r és 2. Considerem doncs, per començar, el problema de trobar el valor mínim de n per al qual val

$$n \to (3)^2_2.$$

Podem reformular el problema en el llenguatge de grafs de la manera següent: *trobeu el menor n tal que, si pintem les arestes del graf complet K_n amb* 2 *colors, aleshores hi hagi un triangle monocromàtic.*

O també així: *trobeu el menor n tal que tot graf de n vèrtexs o bé contingui un triangle o bé contingui* 3 *vèrtexs independents, i. e., no connectats entre si.*

Es poden donar moltes altres reformulacions del problema més intuïtives. Per exemple: *quin és el mínim nombre de persones, triades a l'atzar, que cal convidar a sopar per tal d'assegurar-nos que almenys 3 d'elles es coneixeran mútuament o es desconeixeran mútuament?* (Suposem, és clar, que la relació de coneixença és simètrica.)

És clar que n ha de ser més gran que 3, i l'exemple següent mostra que, de fet, n ha de ser més gran que 5. Les arestes connecten les persones que es coneixen.

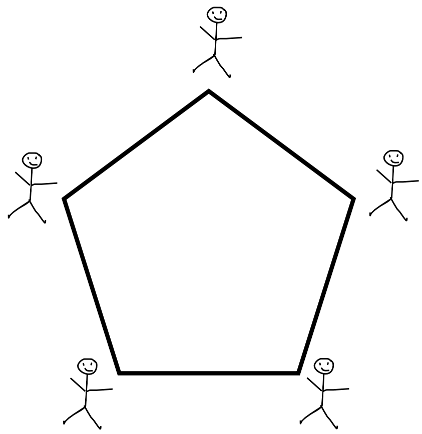

FIGURA 2: Amb 5 no n'hi ha prou.

No és gaire difícil de veure que el pentàgon és l'únic graf de 5 vèrtexs que no conté ni triangles ni conjunts de 3 vèrtexs independents.

D'altra banda, podem veure fàcilment que amb 6 n'hi ha prou. Per exemple, considerem el graf de la figura 3, consistent en 6 persones A, B, C, D, E, F, en el qual dues persones estan relacionades si es coneixen:

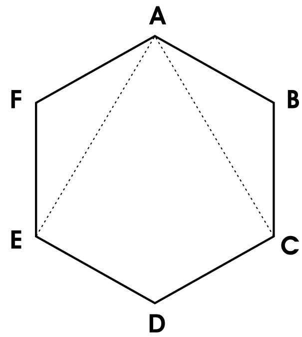

FIGURA 3: Amb 6 n'hi ha prou.

Podem suposar que A coneix C o E, ja que d'altra manera el conjunt $\{A, C, E\}$ és independent. Si A coneix C, aleshores $\{A, B, C\}$ és un triangle. I si A coneix E, aleshores $\{A, E, F\}$ és un triangle.

El teorema de Ramsey, en la seva versió finita, ens diu que per a cada s existeix un n tal que

$$n \to (s)^2_2 .$$

De fet, ens diu molt més:

1 TEOREMA (Teorema de Ramsey. Versió finita) *Per a tot* $k, r, s \in \mathbb{N}$, $k, r > 0$, *hi ha un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n \to (s)^k_r .$$

On $n \to (s)^k_r$ vol dir, naturalment, que si tenim un conjunt A de n objectes i pintem amb r colors tots els seus subconjunts de k elements, aleshores hi haurà un subconjunt B de A format per s objectes, tal que tots els subconjunts de B de k elements estaran pintats del mateix color.

En particular, per a cada s hi ha un **mínim** n tal que

$$n \to (s)^2_2 ,$$

que en el llenguatge de grafs vol dir que, donat un graf G de n vèrtexs, o bé G conté K_s, o bé G té s vèrtexs independents.

Aquest mínim n es denota per $R(s)$ i es coneix com el *Nombre de Ramsey* de s. Així, com ja hem vist, $R(3) = 6$.

Se sap que $R(4) = 18$, encara que això és força més difícil de demostrar. I se sap que $43 \leq R(5) \leq 49$.

Però, això és tot el que se sap de $R(5)$. No deixa de ser descoratjador, però alhora estimulant, que la matemàtica actual, amb tota la seva immensa sofisticació tècnica, no pugui encara donar resposta a un problema aparentment tan senzill com saber quin és el mínim nombre de persones, triades a l'atzar, que cal convidar a sopar per tal d'assegurar-nos que almenys 5 d'elles es coneixeran mútuament o es desconeixeran mútuament.

La teoria de Ramsey finita té un enorme interès, tant per la seva complexitat i bellesa matemàtiques com per les seves nombroses aplicacions. El lector que vulgui conèixer els resultats fonamentals d'aquesta teoria pot consultar l'excel·lent introducció [13], i també l'article [24].

El nostre interès aquí és, però, la teoria de Ramsey infinita, que és aquella part de la teoria de Ramsey en la qual intervenen els nombres infinits. A més de les dificultats tècniques característiques de la teoria de Ramsey finita, la teoria de Ramsey infinita, com veurem tot seguit, presenta dificultats conceptuals que afecten la mateixa fonamentació de la matemàtica. Des del moment en què entrem en el món dels cardinals infinits ens trobem amb problemes de consistència i independència dels axiomes de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció (ZFC), que constitueix el marc estàndard on es desenvolupa l'activitat matemàtica de demostració de teoremes.

