Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 2, 2003. Pàg. 73–104

Conjunts evitables, conjunts invisibles i el viatjant de comerç, o com l'anàlisi real ajuda l'anàlisi complexa

Joan Verdera

La vida es breu e l'art se mostra llonga

Ausiàs March (1397-1459)

1 Introducció

Recentment s'han demostrat diversos teoremes d'anàlisi complexa que resolen problemes que varen ser plantejats fa aproximadament trenta-cinc anys ([7], [8], [16] i [23]). La qüestió general, que és molt bàsica, consisteix a entendre la natura dels conjunts que són singularitats evitables per a les funcions analítiques i fitades. Aquests conjunts són els que gaudeixen de la propietat següent: sempre que tinguem una funció que sigui analítica i fitada fora del conjunt resulta que, de fet, la funció es pot estendre analíticament a tots els punts del conjunt. El problema central és el d'esbrinar si hi ha condicions de tipus geomètric que caracteritzin els conjunts evitables. Les condicions que s'arriben a conjecturar després de molt esforç es formulen en el llenguatge de la teoria geomètrica de la mesura i, en una primera anàlisi, estan molt allunyades de la definició d'evitabilitat, que és purament analítica. Cal recórrer a mètodes d'anàlisi real per establir una relació amb certs enunciats geomètrics que involucren la noció de curvatura i que finalment resultaran estar màgicament lligats al problema del viatjant de comerç, un vell i famós problema de geometria computacional.

L'objectiu d'aquest article és presentar de la manera més entenedora possible el rerefons del problema que acabem d'esbossar i descriure les diverses contribucions que al llarg de les últimes tres dècades i mitja ens han anat apropant a la solució.

La història que volem explicar és una mostra d'un fenomen conegut i recorrent en matemàtiques i en altres ciències: es poden plantejar amb certa facilitat enunciats la solució dels quals està fora de l'abast de les possibilitats de l'època, però que presenten un aspecte innocent i resulten perfectament naturals i plausibles. L'exemple típic, en una escala diferent, és el teorema de Fermat.

Els mètodes i les idees que s'utilitzen en la solució dels problemes que esmentàvem s'han anat introduint a poc a poc, en alguns casos sense que els respectius autors fossin conscients de les possibles aplicacions dels seus teoremes en l'àmbit que ens interessa. Són resultats bàsics i profunds alhora, alguns amb un aire geomètric molt marcat, com una variant del problema del viatjant de comerç o la teoria de Besicovitch dels subconjunts del pla de longitud finita. L'eina essencial és, tanmateix, la teoria de Calderón-Zygmund, una sofisticada tècnica d'anàlisi real, que va ser desenvolupada per les seves possibles aplicacions a les equacions en derivades parcials.

No desitgem, naturalment, que el lector d'aquest article es faci càrrec de certs detalls, ni tan sols aproximadament. Presentarem els fets i les idees centrals evitant aspectes tècnics intricats, però acompanyant-los de diversos exemples i introduint el material auxiliar que calgui. En algun moment caldrà, tanmateix, apel·lar a la imaginació del lector i, en altres, a la seva complicitat per defugir certes complicacions. Hi ha seccions que es poden llegir quasi independentment, com és ara la sis, en què expliquem el problema del viatjant de comerç i els nombres beta, o la set, en què parlem de la integral de Cauchy. En la secció vuit, en què tractem de la relació entre la curvatura de Menger i la integral de Cauchy, el lector tenaç i agosarat trobarà el germen d'on han sorgit els avenços més recents sobre el tema.

2 El problema de Painlevé

Hi ha un teorema de Riemann que apareix en quasi tots el cursos d'anàlisi complexa per a llicenciats en matemàtiques que s'imparteixen arreu del món. És el teorema de la singularitat evitable, que afirma que, si es té una funció analítica f en un disc privat del centre c, i se sap que els valors $f(z)$ es mantenen fitats quan z s'acosta a c, llavors es pot definir f a c de manera que la nova funció és analítica a tot el disc. La primera vegada que hom sent això ho troba sorprenent perquè sabem de l'anàlisi real elemental que una funció pot ser fitada al voltant d'un punt i no tenir-hi límit. L'exemple que tots coneixem és la funció definida a l'interval $(-1, 1)$ privat del 0 que val 0 a l'esquerra de 0 i 1 a la dreta de 0. L'argument pel teorema de la singularitat evitable és una mostra de l'elegància i la potència dels mètodes complexos i va així: suposem que el disc està centrat al 0 i desenvolupem la funció en sèrie de Laurent

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots .$$

L'expressió pels coeficients de la sèrie amb índex negatiu és

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} f(z) z^{n-1} dz, \; n = 1, 2, \ldots$$

on ϵ és qualsevol nombre positiu més petit que el radi del disc. Si prenem valors absoluts, obtenim la desigualtat

$$|a_{-n}| \leq M\epsilon^n$$

en què M és una fita superior per a $|f(z)|$ per z en el disc. Fent que $\epsilon \to 0$ veiem que $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ i, per tant, que $f(z)$ és la suma d'una sèrie de Taylor i, doncs, analítica al disc donat. Així, el misteriós valor que s'ha d'atribuir a f en el punt 0 per obtenir l'extensió desitjada resulta ser la integral (que no depèn de ϵ)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon}\frac{f(z)}{z}dz\,.$$

Ara ens preguntem, inexorablement, quins són els subconjunts del pla que gaudeixen de la propietat de ser «singularitats evitables» per a les funcions analítiques i fitades. Una definició més formal d'aquesta noció és la següent:

Diem que un subconjunt compacte K del pla és un conjunt evitable per a les funcions analítiques fitades si, sempre que es dóna un obert Ω que conté K i una funció analítica i fitada f a $\Omega \setminus K$, resulta que f es pot estendre a una funció analítica a tot Ω.

Expressat d'una altra manera, sempre que ens donin una funció analítica i fitada que té K com a possible conjunt de singularitats (punts en què no és possible definir f analíticament), llavors resulta que f no té singularitats a K. En francès a vegades s'utilitza l'expressió *ensemble effaçable*, que vol dir conjunt que es pot esborrar.

Per exemple, un punt és evitable, segons el teorema de Riemann. Un conjunt finit també és evitable. Si el lector és un afeccionat a l'anàlisi funcional i recorda la noció de categoria, veurà clar que un compacte numerable també és evitable. En l'altre sentit, resulta que un disc (tancat) no és evitable, com es veu considerant la funció $f(z) = \frac{1}{z-c}$ definida al complementari del disc, el centre del qual s'ha denotat per c.

Però, ¿com podem decidir si un compacte que ens han donat és evitable? Per exemple, ¿com podem decidir si el famós conjunt ternari de Cantor és evitable? El principi general és bastant clar i només cal recordar la fórmula integral de Cauchy; així que paga la pena descriure'l en cert detall.

Suposem que K se'ns ha donat, que Ω és un obert que conté K i que f és analítica i fitada a $\Omega \setminus K$. Considerem corbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ de manera que $\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_n$ envolti K, tal com es veu a la figura 1.

Aleshores, per la fórmula integral de Cauchy, tenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \tag{1}$$

per z entre Γ_0 i Γ'.

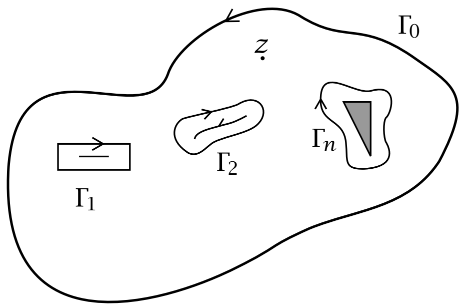

Figura 1

Notem que la integral sobre Γ_0 és una funció analítica de la variable z a dins de Γ_0, en particular a K. Així que, si per alguna raó ens sentim inclinats a sospitar que K és evitable i volem confirmar-ho, el camí més senzill consisteix a comprovar que la integral sobre Γ' és nul·la. Si el conjunt K és prou petit i el sistema de corbes Γ' prou proper a K, hi ha possibilitats reals de poder concloure que la integral sobre Γ' és tan petita com es vulgui; és a dir, nul·la. Si al lector li agrada fer desigualtats li recomanem que consideri el cas en què K és el conjunt ternari de Cantor. Llavors per a cada n podem prendre Γ' com la unió de 2^n corbes semblants a la corba Γ_1 de la figura 1, en què cada un dels segments interiors té longitud $1/3^n$. L'afitament superior per al valor absolut de la integral sobre Γ' que s'obté és $\frac{2}{\pi}\frac{2^n}{3^n}M$, en què M és una fita superior pel valor absolut de $f(z)$ per $z \in \Omega \setminus K$. Així doncs, el conjunt ternari de Cantor és evitable, malgrat que no és numerable.

En l'altra direcció, ¿de quins mètodes disposem per comprovar que el compacte que se'ns dóna no és evitable? El que s'ha de fer, d'acord amb la definició de conjunt evitable, és trobar un obert Ω que contingui K i una funció analítica i fitada a $\Omega \setminus K$ que no es pugui estendre a una funció analítica a Ω. El que s'acaba fent és pensar només en el cas $\Omega = \mathbb{C}$ (la qual cosa és, en realitat, equivalent). La dificultat ara rau a construir una funció f, analítica i fitada a $\mathbb{C} \setminus K$ i que no sigui constant. Notem que una tal f no es podrà estendre a una funció analítica a tot el pla: si es pogués, f seria una funció entera fitada i llavors, pel teorema de Liouville, f seria constant.