2 La teoria de Ramsey infinita

2.1 Els orígens. El teorema de Ramsey

Comencem introduint una mica de notació que ens serà molt útil:

Com és usual en teoria de conjunts, identifiquem el nombre n amb el conjunt dels seus predecessors

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Així, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, etc. Fixem-nos que $0 \in 1 \in 2 \in \cdots$

Escrivim ω en lloc de $\mathbb{N}$, el conjunt dels nombres naturals.

ω, ordenat per la relació de pertinença $\in$, és el primer nombre ordinal infinit, i també el primer nombre cardinal infinit.

Frank Plumpton Ramsey va publicar el 1930 el seu famós teorema en un article que porta per títol «On a Problem of Formal Logic». Ramsey va utilitzar el teorema per a resoldre un problema de decidibilitat en lògica matemàtica. El teorema diu el següent:

2 Teorema (Teorema de Ramsey. Versió infinita) *Per a qualssevol nombres naturals $k, r > 0$:*

$$\omega \to (\omega)^k_r.$$

Això és, si pintem tots els conjunts de nombres naturals de k elements amb r colors, hi haurà un conjunt infinit X de nombres naturals tal que tots els subconjunts de X de k elements tindran el mateix color.

En particular,

$$\omega \to (\omega)^2_2,$$

que reformulat en el llenguatge de grafs ens diu que donat un graf infinit qualsevol, o bé conté un subgraf infinit complet (*i. e.*, on tots els vèrtexs estan relacionats entre si), o bé conté un conjunt infinit de vèrtexs independents (*i. e.*, on cap vèrtex no està relacionat amb cap altre).

Necessitem encara una mica més de notació:

Recordem que un nombre ordinal és numerable si és o bé finit, o bé bijectable amb ω. L'ordinal ω_1 és el conjunt de tots els ordinals numerables, ordenat per $\in$. ω_1 és també el primer cardinal no numerable. En general, per a cada ordinal α, $\omega_{\alpha+1}$ és el conjunt de tots els ordinals bijectables amb algun ordinal menor o igual que ω_α, i és també el cardinal successor de ω_α. Es pot demostrar fàcilment que tot cardinal κ té un successor, que representem per κ^+. Així doncs, $\omega_\alpha^+ = \omega_{\alpha+1}$. Tota unió de cardinals és un cardinal. Així, ω_ω és la unió de tots els ω_n, $n \in \omega$, i és el primer cardinal límit no numerable.

Donat un conjunt qualsevol A i un cardinal κ, finit o infinit,

$$[A]^\kappa = \{X \subseteq A : |X| = \kappa\}\,,$$

on $|X|$ denota la cardinalitat, o nombre d'elements, de X.

Per exemple:

(1) $[\omega]^2$ és el conjunt de tots els parells (no ordenats) de nombres naturals.

(2) $[\omega]^\omega$ és el conjunt de tots els conjunts infinits de nombres naturals.

Una *coloració* de $[A]^\kappa$ amb r colors és una funció

$$f : [A]^\kappa \to r\,.$$

Diem que $X \subseteq A$ és *f-homogeni* si f restringida a $[X]^\kappa$ és constant, *i. e.*, si la coloració és monocromàtica en $[X]^\kappa$.

Per tant,

$$\omega \to (\omega)^k_r$$

si i només si per a tota coloració

$$f : [\omega]^k \to r$$

hi ha un $X \in [\omega]^\omega$ que és f-homogeni.

Fixem-nos que el principi de les caselles ens diu que

$$\omega \to (\omega)^1_r$$

per a tot nombre natural $r > 0$.

Vegem una demostració del teorema de Ramsey en la seva versió infinita i per al cas $k = r = 2$. El cas general, per a qualssevol r i s, es demostra senzillament per inducció aritmètica a partir d'aquest primer cas.

Demostració del teorema de Ramsey:

Sigui $f : [\omega]^2 \to 2$.

Construïm una successió de nombres naturals

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

i una successió de conjunts

$$\omega = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$$

inductivament: donats $x_0, \ldots, x_i$ i $X_0, \ldots, X_i$, sigui $f_i : [X_i - \{x_i\}]^1 \to 2$ la funció donada per

$$f_i(A) = f(A \cup \{x_i\}) .$$

Aplicant el principi de les caselles, sigui X_{i+1} infinit i f_i-homogeni.

Sigui x_{i+1} el menor element de X_{i+1} més gran que x_i. Ara sigui

$$X = \{x_i : i < \omega\} .$$

Si $B, C \in [X]^2$ i B i C tenen el mateix menor element x_i, aleshores

$$B - \{x_i\},\ C - \{x_i\} \subseteq X_{i+1}$$

i així

$$f(B) = f_i(B - \{x_i\}) = f_i(C - \{x_i\}) = f(C) .$$

Observem que f_i és constant en $[\{x_j : j > i\}]^1$. Sigui $g : [X]^1 \to 2$ la funció donada per $g(\{x_i\}) = f_i(\{x_{i+1}\})$. Pel principi de les caselles, hi ha un subconjunt infinit H de X que és g-homogeni. Però si $x_i, x_j \in H$, on $i < j$, tenim que $f(\{x_i, x_j\}) = f_i(\{x_j\}) = g(\{x_i\})$. Així doncs, H és f-homogeni. □

No és difícil veure que el mateix tipus d'argument permet demostrar el teorema de Ramsey en la seva versió finita.

2.2 Cardinals no numerables i grans cardinals

Generalitzant la notació anterior, donats cardinals $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ qualssevol, finits o infinits, la notació

$$\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$$

vol dir que, per a tot conjunt A de cardinalitat κ i per a tota coloració de $[A]^\mu$ amb ν colors, hi ha un $X \in [A]^\lambda$ tal que $[X]^\mu$ és monocromàtic.

Com que cada cardinal κ s'identifica amb el conjunt de tots els ordinals menors que κ, un conjunt A té cardinalitat κ si i només si és bijectable amb κ. Tenim, doncs, que

$$\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$$

si i només si per a tota coloració de $[\kappa]^\mu$ amb ν colors, hi ha un $X \in [\kappa]^\lambda$ tal que $[X]^\mu$ és monocromàtic.

És clar que si val

$$\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$$

aleshores també val per a valors de κ més grans o per a valors de λ, μ i ν més petits.

Com que normalment considerarem només el cas de dos colors, quan $\nu = 2$ no l'escriurem.

Recordem que el teorema de Ramsey ens diu en particular que

$$\omega \to (\omega)^2 .$$

És natural preguntar-nos, doncs, què podem dir sobre cardinals no numerables, això és, més grans que ω.

Els primers resultats en teoria de Ramsey sobre cardinals no numerables són negatius. Recordem que ω_1 és el primer cardinal no numerable. Donat un cardinal κ, 2^κ és el cardinal del conjunt de tots els subconjunts de κ. Ben aviat es va veure que el teorema de Ramsey no es podia generalitzar al cas no numerable:

3 Teorema (Sierpiński, 1933; Kurepa, 1941)

$$2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2 .$$

En particular, prenent $\kappa = \omega$, tenim

$$2^\omega \not\to (\omega_1)^2$$

i com que $\omega_1 \leq 2^\omega$,

$$\omega_1 \not\to (\omega_1)^2 .$$

Hi ha, doncs, una coloració de tots els parells d'ordinals numerables en dos colors per a la qual no hi ha cap conjunt no numerable que sigui monocromàtic.

Una pregunta natural és, doncs, si hi ha algun cardinal κ tal que

$$\kappa \to (\omega_1)^2 .$$

La resposta és afirmativa:

4 Teorema (Erdös, 1942) *Per a qualsevol cardinal λ hi ha un cardinal κ tal que*

$$\kappa \to (\lambda)^2 .$$

De fet, per a $\lambda = \omega_1$ es pot fins i tot donar una cota superior per al valor de κ:

5 Teorema (Erdös-Rado, 1956)

$$(2^\omega)^+ \to (\omega_1)^2_\omega .$$

El problema, però, continua sent si es pot generalitzar el teorema de Ramsey al cas no numerable, és a dir, si hi ha algun cardinal κ no numerable tal que

$$\kappa \to (\kappa)^2 .$$

Un cardinal κ amb aquesta propietat s'anomena *dèbilment compacte*.

Recordem que un cardinal infinit κ és regular si no és el límit de menys de κ ordinals menors que κ. Per exemple, ω és regular. I també ho és ω_1, ja que una unió numerable de conjunts numerables és numerable. En canvi, ω_ω no és regular ja que és el límit dels cardinals ω_n, $n < \omega$. De fet, ω_ω és el primer cardinal infinit no regular. Un cardinal κ és *inaccessible* si és regular, no numerable, i per a tot $\lambda < \kappa$ tenim que $2^\lambda < \kappa$. Observem que ω és regular i que per a tot $n < \omega$, $2^n < \omega$. Per tant, un cardinal inaccessible és aquell que té les mateixes propietats que ω, però que és no numerable. No podem demostrar en ZFC que existeixi un cardinal inaccessible, ja que l'existència d'un d'aquests cardinals implica la consistència de ZFC, però pel teorema d'incompletesa de Gödel la consistència de ZFC no es pot demostrar en ZFC .

P. Erdös i A. Tarski van demostrar el 1943 que tot cardinal dèbilment compacte és inaccessible. Per tant, l'existència de cardinals com els inaccessibles, o els dèbilment compactes, s'ha de postular com a axiomes addicionals de la teoria de conjunts. Aquests axiomes formen part dels anomenats *axiomes de grans cardinals*. La teoria de grans cardinals és una de les àrees principals de la teoria de conjunts. El lector interessat en aquest tema pot consultar el llibre [16].

En el llibre de R. L. Graham, B. L. Rothschild i J. H. Spencer, *Ramsey Theory* ([13]), hi podem llegir a l'últim paràgraf:

We have strayed into the arcane world of «large cardinal axioms», where questions may be answered by yes, no, and various shades of maybe. This is a finite book on finite mathematics. We choose to stop here.

Nosaltres, però, no ens deturarem aquí, sinó que esperem convèncer el lector del fet que és precisament a partir d'aquest punt on la teoria de Ramsey esdevé encara més interessant i sorprenent.

2.3 Cardinals de Ramsey

Farem servir la notació següent: donat un conjunt A, sigui $[A]^{<\omega}$ el conjunt

$$\bigcup_n [A]^n .$$

Identificant, com és usual, un cardinal qualsevol κ amb el conjunt dels ordinals menors que κ, escriurem $\kappa \to (\lambda)_2^{<\omega}$ per indicar que per a tota coloració de $[\kappa]^{<\omega}$ amb 2 colors hi ha un $X \in [\kappa]^\lambda$ tal que $[X]^n$ és monocromàtic, per a cada n. Fixem-nos que no podem pas demanar que hi hagi un $X \in [\kappa]^\lambda$ tal que $[X]^{<\omega}$ sigui monocromàtic, ja que, per exemple, podríem pintar tots els elements de $[X]^2$ d'un color i tots els elements de $[X]^3$ d'un altre color.