Provem ara d'avaluar l'eficàcia de l'estratègia anterior intentant esbrinar si l'interval $[0,1]$ és evitable. Si pensem que sí, hem de reprendre les corbes Γ_0 i Γ' d'abans. Ara $\Gamma' = \Gamma_1$ i ens adonem que no hi ha manera evident de fitar la integral sobre Γ_1 per un nombre petit. La raó és que $[0,1]$ és, essencialment, el domini de la integral i no hi ha cap motiu per què l'integrand es faci petit.

Resulta que $[0,1]$ *no és evitable!* Això es pot veure fulminantment si utilitzem una representació conforme: el complementari de $[0,1]$ a l'esfera de Riemann és un domini simplement connex que no és tot el pla. Per tant, hi ha una representació conforme en el disc unitat, la qual és clarament analítica a $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, fitada i no constant.

La idea que sorgeix d'aquesta discussió és que si un conjunt és prou petit llavors és evitable i si és prou gran no ho és. Suposem ara que ens entestem a caracteritzar els conjunts evitables d'una forma raonablement transparent. Llavors, l'ideal seria disposar d'una manera (com més senzilla millor) de mesurar els subconjunts del pla de tal manera que tenir mesura nul·la correspongués a ser un conjunt evitable i tenir mesura positiva a ser un conjunt no evitable. És clar que no es pot recórrer a l'àrea (mesura de Lebesgue al pla) perquè el segment $[0,1]$ té àrea zero però no és evitable. El fet que hi hagi conjunts 1-dimensionals que no són evitables ens porta a sospitar que, per als nostres objectius, pot ser més adequat utilitzar la «longitud» en comptes de l'àrea per mesurar els conjunts.

Si agafem la «longitud» per mesurar els conjunts del pla, ens trobem immediatament amb una dificultat col·lateral, que és la d'aclarir què entenem per «longitud» d'un subconjunt compacte arbitrari del pla. Recordem que per a corbes hi ha una noció natural de longitud que sorgeix de considerar aproximacions per poligonals. Tots sabem que hi ha una elegant fórmula clàssica que expressa la longitud d'una corba en termes de la derivada d'una parametrització. Però què passa amb conjunts compactes generals? La resposta és que hi ha una manera d'assignar un nombre $\Lambda(E)$ a tot subconjunt E del pla, de manera que $0 \leq \Lambda(E) \leq \infty$, i que $\Lambda(E)$ coincideix amb la longitud d'arc per a subconjunts de corbes rectificables. La funció de conjunt Λ s'anomena la mesura de Hausdorff 1-dimensional o longitud i és una veritable mesura quan es restringeix a conjunts E tals que $\Lambda(E) < \infty$. Per exemple, $\Lambda(Q) = \infty$ si Q és un quadrat i Λ restringida a subconjunts de l'eix de les x és la mesura de Lebesgue 1-dimensional a la recta real. La definició de $\Lambda(E)$ no és gaire complicada, però preferim, per ara, només dir que $\Lambda(E) = 0$ si, i només si, E es pot recobrir per una família numerable (Q_n) de quadrats amb costats paral·lels als eixos tal que la suma $\sum_n l(Q_n)$ és tan petita com es vol. Aquí $l(Q)$ denota la longitud del costat del quadrat Q. Per exemple, el conjunt ternari de Cantor té longitud nul·la perquè es pot recobrir, per a cada n, per 2^n quadrats de costat $\frac{1}{3^n}$.

El primer resultat notable sobre evitabilitat posterior a Riemann va ser obtingut per Painlevé al 1888 en la seva tesi doctoral i diu el següent:

1 Teorema *Un conjunt de longitud zero és evitable.*

El lector afeccionat a les desigualtats que s'hagi convençut que el conjunt ternari de Cantor és evitable sabrà segurament modificar el seu argument per demostrar el teorema de Painlevé.

A finals del segle XIX i a principis del XX hi va haver una gran activitat a París al voltant de la noció d'evitabilitat i diverses de les seves variants, sobretot després que la integral de Lebesgue s'anés fent més i més popular. Hi hagué contribucions notables de Denjoy, Pompeiu i, més tard, de Besicovitch. Però el problema que enunciem tot seguit no va ser resolt en aquell temps i, de fet, continua sent avui un problema obert.

El problema de Painlevé: *trobeu condicions necessàries i suficients (de tipus geomètric) perquè un conjunt sigui evitable.*[1]

Si hom té la sort de gaudir d'una temporada en una universitat de qualitat s'adona del fet (completament obvi), que la qualitat comença en primer lloc pel pressupost. Entre altres meravelles inexistents a la majoria dels nostres campus hi trobareu una excel·lent biblioteca de matemàtiques amb personal propi, eficient, somrient i amable. Les obres completes de Painlevé potser no hi són, però les portaran ràpidament d'una altra biblioteca. Si hom les consulta se sorprendrà en comprovar que, malgrat que hi posi interès i entusiasme, no aconseguirà localitzar enlloc la formulació del problema de Painlevé. Al cap d'una bona estona, conclourà que el problema en qüestió mai va ser formulat per escrit per Painlevé i que, o bé la transmissió ha estat oral, o simplement l'atribució es deu al fet que Painlevé va ser la primera persona a ocupar-se'n. La referència més antiga del problema de Painlevé que l'autor coneix es troba en un article d'Ahlfors de l'any 1947 [1], en què s'insisteix que les condicions que es busquen han de tenir un caràcter geomètric.

Paul Painlevé

Paul Painlevé (1863-1933), nascut a París, on visqué la major part de la seva vida, va ser un personatge extraordinari. A part de ser professor de matemàtiques a diverses de les més prestigioses escoles superiors de la ciutat (l'Escola Normal i la Politècnica entre d'altres) i matemàtic famós a la seva època, es

1 Hi ha hagut una novetat que s'ha produït en el moment de fer l'última revisió de l'article i que ens permet afirmar que el problema s'ha resolt. Vegeu les pàgines següents.

va interessar per multitud de qüestions de física (mecànica) i enginyeria aeronàutica. Va fer un dels primers viatges en un avió amb passatgers en un vol pilotat per Wilbur Wright l'any 1908. També va ser un polític dedicat i va ocupar càrrecs importants: ministre de les invencions (1915) i ministre de la guerra (1917) en plena Primera Guerra Mundial. Si mai aneu a París i entreu al Pantheon, on s'enterren «les grands hommes» de França, hi trobareu la seva tomba al costat de la de Louis Braille.

Entre els millors teoremes sobre el problema de Painlevé n'hi ha un de molt recent, d'un matemàtic català de la Universitat Autònoma de Barcelona, Xavier Tolsa,[2] que podem enunciar immediatament sense cap dificultat (discutirem altres resultats més endavant) [23].

2 Teorema *Un subconjunt compacte K del pla no és evitable si, i només si, es pot construir una mesura positiva μ, no nul·la, suportada a K, tal que*

$$\mu(D) \leq C \textit{ radi } (D), \textit{ per a cada disc } D$$

i

$$\iiint_{K^3} \frac{1}{R(z,w,\zeta)^2}\, d\mu(z)d\mu(w)d\mu(\zeta) < \infty,$$

en què $R(z,w,\zeta)$ és el radi de la circumferència que passa per z, w i ζ.

Notem que la condició que caracteritza la no-evitabilitat en aquest enunciat no conté cap referència a funcions analítiques i redueix la comprovació de la no-evitabilitat a la construcció d'una mesura positiva de cert tipus. La condició conté elements geomètrics, com el radi $R(z,w,\zeta)$, i també en conté que aparentment no ho són, com l'existència d'una mesura amb certes propietats. Per tant, la condició globalment no es pot considerar geomètrica sense reflexionar-hi més.

Es pot adduir amb fonament que el terme *condició geomètrica* és massa vague, però, com veurem ara, recorrent a la geometria bilipschitziana aquesta objecció desapareix. Una aplicació T del pla en si mateix es diu que és bilipschitziana si és bijectiva i la distorsió de les distàncies entre parelles de punts està controlada uniformement per dalt i per baix:

$$C^{-1}\,|z-w| \leq |T(z)-T(w)| \leq C|z-w|, \qquad z,w \in \mathbb{C}.$$

Llavors una possible concreció del problema de Painlevé consisteix a demanar condicions que caracteritzin els conjunts evitables i siguin geomètriques en el sentit precís de ser invariants per a les aplicacions bilipschitzianes. No està clar, en absolut, que la condició del teorema anterior sigui un invariant bilipschitzià, malgrat que hi ha indicacions que sí que ho és [11]. El problema de la invariància bilipschitziana dels conjunts evitables va ser plantejat per

2 Per aquest teorema a en X. Tolsa li ha estat concedit el premi Salem de l'any 2002; el premi Salem és una prestigiosa distinció per a analistes joves, de la qual no hi havia cap precedent a Catalunya (ni a l'Estat espanyol).

primera vegada a [24]. La conclusió és que en un segle i escaig ens hem apropat moltíssim a la solució del problema de Painlevé, però encara no hi hem arribat.[3]

En la secció següent, descriurem una classe de compactes en què podem resoldre el problema de Painlevé. La discussió ens mostrarà la senzilla relació entre la noció d'evitabilitat i la integral de Cauchy entesa com una integral singular del tipus de Calderón-Zygmund.

3 La conjectura de Denjoy

Hi ha una manera directa de veure que $[0,1]$ no és un conjunt evitable que no utilitza representació conforme i que ens convé descriure per poder entendre el paper de les integrals singulars en relació amb la noció d'evitabilitat.