Ramsey va demostrar que per a cada λ *finit* hi ha sempre un n tal que per a tot $\kappa \geq n$, $\kappa \to (\lambda)^{<\omega}$.

La pregunta natural és, doncs, si hi ha algun cardinal λ *infinit* per al qual existeixi un κ tal que $\kappa \to (\lambda)^{<\omega}$.

El menor κ tal, si existeix, s'anomena el cardinal λ-*Erdös* i es denota per $\kappa(\lambda)$.

Si $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}$, aleshores es diu que κ és un cardinal *Ramsey*.

Els cardinals λ-Erdös i els cardinals Ramsey són molt més grans que els dèbilment compactes. En efecte,

6 Teorema (Reinhardt-Silver, 1965) *Si $\kappa(\omega)$ existeix, llavors hi ha un cardinal menor que $\kappa(\omega)$ que és dèbilment compacte.*

Si κ és Ramsey, aleshores és dèbilment compacte i hi ha κ cardinals dèbilment compactes menors que aquest. L'existència de cardinals λ-Erdös, o de cardinals Ramsey, no es pot demostrar, doncs, en ZFC i s'han de considerar, per tant, com a axiomes de grans cardinals.

L'existència de $\kappa(\omega_1)$ té importants conseqüències. Vegem-ne algunes:

(1) Recordem que L, l'*univers constructible* de Gödel, és el menor model de la teoria de conjunts de ZFC que conté tots els ordinals i és, per tant, un model natural per a la matemàtica.

7 Teorema (Rowbottom-Silver, 1971) *Si $\kappa(\omega_1)$ existeix, aleshores només hi ha una quantitat numerable de nombres reals a L. En particular, l'univers matemàtic no pot ser L.*

(2) Recordem que un conjunt de nombres reals és *analític* si és la imatge contínua d'un conjunt Borel. Els conjunts analítics, i per tant els seus complements, els conjunts coanalítics, són mesurables en el sentit de Lebesgue. No es pot demostrar, però, a partir dels axiomes usuals de la teoria de conjunts de ZFC que les imatges contínues dels conjunts coanalítics siguin mesurables en el sentit de Lebesgue. En canvi,

8 Teorema (Solovay, 1969) *Si $\kappa(\omega_1)$ existeix, aleshores tota imatge contínua d'un conjunt coanalític de nombres reals és mesurable en el sentit de Lebesgue.*

(3) Donat $A \subseteq [0,1]$, el *joc* associat a A, que denotem per $\Game_A$, és el següent: Tenim dos jugadors, I i II, que juguen alternativament $n_i \in \{0,1\}$: I tira n_0, a continuació II tira n_1, després I tira n_2, i així successivament. En general, a la tirada $2k$, el jugador I tira n_{2k} i a la tirada $2k+1$, el jugador II tira n_{2k+1}, de manera que el joc té aquest aspecte:

I	n_0		n_2		n_4		$\cdots$		n_{2k}		$\cdots$
II		n_1		n_3		$\cdots$		$\cdots$		n_{2k+1}		$\cdots$

El joc s'allarga indefinidament. Després d'un nombre infinit de tirades, els jugadors han produït una successió infinita $n_0, n_1, n_2, \cdots$ de zeros i uns. El jugador I guanya el joc si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{2^{i+1}} \in A .$$

En cas contrari, guanya el jugador II.

Es diu que el joc $\Game_A$ està *determinat* si hi ha una estratègia guanyadora per a un dels dos jugadors. Això és, si existeix una funció del conjunt de totes les successions finites de zeros i uns en $\{0,1\}$ tal que, si un dels dos jugadors juga d'acord amb aquesta funció, aleshores sempre guanyarà el joc. Per exemple, f és una estratègia guanyadora per a II si sempre que II jugui $f(n_0,\ldots,n_{2k})$ en la tirada $2k+1$, aleshores II guanya el joc, independentment del que jugui I.

Diem que un conjunt $A \subseteq [0,1]$ està determinat si ho està el joc $\Game_A$.

El fet que un conjunt estigui determinat implica que té totes les propietats de regularitat que tenen els conjunts Borel. Per exemple, és Lebesgue mesurable, té la propietat de Baire, té la propietat del conjunt perfecte, etc.

Tot i que es pot demostrar fàcilment, fent servir l'axioma d'elecció, que hi ha conjunts que no estan determinats, D. Martin [20] va demostrar que tot conjunt Borel sí que està determinat. Pel que fa a les imatges contínues de conjunts Borel, els conjunts analítics, no es pot demostrar en ZFC que estiguin determinats. La raó és que això implicaria la consistència de l'existència de grans cardinals. D'altra banda,

9 Teorema (Martin, 1970) *Si $\kappa(\omega_1)$ existeix, aleshores tot conjunt analític està determinat.*

Amb aquests exemples només hem volgut il·lustrar breument el fet sorprenent que la generalització natural del teorema de Ramsey al cas no numerable ens porta més enllà del marc estàndard on es desenvolupa la major part de la matemàtica, donat per la teoria de conjunts de ZFC, i que té conseqüències importants tant en àrees concretes de la matemàtica, com la teoria de la mesura i la topologia, com globalment pel que fa a l'estructura general de l'univers de tots els conjunts.

3 Teoria de Ramsey dels nombres reals

Veurem a continuació una altra generalització important del teorema de Ramsey al cas infinit. Considerarem ara l'exponent infinit ω, això és, en lloc de pintar parelles pintem subconjunts infinits de κ:

$$\kappa \to (\lambda)^{\omega},$$

on κ, λ són infinits, naturalment.

Contraexemple: Per a $x \in [\omega]^{\omega}$ i $n \in \omega$, sigui $x(n)$ l'n-èsim element de x, *i. e.*, $x(n) \in x$ i $|x(n) \cap x| = n$. Si $x, y \in [\omega]^{\omega}$, sigui $x \equiv y$ si i només si $\{n : x(n) \neq y(n)\}$ és finit. Clarament, $\equiv$ és una relació d'equivalència. Escollim un representant de cada classe d'equivalència i definim la coloració f de la manera següent:

$$f(x) = 0$$

si i només si x difereix del representant de la seva classe d'equivalència en un nombre parell de llocs. Aleshores es veu fàcilment que f no té cap conjunt infinit f-homogeni. Tenim, doncs, que

$$\omega \not\to (\omega)^\omega .$$

I per tant, per a tot κ, λ infinits

$$\kappa \not\to (\lambda)^\omega .$$

En el cas $\kappa = \lambda = \omega$, una coloració és una funció

$$f : [\omega]^\omega \to 2 .$$

Observem que $[\omega]^\omega$ és homeomorf a l'espai de Baire $\mathcal{N}$, i per tant als irracionals. En efecte, la funció $h : [\omega]^\omega \to \mathcal{N}$ donada per $h(x) = \langle a_n : n \in \omega\rangle$, on $a_0 = x(0)$ i $a_{n+1} = x(n+1) - x(n) - 1$ és bijectiva. Així, $[\omega]^\omega$ amb la topologia induïda per h és homeomorf a $\mathcal{N}$.

Per tant, té sentit parlar de coloracions obertes, coloracions Borel, coloracions analítiques, etc. Així, per exemple, una coloració $f : [\omega]^\omega \to 2$ és oberta si $f^{-1}(0)$ és un subconjunt obert de $[\omega]^\omega$, etc. Per a coloracions senzilles, és a dir, obertes, Borel, i fins i tot analítiques, sí que existeixen conjunts infinits homogenis:

10 Teorema *1)* (Nash-Williams, 1965)

$$\omega \to (\omega)^\omega$$

per a coloracions obertes.

2) (Galvin i Prikry, 1973)

$$\omega \to (\omega)^\omega$$

per a coloracions Borel.

3) (Silver, 1970; Ellentuck, 1974)

$$\omega \to (\omega)^\omega$$

per a coloracions analítiques.

El teorema de Ramsey es pot veure com una conseqüència immediata del punt 1 del teorema anterior. En efecte, donada una coloració $f : [\omega]^k \to \{0,1\}$, sigui f^* la coloració de $[\omega]^\omega$ donada per $f^*(x) = 0$ si i només si $f(\{x(0), \ldots, x(k-1)\}) = 0$. És clar que f^* és una coloració oberta, i que un conjunt infinit f^*-homogeni ens dóna un conjunt infinit f-homogeni.

La propietat $\omega \to (\omega)^\omega$ es pot reformular en termes de propietats de conjunts de nombres reals (irracionals). En efecte, diem que $A \subseteq [\omega]^\omega$ és *Ramsey* si i només si existeix un $x \in [\omega]^\omega$ tal que o bé $[x]^\omega \subseteq A$ o bé $A \cap [x]^\omega = \emptyset$.

És clar aleshores que A és Ramsey si la funció característica de A, això és, la coloració f tal que $f(x) = 0$ si $x \notin A$ i $f(x) = 1$ si $x \in A$, té un conjunt infinit homogeni.

Així, identificant $[\omega]^\omega$ amb $\mathcal{N}$, el teorema de Galvin-Prikry diu que tot conjunt Borel de nombres reals (irracionals) és Ramsey. I el teorema de Silver diu que tot conjunt analític (i, per tant, tot conjunt coanalític) de nombres reals és Ramsey.

La propietat de ser Ramsey per a conjunts de reals més complexos que els analítics i coanalítics, per exemple, per a imatges contínues de conjunts coanalítics, és independent de la teoria de conjunts de ZFC. Per una banda, en l'univers constructible L de Gödel hi ha imatges contínues de conjunts coanalítics que no són Ramsey. Però, d'altra banda, si val l'axioma de Martin (vegeu [18] o [15]), o si existeix $\kappa(\omega_1)$, aleshores tota imatge contínua d'un conjunt coanalític és Ramsey. A. R. D. Mathias [22] va demostrar la consistència de $\omega \to (\omega)^\omega$ per a totes les coloracions «definibles» amb paràmetres nombres reals i ordinals, suposant que l'existència d'un cardinal inaccessible és consistent amb ZFC. Utilitzant aquest resultat, W. H. Woodin i S. Shelah van demostrar el següent:

11 Teorema (Woodin-Shelah, 1988) *Si existeixen grans cardinals (per exemple, un cardinal supercompacte), aleshores tot conjunt de nombres reals «definible» amb paràmetres nombres reals i ordinals és Ramsey. En particular, tots els conjunts projectius (*i. e.*, els conjunts obtinguts a partir dels conjunts Borel mitjançant imatges contínues i complements) de nombres reals són Ramsey.*

Una pregunta molt important, i que continua oberta, és si la consistència de l'existència d'un cardinal inaccessible amb ZFC és una hipòtesi necessària per a demostrar la consistència del fet que tot conjunt projectiu de nombres reals és Ramsey.

4 Teoria de Ramsey en espais de Banach

Per acabar veurem algunes aplicacions a la teoria dels espais de Banach, una de les àrees on la teoria de Ramsey ha estat més útil. En particular veurem alguns resultats de W. T. Gowers, que són part del treball pel qual rebé la medalla Fields al congrés internacional de matemàtics (ICM) de Berlín, el 1998.