Suposem que f és una funció analítica i fitada a $\mathbb{C} \setminus [0,1]$. Es pot veure fàcilment, aplicant la fórmula integral de Cauchy de cap per avall (per posarnos drets hem d'intercanviar $\frac{1}{2}$ i ∞) al domini $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, que f és la integral de Cauchy dels seus valors frontera:

$$f(z) = f(\infty) - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(t)}{t-z}dt, \qquad z \notin [0,1].$$

Doncs, si volem construir una funció analítica i fitada f que no sigui constant a $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, sembla una bona idea començar considerant expressions de la forma

$$f(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{t-z}dt, \; z \notin [0,1],$$

en què g és una funció a $[0,1]$. L'elecció més senzilla per g és $g(t) = 1, \; t \in [0,1]$ i la f que obtenim és

$$f(z) = \int_0^1 \frac{1}{t-z}dt = \log\frac{z-1}{z}, \; z \notin [0,1],$$

que és analítica i no constant a $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, però que òbviament no és fitada. Observem, però, que les úniques singularitats (punts en què f es fa infinita) són singularitats logarítmiques, per tant, molt moderades, als punts $z = 1$ i $z = 0$. Qui hagi treballat amb les integrals singulars de Calderón-Zygmund reconeixerà aquí el fenomen fonamental que la transformada de Hilbert no envia l'espai L^∞ en ell mateix. La idea, ara, és aniquilar la singularitat logarítmica agafant una funció g que s'anul·li als punts 0 i 1; per exemple, la funció la gràfica de la qual es mostra a la figura 2.

Calculant la integral obtenim

$$f(z) = L(z+\frac{1}{2}) + L(z-\frac{1}{2}) - 2L(z), \; z \notin [0,1],$$

3 En una conferència de primers de febrer de 2003, X. Tolsa ha anunciat que ha trobat una prova de la invariància bilipschitziana de la capacitat analítica, la qual cosa resol, brillantment, el problema de Painlevé.

en què

$$L(z) = -(z - \frac{1}{2}) \log(z - \frac{1}{2}) .$$

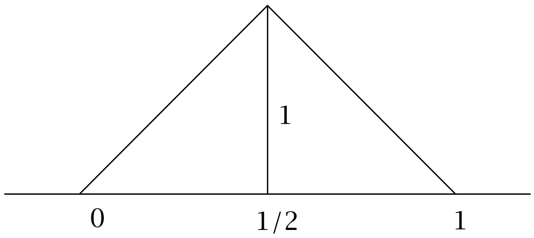

Figura 2

En l'expressió de més amunt el lector docte reconeixerà el fet que la transformada de Hilbert envia funcions Lipschitz en funcions de la classe de Zygmund. El que és important ara és que la funció f és analítica i fitada i clarament no és constant, amb la qual cosa tenim la feina feta: $[0, 1]$ no és evitable.

Denjoy va trobar a pricipis del segle XX un argument per demostrar que, de fet, qualsevol subconjunt compacte de la recta real de longitud positiva no és evitable. Això no és del tot obvi, però està a l'abast de qualsevol que hagi seguit (no gaire enrere) un curs d'anàlisi real i recordi que la part real del nucli de Cauchy és el nucli de Poisson. És un resultat extremadament interessant, almenys per dues raons: la primera és que fa veure que el teorema de Painlevé és, en cert sentit, immillorable. La segona és que combinat amb el teorema de Painlevé caracteritza els subconjunts evitables de la recta real com aquells que tenen longitud zero. Clarament la condició anterior és de tipus geomètric (és un invariant bilipschitzià) i, per tant, el problema de Painlevé té una solució magnífica per a subconjunts de la recta.

Pel que fa al resultat que acabem de mencionar, va passar un fet curiós: és que Denjoy es pensava que la seva demostració s'estenia al cas més general quan es consideren compactes de longitud positiva inclosos a una corba rectificable qualsevol. La realitat és que l'argument no s'aplica al cas general i quan la gent va adonar-se'n es va començar a parlar de la conjectura de Denjoy.

La conjectura de Denjoy: *un subconjunt compacte d'una corba rectificable és evitable si, i només si, té longitud zero.*

Notem que una solució positiva de la conjectura de Denjoy resol el problema de Painlevé per subconjunts de corbes rectificables. Resulta que la conjectura de Denjoy és un d'aquells problemes la solució dels quals involucra idees i tècniques de les quals no es disposa en el moment de llur formulació. La conjectura de Denjoy va ser demostrada l'any 1977 per Calderón, en un famós article sobre la integral de Cauchy en gràfiques lipschitzianes. Per aquest article, de quatre pàgines, li va ser atorgat, l'any 1979, el premi Bocher, un prestigiós guardó concedit per l'*American Mathematical Society* al treball més significatiu en anàlisi publicat en els cinc anys anteriors en una revista dels Estats Units. Només uns quants experts, entre els quals, per cert, no hi era Calderón, sabien en aquell moment que la conjectura de Denjoy es reduïa precisament al resultat que Calderón va demostrar motivat per les aplicacions a les equacions en derivades parcials. Donald Marshall, un alumne de J. Garnett, va escriure una breu nota explicant-ho. En l'escrit d'acceptació del premi Bocher Calderón esmentava la solució de la conjectura de Denjoy com una de les aplicacions més rellevants del seu article (vegeu [4]).

La resta d'aquesta secció està dedicada a explicar com el teorema de Calderón resol la conjectura de Denjoy. Hi ha una primera reducció al cas en què la corba és la gràfica Γ d'una funció A contínuament diferenciable a la recta i amb derivada fitada en valor absolut per un número ϵ_0 prou petit (geomètricament, això es tradueix dient que els pendents són inferiors, en valor absolut, a ϵ_0).

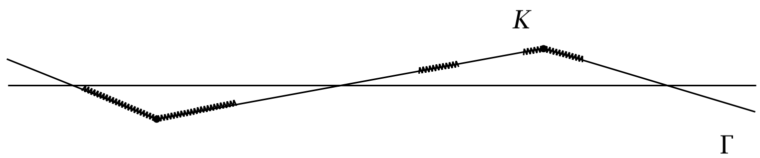

Figura 3

Considerem, doncs, un subconjunt compacte K de Γ, longitud positiva, i intentem construir una funció analítica, fitada i no constant a $\mathbb{C} \setminus K$. L'assaig obvi

$$f(z) = \int_K \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{2}$$

no proporciona una funció fitada, tal com al cas de la recta. Altres experiments, del tipus

$$f(z) = \int_K \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{3}$$

amb funcions g especials tampoc funcionen.

El progrés conceptual immens va consistir a renunciar a l'afitament uniforme de f i conformar-se amb una integrabilitat del tipus $L^2(ds)$, en què $ds =| d\zeta |$ és la longitud a Γ. És a dir, es tracta de buscar

$$\int_\Gamma |f(z)|^2 |dz| < \infty, \tag{4}$$

en comptes de capficar-se en

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus K} |f(z)| < \infty\,.$$

La mateixa idea que canviar L^∞ per L^2 pot ser avantatjós només és concebible després de desenvolupar la teoria de l'espai de Hilbert i assimilar el fet que la geometria de L^2 és notablement més senzilla que la de L^∞. Això és feina de tota una generació.

Garabedian, un deixeble d'Ahlfors, va demostrar en la seva tesi l'any 1949 que, efectivament, hom es pot reduir al cas L^2. Quedava per demostrar que (4) val per a la f definida a (2). Fixem-nos que això no té un aspecte gens fàcil perquè fins i tot la definició de $f(z)$ per $z \in K$ és problemàtica, atesa la singularitat del nucli a (2) o (3). La integral de Cauchy (3) es pot definir per a g prou regular (de classe C^1 és suficient) i de suport compacte a tot punt z del suport de g com un valor principal

$$C(g)(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\zeta - z|>\epsilon} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\,, \tag{5}$$

en què la integral es pren sobre els punts de $\zeta \in \Gamma$ que disten de z més que ϵ. Pel cas, especialment senzill, que Γ és la recta real $\mathbb{R}$ (la gràfica de $A = 0$) la integral de Cauchy és un operador famós i venerable conegut pel nom de transformada de Hilbert:

$$H(g)(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|>\epsilon} \frac{g(y)}{y - x} dy\,. \tag{6}$$

Malgrat l'aspecte tan concret i explícit de l'expressió precedent, la transformada de Hilbert és un objecte subtil i esmunyedís, fins i tot en la seva definició. Invitem el lector a considerar un moment la fórmula (6) en el cas més favorable possible en què g és una funció de classe C^1 i de suport compacte. Hi ha una obstrucció claríssima a l'existència del límit, que és que $g(y)/(y-x)$ no és, en general, integrable com a funció de y amb x fix. Això esdevé molt clar si s'agafa g que sigui 1 a un entorn de x. Llavors $g(y)/(y-x)$ no és integrable perquè el nucli $1/(y-x)$ no és localment integrable.

L'argument que cal fer per demostrar l'existència del límit a (6) per a les funcions g que estem considerant és molt instructiu i interessant, perquè involucra, en una situació senzilla, els fenòmens de cancel·lació associats al nucli que representen un dels eixos centrals en el tractament de les integrals singulars de Calderón-Zygmund. En el cas del nucli $1/(y-x)$ de la transformada de Hilbert la cancel·lació es produeix, amb x fix, entre els valors positius que es prenen per y a la dreta de x i els valors negatius que es prenen per y a l'esquerra de x.

Si suposem, per simplificar, que el suport de g està ficat a $[-1, 1]$ i que $x = 0$, obtenim

$$\int_{|y|>\epsilon} \frac{g(y)}{y} dy = \int_{1\ge|y|>\epsilon} \frac{g(y)}{y} dy = \int_{1\ge|y|>\epsilon} \frac{g(y) - g(0)}{y} dy, \tag{7}$$

en què l'última igualtat és deguda al fet que

$$\int_{1\ge|y|>\epsilon} \frac{dy}{y} = 0\,.$$

La raó per això és que la funció $1/y$ és imparella, la qual cosa produeix una compensació total entre valors positius i negatius en intervals simètrics respecte de l'origen. Notem ara que s'ha produït un fet màgic: com que g és de classe C^1 l'integrand a l'última integral de (7) és una funció fitada i, per tant, localment integrable.