La primera aplicació realment important de la teoria de Ramsey, en la forma del teorema de Nash-Williams esmentat més amunt, a la teoria d'espais de Banach fou el famós teorema ℓ_1 de Rosenthal (segons la demostració de J. Farahat; vegeu [12]). Recordem que una successió fitada de vectors $(x_i)_i$ en un espai de Banach X és *dèbilment Cauchy* si per a tot x^* en el dual X^* de X, $(x^* x_n)_n$ convergeix. Recordem també que ℓ_1 és l'espai de les successions $x = (x_n)_n$ de nombres reals tals que $\sum_n |x_n| < \infty$ amb la norma $\|x\| = \sum_n |x_n|$:

12 TEOREMA (Rosenthal, 1974) *Tota successió fitada de vectors en un espai de Banach té una subsuccessió que és o bé dèbilment Cauchy, o bé equivalent a la base unitària de ℓ_1.*

És interessant d'observar que aquest teorema, com molts dels teoremes de tipus Ramsey, té la forma d'una dicotomia.

A l'hora d'analitzar l'estructura dels espais de Banach de dimensió infinita, i de classificar-los, convé estudiar els subespais d'un espai donat. Suposarem a partir d'ara que els espais de Banach són separables i de dimensió infinita. Sigui, doncs, $\mathcal{X}$ un espai de Banach. Una *base de Schauder* de $\mathcal{X}$ és una successió de vectors de $\mathcal{X}$, diguem $(x_i)_i$, tal que tot vector x de $\mathcal{X}$ ve representat de manera única com

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \, ,$$

on els λ_i són escalars. Tot i que no és cert que tot espai de Banach $\mathcal{X}$ tingui una base de Schauder, sí que és cert que per a cada espai $\mathcal{X}$ hi ha un subespai $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ de dimensió infinita que té una base de Schauder. Com que el que ens interessa són els subespais d'un espai donat, podem suposar, doncs, anant a un subespai si cal, que tot espai té una base de Schauder. A més, podem suposar que les bases són normalitzades, això és, que tot vector de la base té norma 1. Donada una base de Schauder normalitzada de $\mathcal{X}$, diguem $(e_i)_i$, el *suport* d'un vector $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ és el conjunt dels i tals que $\lambda_i \neq 0$. Representem el suport de x respecte a la base $(e_i)_i$ per $\mathrm{supp}(x)$. Un *vector bloc* és un vector normalitzat amb suport finit. Escrivim $x < y$ si $\max(\mathrm{supp}(x)) < \min(\mathrm{supp}(y))$. Una successió de vectors $(y_i)_i$ és una *base bloc* si tot y_i és un vector bloc i per a tot i, $y_i < y_{i+1}$. Podem identificar una base bloc amb el subespai que genera, això és, amb la clausura de la seva expansió lineal. D'aquests subespais en direm *subespais bloc*. Tot subespai Y d'un espai $\mathcal{X}$ amb una base de Schauder $(e_n)_n$ conté un subespai Z quasi isomètric a un bloc subespai de $\mathcal{X}$, respecte a la base $(e_n)_n$. Per tant, si volem estudiar l'estructura dels subespais separables d'un espai donat $\mathcal{X}$, podem limitar-nos a estudiar les bases bloc de $\mathcal{X}$.

Sigui $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ el conjunt de les bases bloc de $\mathcal{X}$. Farem servir X, Y, Z per representar les bases bloc, o els corresponents subespais bloc que generen. Vist com un espai de successions amb la topologia heretada de $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ amb la topologia producte, $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ és un espai polonès, això és, separable i completament metritzable.

Donat un conjunt $\sigma \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{X})$ i donada una successió de nombres reals $\Delta = (\delta_i)_i$, on $\delta_i > 0$ per a cada i, sigui σ_Δ el conjunt de les bases bloc $(x_i)_i$ que estan a distància $\leq \Delta$ d'alguna base bloc $(y_i)_i$ de σ, això és, $d(x_i, y_i) \leq \delta_i$, per a cada i.

En teoria de Ramsey també hi ha resultats de tipus bloc. En efecte, diguem que una successió $(A_i)_i$ d'elements de $[\omega]^{<\omega}$ és una successió bloc si per a tot i, $\max(A_i) < \min(A_{i+1})$. El teorema de Hindman diu el següent:

13 Teorema (Hindman, 1974) *Si pintem $[\omega]^{<\omega}$ amb un nombre finit de colors, llavors hi ha una successió bloc tal que qualsevol unió finita d'elements de la successió té el mateix color.*

Una extensió d'aquest teorema és el resultat de Gowers següent sobre l'espai c_0 de les successions $x = (x_n)_n$ que convergeixen a 0 amb la norma $\|x\| = sup_n|x_n|$. Recordem que un conjunt de vectors unitaris d'un espai X és *asimptòtic* si interseca l'esfera unitat de tot subespai bloc de X:

14 Teorema (Gowers, 1992) *Sigui $X \in \mathbf{B}(c_0)$ i $\delta > 0$. Si A és un conjunt asimptòtic de X, llavors A_δ conté l'esfera unitat d'algun subespai bloc Y de X.*

Sigui $[X]$ el conjunt de tots els subespais bloc de X. De manera anàloga a la propietat de Ramsey per a subconjunts de $[\omega]^\omega$, podem preguntar-nos, donat un conjunt $\sigma \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{X})$, si té la propietat de Ramsey, és a dir, si existeix $X \in \mathbf{B}(\mathcal{X})$ tal que o bé $[X] \subseteq \sigma$, o $[X] \cap \sigma = \emptyset$. Malauradament, això no és possible, ni tan sols per a conjunts oberts de $\mathbf{B}(\mathcal{X})$. Però podem demanar una mica menys:

Diem que $\sigma \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{X})$ és *gairebé-Ramsey* si o bé hi ha un $X \in \mathbf{B}(\mathcal{X})$ tal que $[X] \cap \sigma = \emptyset$, o bé per a tot Δ hi ha algun X tal que $[X] \subseteq \sigma_\Delta$.

15 Teorema (Gowers, 1994) *Tot subconjunt analític de $\mathbf{B}(c_0)$ és gairebé Ramsey.*

Aplicant tècniques de teoria de conjunts com el *forcing* i teoria descriptiva de conjunts, podem obtenir un resultat molt més general:

16 Teorema (Bagaria i López-Abad, 2000) *Si existeixen grans cardinals, aleshores tot subconjunt* definible *de $\mathbf{B}(c_0)$ és gairebé Ramsey.*

Per a espais de Banach que no continguin c_0, cal una noció encara més dèbil. Aquesta és la noció de ser *dèbilment Ramsey* i fou introduïda per Gowers. Per a definir-la cal considerar el joc següent:

Donat $Y \in \mathbf{B}(\mathcal{X})$ i $\sigma \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{X})$, definim el joc $\partial_\sigma[Y]$ així: Hi ha dos jugadors, I i II. I comença tirant $Y_1 \in [Y]$, llavors II tira un $y_1 \in Y_1$; a continuació II tira $Y_2 \in [Y]$, i II tira un $y_2 \in Y_2$, i així successivament. Cal que per a tot i, $y_i < y_{i+1}$.

II guanya el joc si $(y_n)_n \in \sigma$. La idea del joc és que II intenta construir una base bloc que pertanyi a σ, però I li diu en cada tirada en quin subespai ha d'escollir el corresponent vector bloc. En cas contrari guanya I. El joc té, doncs, aquest aspecte:

I	$Y_1 \in [Y]$		$Y_2 \in [Y]$		$\cdots$	$Y_n \in [Y]$		$\cdots$
II		$y_1 \in Y_1$		$y_2 \in Y_2$	$\cdots$		$y_n \in Y_n$	$\cdots$

Una *estratègia guanyadora E per a I* en aquest joc és una funció que assigna a cada successió finita de vectors bloc un subespai bloc de tal manera que I guanya sempre que jugui d'acord amb E. Això és,

I	$E(\emptyset)$		$E((y_1))$		$E((y_1, y_2))$	$\cdots$
II		$y_1 \in E(\emptyset)$		$y_2 \in E((y_1))$		$\cdots$

De manera semblant, una *estratègia guanyadora per a* II en aquest joc és una funció que assigna un vector bloc a cada successió finita de subespais bloc de tal manera que II guanya sempre que jugui d'acord amb E. Això és,

I	$Y_1 \in [Y]$		$Y_2 \in [Y]$		$\cdots$
II		$y_1 = E((Y_1))$		$y_2 = E((Y_1, Y_2))$	$\cdots$

Podem ara ja definir la noció de conjunt dèbilment Ramsey: Sigui $\Delta > 0$. Un conjunt $\sigma \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{X})$ és Δ*-dèbilment Ramsey* si i només si existeix un $Y \in \mathbf{B}(\mathcal{X})$ tal que o bé $[Y] \cap \sigma = \emptyset$, o bé II té una estratègia guanyadora per al joc $\Game_{\sigma_\Delta}[Y]$. σ és *dèbilment Ramsey* si és Δ-dèbilment Ramsey per a tot $\Delta > 0$.

Gowers va demostrar el 1994 que tota intersecció de conjunts oberts és dèbilment Ramsey. Aquest resultat constitueix el nucli de la famosa dicotomia de Gowers ([10]) per a espais de Banach, la qual permeté respondre afirmativament al vell i conegut problema de l'espai homogeni, formulat per Banach l'any 1932: Suposem que $\mathcal{X}$ és un espai de Banach separable i de dimensió infinita tal que tot subespai de $\mathcal{X}$ és isomorf a $\mathcal{X}$. És $\mathcal{X}$ isomorf a l'espai de Hilbert ℓ_2?

Una generalització del resultat de Gowers a conjunts més complexos, els analítics, fou anunciada per Gowers el 1994. Una demostració d'aquest resultat fent servir tècniques conjuntistes fou obtinguda per Bagaria i López-Abad el 2000.

17 Teorema (Gowers, 1994; Bagaria i López-Abad, 2001; Gowers, 2002) *Per a tot espai de Banach separable i de dimensió infinita $\mathcal{X}$, tot conjunt analític de $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ és dèbilment Ramsey.*

Finalment, tenim el resultat general següent sobre conjunts dèbilment Ramsey:

18 Teorema (Bagaria i López-Abad, 2001) *Si existeixen grans cardinals (per exemple, infinits cardinals de Woodin), o si tots els conjunts* definibles *amb paràmetres nombres reals i ordinals estan determinats, aleshores, per a tot espai de Banach separable i de dimensió infinita $\mathcal{X}$, tot subconjunt* definible *de $\mathbf{B}(\mathcal{X})$ és dèbilment Ramsey.*

El lector interessat pot trobar més informació sobre les aplicacions de la teoria de Ramsey infinita a la teoria d'espais de Banach en l'excel·lent recull de E. Odell [25], on trobarà també una llista de problemes oberts.