Fent que $\epsilon \to 0$ a (7) s'obté l'existència del límit de les integrals truncades i, a més, el valor explícit

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{g(y)}{y} dy = \int_{1 \geq |y|} \frac{g(y) - g(0)}{y} dy \,.$$

Per a funcions genèriques de L^2, sense cap propietat addicional de regularitat, el límit a (6) existeix per a quasi tot $x \in \mathbb{R}$. Aquest és un teorema realment fascinant, gens obvi, que s'explica en última anàlisi pels fenòmens extremadament subtils de cancel·lació associats al nucli. Les primeres demostracions combinaven mètodes d'anàlisi de Fourier i d'anàlisi complexa, i només amb el temps es varen anar trobant arguments estrictament d'anàlisi real; és a dir, arguments que només utilitzen les nocions més bàsiques de teoria de la mesura.

En el cas general d'una gràfica d'una funció de classe C^1, l'existència del valor principal (5) per a g de $L^2(ds)$ i quasi tot punt z és un resultat difícil que es demostra al final de tot el procés utilitzant les desigualtats que hom sap provar en el cas que g sigui regular. Però, d'això, no en parlarem.

A part de ser el model per les integrals singulars de Calderón i Zygmund, la transformada de Hilbert és un operador molt estudiat i utilitzat pels enginyers de telecomunicacions en teoria del senyal. Fent un càlcul amb transformades de Fourier s'obté fàcilment

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(g)(x)^2 dx = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 dx \,,$$

que els enginyers interpreten com una llei de conservació de l'energia del senyal.

En el cas general d'una gràfica d'una funció A de classe $C^1(\mathbb{R})$ amb $\|A'\|_\infty < \infty$ el resultat que es volia obtenir en els anys seixanta era la desigualtat

$$\int_\Gamma |C(g)(z)|^2 |dz| \leq C \int_\Gamma |g(z)|^2 |dz|, \tag{8}$$

per certa constant positiva C que depèn només de $\|A'\|_\infty$. Aquesta desigualtat, combinada amb la reducció al cas L^2 de Garabedian, demostra la conjectura de Denjoy. Durant anys els mètodes clàssics de l'anàlisi de Fourier no semblaven encaixar bé amb el problema i portaven a un atzucac. Finalment, Calderón va demostrar (8) amb la restricció que $\|A'\|_\infty$ fos suficientment petita, aplicant mètodes d'anàlisi complexa d'una forma absolutament original.

És interessant assenyalar que l'obtenció de la desigualtat (8) per a gràfiques de funcions de classe C^1 amb l'única restricció $\|A'\|_\infty < \infty$ (o, una mica més generalment, per a gràfiques de funcions de la classe de Lipschitz) es va convertir en una qüestió central en anàlisi harmònica a finals dels anys setanta. La solució obtinguda per Coifman, McIntosh i Meyer [6] l'any 1981 es considera un dels èxits més notables dels mètodes d'anàlisi real de l'escola de Calderón-Zygmund. Uns anys més tard, s'havien afinat tant les tècniques que un deixeble de Meyer, Guy David, fins i tot va descriure les corbes rectificables per a les quals val (8): són exactament les que compleixen

$$\text{longitud}\,(\Gamma \cap D(z,r)) \le C\, r\,,$$

per a tot disc $D(z,r)$ de centre z i radi r.

4 Conjunts invisibles

Fins ara quasi tots els exemples que hem considerat pel que fa a la noció d'evitabilitat han estat subconjunts de la recta o subconjunts de corbes rectificables, els quals tenen clarament una naturalesa unidimensional. Sabem que per a aquests subconjunts longitud nul·la equival a evitabilitat. Ens preparem ara per afrontar un repte decisiu: ¿és cert, per a subconjunts qualssevol del pla, que un conjunt evitable ha de tenir longitud zero? Si això fos cert i ho combinéssim amb el teorema de Painlevé, obtindríem que evitabilitat equival a longitud zero. Malauradament (o afortunadament), hi ha conjunts de longitud positiva que són evitables. Els exemples coneguts, malgrat que siguin conjunts de longitud positiva, tenen tots una propietat de petitesa, de la qual parlarem més endavant, que és molt sorprenent i que s'interpreta com una mena d'invisibilitat. Ara, però, és urgent procedir a descriure'n l'exemple més senzill.

Volem construir un conjunt del tipus de Cantor al pla. La construcció es basa en el següent algorisme. Comencem amb el quadrat unitat $[0,1] \times [0,1]$ que subdividim en 16 quadrats iguals de costat $1/4$. Agafem els 4 quadrats que contenen els vèrtexs del quadrat unitat. Aquesta és l'etapa 1. A l'etapa 2 repetim la construcció de l'etapa 1 dins de cada un dels 4 quadrats de costat $1/4$ que hem seleccionat. N'obtenim 16 quadrats de costat $1/16$ tal com es veu a la figura 4.

Continuem inductivament de manera que a l'etapa n obtenim 4^n quadrats Q_j^n, $1 \le j \le 4^n$, de costat 4^{-n}. Posem

$$K_n = \bigcup_j Q_j^n \qquad \text{i} \qquad K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Aleshores K és un tipus especial de conjunt de Cantor que anomenarem Cantor $1/4$ per raons evidents. Fixem-nos que la seva projecció ortogonal en la recta L que es mostra a la figura 4 és tot un interval. Com que és intuïtivament clar que, qualsevol que sigui la definició de longitud, una projecció mai no augmentarà la longitud, concloem que K té longitud positiva. Encara que això no és gaire important ara mateix, també es pot veure fàcilment que

K té longitud finita. Això esdevindrà molt clar més endavant quan, finalment, disposem de la definició de longitud. La raó bàsica és que la suma de les longituds dels costats dels quadrats Q_j^n de la generació n-èsima no augmenta amb n sinó que sempre és 1.

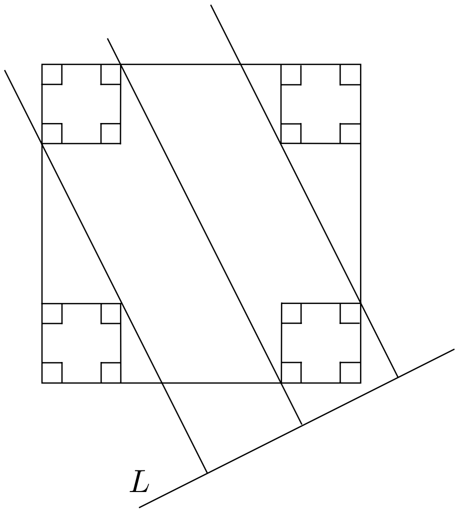

Figura 4

Notem que des del punt de vista de la longitud el conjunt K és absolutament similar a l'interval $[0,1]$: en particular, ambdós tenen longitud positiva i finita. Hi ha una diferència essencial i és que un és connex i l'altre és totalment inconnex (els components connexos són punts). John Garnett [10] va demostrar fa més de trenta anys, en un article preciós i curt, que K és evitable i obtingué així l'exemple més senzill possible de conjunt evitable de longitud positiva. Com que és evitable, K ha de ser, de certa manera, més petit que $[0,1]$, que no ho és. Malgrat que no és fàcil demostrar-ho ([9] o [17]), K té una propietat de petitesa sorprenent que ara expliquem. Per a cada $\theta \in [0,\pi]$ considerem la projecció ortogonal en la direcció θ; és a dir, en la recta per l'origen que forma un angle θ amb l'eix de les x. Llavors resulta que K és invisible, la qual cosa vol dir, per definició, que la projecció de K en la direcció θ és un conjunt de longitud zero per a quasi tot $\theta \in [0,\pi]$ (el «quasi tot» és respecte de la mesura de Lebesgue). Observem que a $[0,1]$ li passa tot el contrari: es projecta sobre un interval de longitud positiva excepte per a $\theta = \pi/2$. Amb un argument de connexió es veu clar que una corba que no estigui ficada en una recta es projecta en un interval de longitud positiva en tota direcció. La referència a la invisibilitat en la terminologia que estem utilitzant s'explica així: si hom s'imagina que és un ser 2-dimensional que fa fotos 1-dimensionals, llavors K mai no sortiria a la foto. Una veritable tragèdia per a segons qui.

La propietat d'invisibilitat va ser descoberta per Besicovitch els anys trenta en desenvolupar la seva teoria dels conjunts de longitud finita. Malgrat que és possible entendre la teoria de Besicovitch sense tenir present la definició formal de longitud, la donarem ara mateix per satisfer la curiositat de certs lectors i alleujar la incomoditat d'altres. Fixem un nombre positiu ϵ. Donat un subconjunt qualsevol E del pla posem

$$\Lambda_\epsilon(E) = \inf \sum_{\mathrm{n}} \ell(\mathrm{Q_n}) ,$$

en què l'ínfim es pren sobre tots els recobriments numerables de E per quadrats Q_n amb els costats paral·lels als eixos coordenats i tals que $\ell(Q_n) \leq \epsilon$. Hem denotat per $\ell(Q)$ la longitud del costat del quadrat Q. La longitud de E és

$$\Lambda(E) = \sup_\epsilon \Lambda_\epsilon(\mathrm{E}) .$$

Hi ha altres definicions més intrínseques (vegeu [17]) que no depenen d'una elecció d'eixos coordenats, però la que hem donat té la virtut de la simplicitat i dóna ràpidament la idea central. Per exemple, un càlcul mostra que, si $Q = [0,1] \times [0,1]$ és el quadrat unitat, llavors $\Lambda_{1/2^n}(Q) \approx 2^n$ i, per tant, $\Lambda(Q) = \infty$, tal com esperàvem. D'altra banda, hom es pot entretenir a comprovar que pel Cantor 1/4 s'obté $\Lambda(K) \approx 1$. Si Γ és una corba rectificable i $E \subset \Gamma$, llavors $\Lambda(E)$ és comparable a la longitud d'arc de E.

Considerem ara els dos exemples bàsics que coneixem de conjunts de longitud positiva i finita: corbes rectificables i conjunts invisibles. Són dos casos extrems, amb propietats de projecció completament diferents. Besicovitch va descobrir el fet sorprenent que un conjunt E de longitud finita és invisible si, i només si, interseca tota corba rectificable en un conjunt de longitud zero. En altres paraules, el fet de poder veure E depèn només dels subconjunts de E de longitud positiva pels quals es pot fer passar una corba rectificable. Fixem-nos que això diu en particular que si E és evitable llavors ha de ser invisible; si no ho fos, podríem trobar un subconjunt de longitud positiva que també és part de certa corba rectificable. Però llavors la conjectura de Denjoy ens diu que aquest subconjunt no és evitable i, per tant, que E tampoc ho és. Reprendrem més endavant en més detall aquesta relació entre invisibilitat i evitabilitat.

El fet central de la teoria de Besicovitch és que si E és un conjunt mesurable de longitud finita, llavors E és la unió de dos subconjunts, diguem-ne R i I, tals que I és invisible i R és un conjunt rectificable; és a dir, és una unió numerable de subconjunts de corbes rectificables i un conjunt de longitud zero. Per la discussió anterior, sabem que un conjunt rectificable i invisible alhora ha de ser de longitud zero. Així doncs, les parts rectificable i invisible de E són úniques mòdul conjunts de longitud zero. Besicovitch en va trobar un parell de caracteritzacions molt elegants que comporten relacions molt interessants amb els fenòmens d'existència de tangents o de densitats. Suggerim al lector interessat que consulti [9], [12] o [17].

5 La conjectura de Vitushkin

Durant els anys seixanta, es va desenvolupar una gran activitat al voltant del problema d'entendre quines funcions es poden aproximar uniformement a un compacte K del pla per funcions racionals amb pols fora de K. Hi ha dues condicions necessàries òbvies sobre la funció que es vol aproximar: ha de ser contínua a K i analítica a l'interior de K (si n'hi ha). Es poden construir exemples enginyosos, però no gaire complicats, en què aquestes condicions necessàries no són suficients. El teorema de Runge dóna una condició suficient, que està molt lluny de ser necessària, que consisteix a demanar que la funció que es vol aproximar sigui analítica a un entorn de K. Com que la diferència entre un entorn arbitrari de K i l'interior és la frontera, tot sembla indicar que, per a trobar condicions necessàries i suficients per a l'aproximabilitat d'una funció, s'hauria de pensar en condicions d'analiticitat feble, segurament subtils, que mesurin la frontera de K. Que això és bàsicament correcte va ser demostrat l'any 1967 pel matemàtic rus de Moscou Anatoly Vitushkin [27]. Les condicions de Vitushkin s'expressen mitjançant una funció de conjunt anomenada capacitat analítica que havia estat introduïda per Ahlfors vint anys abans. La capacitat analítica d'un compacte K és un número no negatiu que mesura el conjunt de funcions analítiques i fitades en valor absolut per 1 a $\mathbb{C} \setminus K$. No és gens difícil comprovar que la capacitat analítica de K és nul·la si, i només si, K és evitable. Es va establir així una connexió entre evitabilitat i altres problemes d'anàlisi aparentment llunyans, cosa que va reactivar l'interès a entendre millor la natura dels conjunts evitables. Vitushkin formulà en el seu article de 1967 diversos problemes, el més famós dels quals és el següent:

La conjectura de Vitushkin: *un compacte del pla és evitable si, i només si, és invisible.*

El que probablement va portar Vitushkin a enunciar la conjectura anterior va ser l'existència de conjunts compactes evitables de longitud positiva. De fet ell mateix va construir-ne el primer exemple, abans que es demostrés que el conjunt de Cantor 1/4 n'és un. L'evidència per a la conjectura en aquell moment era bastant feble. En els anys vuitanta, Mattila en va construir un contraexemple, el qual, malgrat que realment demostrava que l'equivalència no és certa, va estar envoltat de misteri durant uns anys, perquè el seu mètode no permetia deduir, sorprenentment, quina implicació era falsa. L'explicació és que el que es demostrava és que la propietat d'invisibilitat no és un invariant conforme, mentre que l'evitabilitat òbviament sí que ho és. Uns anys després, Jones i Murai varen construir un conjunt compacte no evitable que és invisible, la qual cosa contradiu la condició suficient de la conjectura de Vitushkin. Encara avui no sabem si la condició necessària és certa.

En la secció anterior vàrem presentar un argument senzill, basat en la conjectura de Denjoy i la teoria de Besicovitch, que mostra que un conjunt evitable de longitud finita ha de ser invisible. Així doncs, la condició necessària en la conjectura de Vitushkin és certa per a conjunts de longitud finita. D'altra banda, resulta que el conjunt construït per Jones i Murai té longitud infinita, així que no hi ha cap evidència en contra de la següent modificació de la conjectura de Vitushkin.

La conjectura feble de Vitushkin: *entre els conjunts compactes de longitud finita els evitables són precisament els invisibles.*

Notem que si l'enunciat anterior és cert, el problema de Painlevé queda resolt en el context dels conjunts de longitud finita, perquè la invisibilitat és una condició de tipus geomètric (és un invariant bilipschitzià).

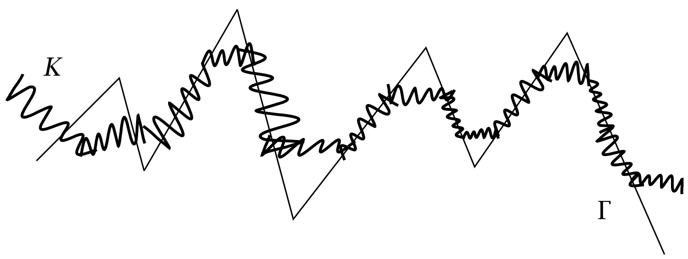

Figura 5

És clar que la direcció que no sabem fer és la que va d'invisible a evitable. Amb altres paraules, si tenim un compacte de longitud finita que no és evitable s'ha de veure que no és invisible. Si explicitem una mica més l'enunciat anterior trobem que el que se'ns demana és que, donat un compacte K de longitud finita, construïm una corba rectificable Γ tal que longitud$(K \cap \Gamma) \neq 0$, sabent que hi ha una funció analítica fitada i no constant a $\mathbb{C} \setminus K$ (vegeu la figura 5).

Si el lector hi reflexiona una mica arribarà a la conclusió que no es veu en absolut com fer-ho. De fet, no es veu ni tan sols com començar. No hi ha una relació clara entre una propietat de tipus analític com l'existència d'una funció que compleixi certes condicions i una propietat més aviat geomètrica com l'existència d'una corba rectificable que en satisfaci d'altres. Tal com es veu des de la perspectiva d'avui hi havia quatre duríssimes etapes que calia cobrir per establir un lligam entre la condició analítica i la geomètrica. Això explica perfectament el lapse entre l'article de Vitushkin de 1967 i el de Guy David [7] de 1998 en què s'acaba de demostrar la conjectura feble de Vitushkin. En les properes quatre seccions ens aturarem en cada una de les quatre etapes esmentades. Ens limitarem quasi sempre al cas homogeni, fet que facilita la comprensió de les idees centrals, però, en contrapartida, ens obliga a renunciar a entendre les contribucions de G. David i P. Mattila en el tram final de l'argument i que constitueixen l'etapa 4. En la figura 6 següent, s'esquematitzen les tres primeres etapes en el cas homogeni.

En la secció següent, que correspon a l'última fletxa de la figura 6, discutirem un criteri, pràctic i elegant alhora, per decidir si es pot construir una corba rectificable que passi per un conjunt donat.

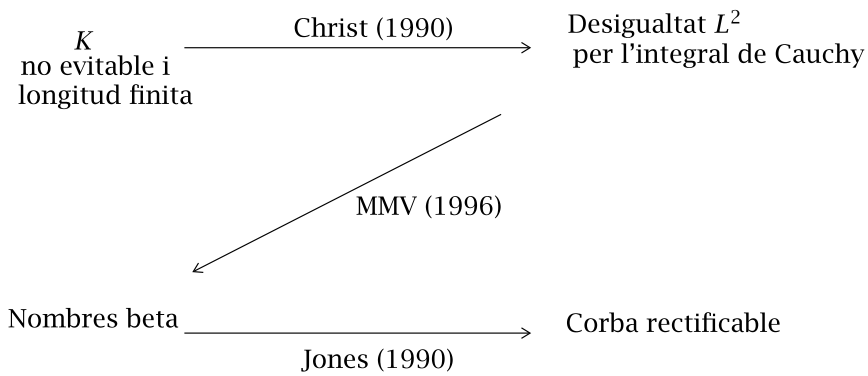

Figura 6

6 El viatjant de comerç i els nombres beta

El viatjant de comerç és la persona que recorre diverses ciutats per atendre els seus clients habituals o trobar-ne de nous. Als Estats Units se l'anomena *traveling salesman* i a Catalunya, on també havia estat una professió molt popular, simplement viatjant. Suposem que un viatjant ha de visitar N ciutats i en sap les distàncies mútues. El problema que se li planteja consisteix a trobar un itinerari que passi una sola vegada per cada ciutat, torni al punt de sortida i sigui el més curt possible. Un instant de reflexió ens convencerà que el problema té solució. També és clar que si N és gran i el nostre viatjant no disposa de gaire temps, més li val intentar concentrar-se a trobar un algorisme eficient per resoldre el problema en comptes d'anar comprovant els $N-1!$ casos possibles un rere l'altre. Recordem que l'ordre de magnitud de $N!$ és molt gran, inferior que el de N^N, però superior que el de qualsevol successió exponencial del tipus a^N.