Referències

[1] BAGARIA, J.; LÓPEZ-ABAD, J. «Weakly Ramsey sets in Banach spaces». *Advances in Mathematics*, 160 (2001), p. 133–174.

[2] BAGARIA, J.; LÓPEZ-ABAD, J. «Determinacy and weakly Ramsey sets in Banach spaces». *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 354, núm. 4 (2002), p. 1327–1349.

[3] ELLENTUCK, E. «A new proof that analytic sets are Ramsey». *The Journal of Symbolic Logic*, 39, (1974), p. 163–165.

[4] ERDÖS, P. «Some set-theoretical properties of graphs». *Revista, Universidad Nacional de Tucumán, Serie A, Matemáticas y Física teórica*, 3 (1942), p. 363–367.

[5] ERDÖS, P.; RADO, R. «A partition calculus in set theory». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 62 (1956), p. 427–489.

[6] ERDÖS, P.; TARSKI, A. «On families of mutually exclusive sets». *Annals of Mathematics*, 44 (1943), p. 315–329.

[7] GALVIN, F.; PRIKRY, K. «Borel sets and Ramsey's Theorem». *The Journal of Symbolic Logic*, 38 (1973), núm. 2, p. 193–198.

[8] GOWERS, W. T. «Lipschitz functions on classical spaces». *European Journal of Combinatorics*, 13 (1992), p. 141–151.

[9] GOWERS, W. T. «Analytic sets and games in Banach spaces». *Preprint IHES*, M/94/42.

[10] GOWERS, W. T. «A new dichotomy for Banach spaces». *Geometric and Functional Analysis*, 6 (1996), p. 1083-1093.

[11] GOWERS, W. T. «An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies». *Annals of Mathematics*, (2) 156 (2002), núm. 3, p. 797–833

[12] GOWERS, W. T. «Ramsey methods in Banach spaces». A: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*. North-Holland, v. 1, 2003.

[13] GRAHAM, R. L.; ROTHSCHILD, B. L.; SPENCER, J. H. *Ramsey Theory*. John Wiley & Sons, 1980.

[14] HINDMAN, N. «Finite Sums from Sequences within Cells of a Partition of $\mathbb{N}$». *Journal of Combinatorial Theory Ser. A*. 17 (1974), p. 1–11.

[15] JECH, T. *Set Theory*. 3a ed. Springer, 2003.

[16] KANAMORI, A. *The Higher infinite*. 2a ed. Springer, 2003.

[17] KECHRIS, A. S. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer, 1995.

[18] KUNEN, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam: North-Holland, 1980.

[19] KUREPA, D. R. «Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnées» (continuation). *Revista de Ciencias de la Universidad Mayor de San Marcos* [Lima], 43 (1941), p. 483–500.

[20] MARTIN, D. A. «Borel Determinacy». *Annals of Mathematics*, 102 (1975), p. 363–371.

[21] Martin, D. A. «Measurable cardinals and analytic games». *Fundamenta Mathematicae*, 66 (1970), p. 287–291.

[22] Mathias, A. R. D. «Happy families». *Annals of Mathematical Logic*, 12 (1977), núm. 1, p. 59–111.

[23] Nash-Williams, C. St J. A. «On well quasi-ordering transfinite sequences». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 61 (1965), p. 33–39.

[24] Nesetril, J. «Ramsey Theory». *Handbook of Combinatorics.* Graham, R. L.; Groetschel, M. i Lovász, L. [ed.]. North-Holland, 1995.

[25] Odell, E. «On Subspaces, Asymptotic Structure, and Distortion of Banach Spaces; Connections with Logic». *Analysis and Logic.* Ward Henson, C.; Kechris, Alexander S.; Odell, Edward; Iovino, Jose i Finet, Catherine [ed.]. London Mathematical Society Lecture Note, 2003.

[26] Ramsey, F. P. «On a Problem of Formal Logic». *Proc. London Math. Soc.*, 30 (1930), p. 264–286.

[27] Reinhardt, W. N.; Silver, J. H. «On some problems of Erdös-Hajnal» (abstract) *Notices of the American Mathematical Society*, 12 (1965), p. 723–724.

[28] Rosenthal, H. «A characterization of Banach spaces containing ℓ_1». *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.*, 71 (1974), p. 2411–2413.

[29] Rowbottom, F.; Silver, J. H. «Some strong axioms of infinity incompatible with the axiom of constructibility». *Annals of Mathematical Logic*, 3 (1971), p. 1–44.

[30] Shelah, S.; Woodin, W. H. «Large cardinals imply that every reasonably definable set of reals is Lebesgue measurable». *Israel Journal of Mathematics*, vol. 70, núm. 3 (1990), p. 381–394.

[31] Sierpiński, W. «Sur un problème de la théorie des relations». *Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa*, (2) 2 (1933), p. 285–287.

[32] Silver, J. «Every analytic set is Ramsey». *The Journal of Symbolic Logic*, 35 (1970), p. 60–64.

[33] Solovay, R. «A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable». *Annals of Mathematics*, 92 (1970), p. 1–56.

[34] Solovay, R. «On the cardinality of Σ^1_2 sets of reals». *Foundations of Mathematics.* Bullof et al. [ed.]. Berlín-Heidelberg-Nova York: Springer, (1969), p. 58–73

Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA) i
Universitat de Barcelona
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
c. Baldiri i Reixac, s/n
08028 Barcelona
bagaria@ub.edu