El problema del viatjant (o TSP, per *traveling salesman problem*) és un problema típic de complexitat computacional: ens interessa trobar algorismes que resolguin el problema en el mínim temps possible; és a dir, amb el mínim nombre possible d'operacions d'ordinador. Es diu que un problema computacional es pot resoldre en temps polinòmic (o que pertany a la classe P) si hi ha un algorisme i un nombre natural k tals que l'algorisme resol els problemes de grandària N en temps $O(N^k)$. Aquests són els problemes que hom té l'esperança de poder implementar eficientment en un ordinador. Per exemple, el problema d'ordenar N nombres donats de més petit a més gran es pot resoldre fàcilment en temps $O(N^2)$. Si sofistiquem l'argument natural, l'exponent 2 es pot rebaixar i fins i tot s'arriba a trobar un algorisme que dóna una solució en temps $O(N \log N)$. La sorpresa monumental és que no se sap si el TSP es pot resoldre en temps polinòmic.

Hi ha multimilionaris nord-americans que inverteixen quantitats astronòmiques de diners en obres filantròpiques, com ara museus, hospitals i centres de recerca i els posen el seu nom, que així segur que passarà a la posteritat. És el cas de Landon T. Clay, que ha fundat un institut, el Clay Mathematics Institute, que té la lloable finalitat d'augmentar i disseminar el coneixement matemàtic. És extraordinàriament instructiu llegir les dotze línies inicials de la pàgina [28], en què es descriuen les activitats de l'Institut. Tot aniria molt millor per a la matemàtica si els responsables de certs ministeris i conselleries n'haguessin absorbit l'esperit, cosa que molt probablement no passarà en un futur pròxim. L'Institut Clay donarà un milió de dòlars a qui resolgui un problema matemàtic d'entre una llista de set, que una comissió internacional d'experts ha confeccionat per encàrrec de l'Institut. Un d'aquests problemes és la hipòtesi de Riemann, fet que es menciona per donar una idea de la dificultat dels problemes. El que ens interessa està relacionat amb el TSP.

Un problema computacional és de la classe NP (que és l'abreviació per a l'expressió *Non-deterministic Polynomial*) si cada vegada que es dóna una presumpta solució del problema es pot comprovar si efectivament ho és en temps polinòmic. Això és intuïtivament més fàcil que construir un algorisme que resolgui el problema en temps polinòmic. Així que $P \subset NP$. Un exemple que il·lustra molt ràpidament la relació entre les classes P i NP és el d'un trencaclosques de N peces tal que cada peça encaixa com a màxim amb un nombre fix de peces (per exemple 5) (vegeu [29]). Llavors és evident que si ens presenten una possible solució del trencaclosques, podrem comprovar si és correcta en temps $O(N)$ simplement examinant si cada peça encaixa amb les veïnes. Però l'experiència ens indica que és molt més difícil inventar-se un algorisme eficient per resoldre el trencaclosques. Conseqüentment, no és clar que el trencaclosques sigui de la classe P, malgrat que és senzill veure que és de la classe NP.

Resulta que se sap demostrar des de finals dels anys setanta l'estranyíssim fet següent: si el TSP es pot resoldre en temps polinòmic, llavors tot problema NP es pot resoldre també en temps polinòmic i, per tant, $P = NP$. Els experts creuen que això últim no és cert però ningú no ho sap demostrar. Hi ha un milió de dòlars per a qui sigui capaç de decidir si $P = NP$ o no. Ben pensat, oferir recompenses considerables en diner és un mètode excel·lent per convèncer la gent d'afrontar les immenses dificultats que comporta treballar en la solució d'un problema científic difícil. Si l'exemple de l'Institut Clay proliferés segur que augmentaria espectacularment el nombre de matriculats a les llicenciatures de matemàtiques de tot arreu.

Hi ha moltes variants del TSP que es poden resoldre en temps polinòmic. En una d'aquestes variants es demana que es trobi un itinerari que visiti les N ciutats i la longitud del qual no superi el doble de la mínima longitud possible (o, més generalment, C vegades la mínima longitud possible). Tant si es continua exigint que l'itinerari sigui cíclic i cada ciutat es visiti una única vegada com si s'eliminen aquestes restriccions, aquest problema es pot resoldre en temps $O(N \log N)$. Deixem ara els problemes de complexitat computacional per interessar-nos pel nexe entre la conjectura feble de Vitushkin i les variants del TSP que acabem d'esmentar.

Considerem un conjunt compacte K de longitud finita que no és evitable. Tal com hem discutit a la secció anterior la conjectura feble de Vitushkin es redueix a construir una corba rectificable que interseca K en un conjunt de longitud positiva. Això no és gens senzill. Per convèncer-nos-en canviem lleugerament el problema de la manera següent: agafem un subconjunt compacte de longitud positiva de K, diguem-ne H (per exemple el mateix K) i preguntem-nos si hi podem fer passar una corba rectificable. La resposta és que a vegades sí i a vegades no. Per exemple, prenem com a K la unió de $[0,1]$ amb el conjunt de Cantor 1/4. Si $H = [0,1]$ la resposta és que sí i si H és el Cantor 1/4 la resposta és que no, perquè H és invisible en aquest cas.

El problema que ara es planteja de manera natural és trobar un criteri per decidir si es pot fer passar una corba rectificable per un compacte que no tingui cap altra propietat addicional. Aquest problema és més bàsic i primari que l'anterior. Quan tinguem aquest criteri a la nostra disposició i ens donin un compacte no evitable de longitud finita K el que farem és intentar identificar un subconjunt compacte de K que compleixi les condicions del criteri. Com veurem més endavant, aquesta estratègia afortunadament funciona, tot i que no resulta gens senzill implementar-la perquè hi ha multitud de dificultats menors que s'han d'afrontar. La relació amb el TSP prové del fet que hom es pot limitar a considerar conjunts finits i preguntar-se com calcular, mòdul constants universals, la longitud mínima d'una poligonal que visiti tots els punts del conjunt.

Fixem, doncs, un compacte K del pla i intentem esbrinar si alguna corba rectificable el conté. És clar que, com que una corba rectificable té longitud finita, K ha de tenir longitud finita. També és evident que aquesta condició necessària no és suficient, tal com mostra el conjunt de Cantor 1/4. La condició que haurem d'afegir a la de tenir longitud finita haurà d'estar relacionada amb el fet que una corba rectificable té tangents en quasi tots els punts i, per tant, es pot aproximar localment per rectes a molts llocs. Peter Jones va introduir unes quantitats que donen la clau per resoldre el problema i que s'anomenen nombres beta, per una mera raó de notació [13], [14]. La inspiració prové dels mètodes L^2 de l'anàlisi harmònica clàssica a la recta i la motivació inicial va ser donar una demostració nova de la desigualtat L^2 per la integral de Cauchy en gràfiques lipschitzianes. La idea central és que una funció de Lipschitz s'aproxima molt bé localment per rectes i que la desigualtat L^2 ja la sabem per una recta.

Els nombres beta es defineixen de la manera següent: s'agafa un quadrat Q, el costat del qual interpretem com l'escala en la qual estem observant el compacte K i el centre com el lloc al voltant del qual fem l'observació. Posem

$$\beta_K(Q) = \beta(Q) = \inf_L \sup_{z \in K \cap Q} \frac{\operatorname{dist}(z, L)}{\ell(Q)},$$

en què l'ínfim es pren sobre totes les rectes L. A la figura 7 es pot veure la recta L que realitza l'ínfim.

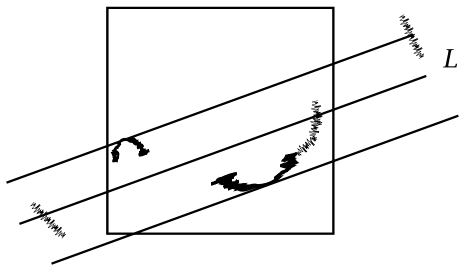

Figura 7

Fixem-nos que $\beta(Q)$ no té dimensió, perquè a la definició hem dividit per l'escala. El número $2\beta(Q)\ell(Q)$ és l'amplària de la banda més estreta que conté $K \cap Q$ i, per tant, es pot interpretar $2\beta(Q)$ com la fracció (percentatge, si es vol) de $\ell(Q)$ que s'ha de prendre per obtenir aquesta amplària. Així doncs, $\beta_K(Q)$ mesura la precisió amb què K es pot aproximar per una recta a l'escala i lloc determinats per Q.

Per exemple, si K és un segment, $\beta_K(Q) = 0$ per a qualsevol Q. Si K és l'arc de paràbola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ i Q és el quadrat amb costats paral·lels als eixos, inclòs al primer quadrant i que té com a vèrtexs els punts de l'eix real 0 i 2^{-n}, llavors $\beta_K(Q) \approx 2^{-n}$.

Un fet molt útil és que no ens caldrà treballar amb tots els quadrats, sinó que ens podrem limitar a considerar-ne una successió molt especial.

Diem que un quadrat és *diàdic* si és de la forma

$$\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right] \times \left[\frac{l}{2^j}, \frac{l+1}{2^j}\right], \qquad \text{en què} \quad j, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Convé que el lector que no hagi treballat mai amb quadrats diàdics es faci un dibuix dels quadrats diàdics de costat 1 ($j = 0$) i que noti que cadascun conté 4 quadrats diàdics de costat $1/2$ (els fills) i està contingut en un únic quadrat diàdic de costat 2 (el pare). Aquesta estructura de saga familiar es va reproduint en totes les escales. Es pot pensar que els quadrats diàdics són subdivisions del mapa d'un territori enorme que donaran informació sobre una escala (el costat) i un lloc determinats (el centre).

El teorema de Peter Jones s'enuncia de la manera següent [14].

3 Teorema *Es pot fer passar una corba rectificable per un compacte K si, i només si,*

$$\sum_{Q \text{ diàdic}} \beta_K^2(Q)\ell(Q) < \infty\,.$$

A més, tenim la següent relació de comparabilitat per la longitud de la corba més curta que conté K:

$$\inf_{\Gamma \supset K} \ell(\Gamma) \simeq \operatorname{diam}(K) + \sum_{Q \text{ diàdic}} \beta_K^2(Q)\,\ell(Q). \tag{9}$$

Hi ha un parell d'exemples que ajuden a entendre el resultat anterior.

El primer és el quadrat unitat $K = [0,1] \times [0,1]$. Llavors $\beta(Q) = 1/2$ si Q és un quadrat diàdic contingut a K. Doncs,

$$\sum_{Q \text{ diàdic}} \beta^2(Q)\,\ell(Q) \geq \sum_{n \geq 0} \sum_{\ell(Q)=2^{-n}} \frac{1}{2^{n+2}} = \sum_{n \geq 0} 2^{n-2} = \infty\,.$$

El segon exemple és el conjunt de Cantor $1/4$. En aquest cas obtenim $\beta(Q) = 1/2$ només pels quadrats diàdics Q_j^n (vegeu la secció 4) dels quals n'hi ha 4^n de costat $1/4^n$. Així que

$$\sum_{Q \text{ diàdic}} \beta^2(Q)\,\ell(Q) \geq \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{4^n} \frac{1}{4^{n+1}} = \infty$$

i, per tant, no hi ha cap corba rectificable que contingui K.

També és il·lustratiu agafar com a K el conjunt de 4^N ciutats col·locades als centres dels quadrats Q_j^N. Llavors trobem que

$$\sum_{Q \text{ diàdic}} \beta^2(Q)\,\ell(Q) \simeq \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{4^N} \frac{1}{4^{N+1}} \simeq \sum_{n=0}^{N} 1 \simeq N\,.$$

En aquest cas podem identificar sense gaire dificultat la corba més curta, mòdul constants numèriques, que passa per les 4^N ciutats: és la poligonal que es dibuixa a la figura 8, en què hem pres $N = 2$.

Notem que es veu clarament que en cada nova generació s'ha d'afegir una longitud comparable a la unitat per poder passar per totes les ciutats. Així que el teorema de Peter Jones es comprova directament en aquest cas tan especial però tan important.

Tenim, doncs, un criteri magnífic per saber si un compacte es pot incloure en una corba rectificable. La nostra intenció és aplicar-lo per resoldre la conjectura feble de Vitushkin, per la qual cosa necessitem relacionar la no evitabilitat d'un compacte de longitud finita amb els nombres beta. Això encara està immensament lluny. En la secció següent veurem que es poden obtenir conclusions sobre el comportament de la integral de Cauchy a L^2 de la mesura «longitud» sobre K, a partir de la mera existència d'una funció analítica, fitada i no constant a $\mathbb{C} \setminus K$. En l'altra secció farem el salt definitiu de l'anàlisi a la geometria relacionant la integral de Cauchy amb els nombres beta.

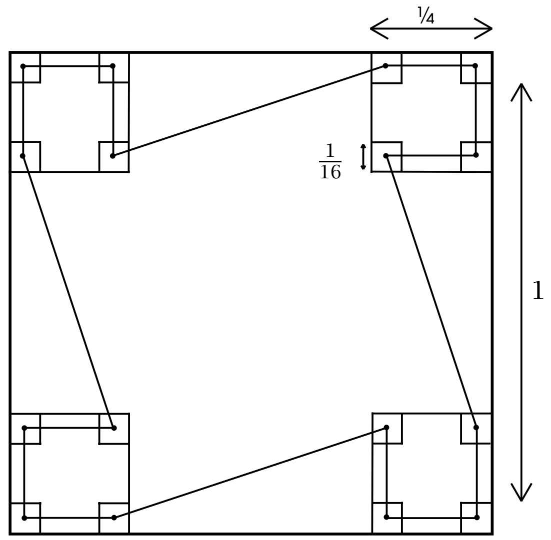

Figura 8

7 La integral de Cauchy

En aquesta secció discutirem una de les idees centrals de la cadena que porta a la solució de la conjectura feble de Vitushkin. Es tracta de veure com de la hipòtesi que K és un compacte no evitable de longitud finita es pot deduir que l'operador integral de Cauchy té un bon comportament en certs espais L^2. És com una mena de camí invers al que ens va portar a resoldre la conjectura de Denjoy. Recordem que aleshores vàrem utilitzar les desigualtats L^2 de Calderón per la integral de Cauchy en gràfiques lipschitzianes per concloure que certs compactes no són evitables.

Així com una corba rectificable té una mesura distingida que és la longitud d'arc, en un compacte K de longitud finita la restricció de la mesura longitud a K juga el paper de mesura base. En direm Λ_K.

Suposem, doncs, que f és una funció no constant, analítica i fitada a $\mathbb{C} \setminus K$. Voldríem tenir definits els valors frontera de f encara que sigui en un sentit feble. Aplicant la fórmula integral de Cauchy a sistemes de corbes a $\mathbb{C} \setminus K$ que es van acostant a K i fent un argument estàndard de compacitat s'arriba a obtenir la fórmula

$$f(z) = f(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{b(\zeta)}{\zeta - z}\, d\Lambda_K(\zeta), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus K, \tag{10}$$

en què b és una funció (essencialment) fitada a K. S'ha d'entendre la funció b com els valors frontera de f malgrat que no hem parlat de convergència puntual de cap mena. La fórmula (10) diu, en particular, que la integral de Cauchy de la funció fitada b també és acotada, perquè és bàsicament f. L'inconvenient de (10), però, és que no es pot donar de manera òbvia un sentit a la integral per als punts $z \in K$. Això és crucial per a poder parlar de l'operador integral de Cauchy com un operador que envia funcions definides a K en funcions definides a K. Per analogia amb el que passa quan K és una corba de classe C^1, hom pot esperar que el valor principal

$$C(b)(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|\zeta - z| > \epsilon} \frac{b(\zeta)}{\zeta - z} \, d\Lambda_K(\zeta) \tag{11}$$

es pugui definir per Λ_K-quasi tot $z \in K$. Però resulta que això no es pot fer amb les eines de què disposem en aquests moments. Llavors es recorre a una solució alternativa molt coneguda en teoria clàssica de Calderón-Zygmund, que és renunciar a tenir l'operador definit per una identitat explícita del tipus (11) i pensar que l'operador és, en realitat, la família d'operadors truncats $(C_\epsilon(g))_{\epsilon > 0}$ en què

$$C_\epsilon(g)(z) = \int_{|\zeta - z| > \epsilon} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, d\Lambda_K(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Notem que la integral precedent convergeix absolutament per a tot z, fins i tot per a funcions g integrables respecte de Λ_K. Que treballar amb els truncaments és un bon camí ho indica el fet que de l'afitament de f a $\mathbb{C} \setminus K$ es dedueix sense gaire problema que per certa constant C es té

$$|C_\epsilon(b)(z)| \le C, \quad z \in K, \quad \epsilon > 0. \tag{12}$$

Si ho volem expressar concisament, la integral de Cauchy envia la funció fitada b en una funció fitada (en realitat en la família de funcions uniformement fitades $C_\epsilon(b)$, $\epsilon > 0$).

Aquí entra en escena un dels resultats més sofisticats de la teoria de Calderón-Zygmund, el teorema $T(b)$ de David, Journé i Semmes. Aquest teorema afirma que un operador integral singular T del tipus de la integral de Cauchy respecte de la longitud, satisfà desigualtats L^2 sempre que es pugui trobar una funció b fitada tal que $T(b)$ també sigui fitada i, a més a més, b compleixi certa condició de no trivialitat que, en particular, exclou el cas $b = 0$. Aquesta condició, que s'anomena paraacretivitat, diu simplement que les mitjanes de b en discs centrats al suport de Λ_K estan fitades inferiorment:

$$\frac{1}{\Lambda_K(D(z,r))} \left| \int_{D(z,r)} b(\zeta) \, d\Lambda_K(\zeta) \right| \ge \delta, \qquad z \in \text{suport } \Lambda_K, \tag{13}$$

en què δ és un nombre positiu. El teorema $T(b)$ és un criteri potentíssim, perquè només cal comprovar l'acció de T sobre una funció particular per a poder concloure que hi ha afitament a L^2. L'inconvenient és que la hipòtesi de paraacretivitat no és gaire senzilla de verificar en casos concrets perquè involucra tots els discs centrats al suport de Λ_K. En el nostre cas, de la funció b que representa els valors frontera de f sabem que $\int b\, d\Lambda_K \neq 0$, perquè f no és constant. Per tant, (13) val amb un δ apropiat sempre que $D(z,r) \supset K$. Malauradament no hi ha res, en principi, que impedeixi que la integral de b sobre un disc petit s'anul·li i, doncs, que (13) no sigui certa.

Michael Christ, un deixeble de Calderón, va saber demostrar amb un argument de temps d'aturada que, si hom llença certes parts de K en què les coses van malament, s'obté un subconjunt K_0 de K pel qual val (13) i que encara té longitud positiva. Fixem-nos que (12) ara pot deixar de complir-se, perquè en canviar K per K_0 també canvia $C_\epsilon(b)$. Però aquesta dificultat se supera amb cert esforç suplementari. Aplicant el teorema $T(b)$ obtenim la desigualtat L^2

$$\int |C_\epsilon(g)(z)|^2 d\Lambda_{K_0}(z) \leq C \int |g(z)|^2 d\Lambda_{K_0}(z)\,, \tag{14}$$

en què C és una constant que no depèn de g ni de ϵ. Resumint, el teorema de Christ es pot enunciar de la manera següent:

4 Teorema *Si K és un compacte no evitable de longitud finita, llavors hi ha un subconjunt compacte K_0 de K de longitud positiva pel qual val la desigualtat* (14)*.*

De fet, a l'article original de Christ hi ha una hipòtesi addicional sobre K, que és que la longitud a K sigui localment positiva i finita de manera uniforme, o sigui que

$$C^{-1} r \leq \Lambda(K \cap D(z,r)) \leq Cr, \quad z \in K, \quad r \leq \operatorname{diam}(K)\,. \tag{15}$$

Que el teorema de Christ [5] val sense aquesta hipòtesi addicional no és un fet evident i requereix un arsenal tècnic gens negligible.

Malgrat que hem extret de la no-evitabilitat la valuosa informació continguda a la desigualtat (14), no hi ha res que ens indiqui que (14) està relacionat amb els nombres beta. El lligam el trobarem a la secció següent, en què veurem com saltar de la condició analítica (14) a una condició geomètrica propera als nombres beta.

8 La curvatura de Menger

Per completar la demostració de la conjectura feble de Vitushkin només ens falta transformar la desigualtat L^2 per la integral de Cauchy que hem obtingut a la secció anterior en un enunciat geomètric. Recordem que la situació és la següent: tenim un compacte K (el K_0 de la secció anterior) de longitud positiva i finita pel qual val la desigualtat

$$\int |C_\epsilon(g)(z)|^2 d\Lambda_K(z) \leq C \int |g(z)|^2 d\Lambda_K(z)\,, \tag{16}$$

en què C és una constant que no depèn de ϵ ni de g. Si es vol treballar en una situació especialment còmoda però gens trivial, també es pot suposar que la mesura longitud a K té la propietat d'homogeneïtat

$$C^{-1}r \leq \Lambda(K \cap D(z,r)) \leq Cr, \quad z \in K, \quad r \leq \operatorname{diam}(K)\,. \tag{17}$$

El que volem fer és extreure de (16) informació geomètrica sobre K que ens permeti concloure que es compleix la condició de Jones

$$\sum_{Q \text{ diàdic}} \beta_K^2(Q)\ell(Q) < \infty\,.$$

Llavors, d'acord amb el teorema 3, trobarem una corba rectificable que passa per K, la qual cosa completarà la prova de la conjectura feble de Vitushkin.

Per estrany que sembli ara mateix, la condició analítica (16) té una formulació equivalent en termes d'una noció apropiada de curvatura que s'anomena curvatura de Menger, pel matemàtic austríac que la va introduir. El nom de Menger està també associat a un conjunt fractal molt pintoresc, que té forma d'esponja, i a certes corbes especials [15]. Curiosament Menger també va ser el popularitzador del problema del viatjant de comerç als cercles matemàtics austríacs i alemanys dels anys trenta.

La curvatura de Menger de tres punts z_1, z_2 i z_3 del pla és

$$c(z_1, z_2, z_3) = R^{-1}\,,$$

en què R és el radi de la circumferència que passa pels tres punts. Si els tres punts estan alineats llavors $R = \infty$ i $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Per analogia, també definim $c(z_1, z_2, z_3) = 0$ si dos entre els tres punts coincideixen. Si $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ i z_3 és molt proper al punt $1/2$, llavors R és enorme i $c(z_1, z_2, z_3)$ és petita. Però això no ens ha de fer pensar que sempre que el tercer punt estigui quasi alineat amb els altres dos la curvatura és petita. Per exemple, si $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{i\epsilon}$, llavors $c(0, 1, z_3) = 2$, malgrat que si ϵ és petit el punt z_3 és molt proper a l'eix real.

Hi ha una relació extraordinàriament simple entre el nucli de Cauchy i la curvatura de Menger, descoberta per Melnikov [19] mentre intentava trobar versions discretes de la capacitat analítica. Donats tres punts diferents del pla considerem la matriu

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_1 - z_2} & \frac{1}{z_1 - z_3} \\ \frac{1}{z_2 - z_1} & 0 & \frac{1}{z_2 - z_3} \\ \frac{1}{z_3 - z_1} & \frac{1}{z_3 - z_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotem per $\mathbf{1}$ el vector $(1, 1, 1) \in \mathbb{C}^3$ i sigui

$$\langle z, w\rangle = \sum z_i \overline{w_i}, \qquad \text{per a } \; z, w \in \mathbb{C}^3, \tag{18}$$

el producte hermític a $\mathbb{C}^3$. Recordem que la matriu adjunta de C respecte del producte hermític (18) es denota per C^* i s'obté intercanviant files per columnes i conjugant. Ens interessarà considerar la matriu C^*C, que és òbviament una matriu positiva perquè $\langle C^*C(v), v\rangle = \|C(v)\|^2 \geq 0$. Calculant explícitament veiem que els termes de la diagonal de C^*C són del tipus

$$\frac{1}{|z_j - z_i|^2} + \frac{1}{|z_k - z_i|^2}, \quad j \neq i, \quad k \neq i,$$

amb i variant entre 1 i 3. Els termes de fora de la diagonal són del tipus

$$\frac{1}{(z_j - z_i)\,\overline{(z_k - z_i)}} \quad j \neq i, \quad k \neq i.$$

Voldríem calcular $\|C(\mathbf{1})\|^2 = \langle C^*C(\mathbf{1}), \mathbf{1}\rangle$. És immediat convèncer-se que per a qualsevol matriu M de mida 3×3 l'expressió $\langle M(\mathbf{1}), \mathbf{1}\rangle$ és la suma dels 9 coeficients de la matriu. Així doncs

$$\|C(\mathbf{1})\|^2 = \sum_{i \neq j} |z_i - z_j|^{-2} + \sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(1)})\,\overline{(z_{\sigma(3)} - z_{\sigma(1)})}}, \tag{18}$$

en què la segona suma es pren sobre les sis permutacions de $\{1, 2, 3\}$. Veiem, doncs, que el quadrat de la norma del vector $C(\mathbf{1})$ és la suma de dos termes, el primer dels quals és la traça de la matriu C^*C i és positiu, d'acord amb el fet que la matriu C^*C és positiva. El segon terme és clarament un nombre real a la vista de l'equació anterior. El fet completament inesperat és que és un nombre positiu. Més concretament es té la identitat

$$\sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(1)})\,\overline{(z_{\sigma(3)} - z_{\sigma(1)})}} = c(z_1, z_2, z_3)^2, \tag{19}$$

la qual es demostra fàcilment tenint en compte que a la suma sobre σ només cal considerar tres termes perquè els altres són els conjugats (vegeu [19] o [20]). Doncs,

$$\|C(\mathbf{1})\|^2 = \sum_{i \neq j} |z_i - z_j|^{-2} + c(z_1, z_2, z_3)^2. \tag{20}$$

L'autor d'aquest article va descobrir que la identitat anterior es pot explotar per entendre les desigualtats L^2 per la integral de Cauchy respecte de mesures molt generals. El que ens interessa aquí és que si tenim (17) llavors

$$\begin{aligned}&\int_D |C_\epsilon(\chi_D)(z)|^2 \, d\Lambda_K(z) = \\ &\iiint_{D^3} c(z_1, z_2, z_3)^2 \, d\Lambda_K(z_1)\, d\Lambda_K(z_2)\, d\Lambda_K(z_3) + O(\Lambda_K(D)),\end{aligned} \tag{21}$$

per a qualsevol disc D. La identitat anterior és una versió contínua de (20) en la qual el vector $\mathbf{1}$ s'ha convertit en la funció χ_D, el terme diagonal correspon al terme $O(\Lambda_K(D))$ i el terme de curvatura a la integral triple sobre D^3. Per a il·lustrar la potència de (21), examinem amb atenció el cas $K = [0,1]$. Llavors $c(z_1,z_2,z_3)=0$ a K^3 i, doncs, obtenim, per a tot interval $I \subset [0,1]$ de longitud $|I|$,

$$\int_I H(\chi_I)^2(x)dx \le C|I|\,, \tag{22}$$

la qual cosa és bàsicament la desigualtat L^2 per a la transformada de Hilbert de la funció característica de l'interval I. El lector que hagi treballat amb la transformada de Hilbert ja haurà observat que $H(\chi_I)$ es pot calcular explícitament i la seva norma a L^2 també, i que, per tant, (22) no és gran cosa, fins i tot si tenim prohibit utilitzar la transformada de Fourier. Però, el que ens interessa aquí és el mètode i no el resultat. De fet, si K és un arc de gràfica lipschitziana sabem que localment K s'aproxima per rectes d'una forma quantificable. Això es pot traduir en termes de la integral triple a (21) i es pot acabar ordint un argument ràpid i raonablement elemental [25] per demostrar l'afitament L^2 de Coifman, McIntosh i Meyer. De fet, la mateixa idea permet demostrar que la integral de Cauchy es controla pel primer commutador [26], un operador més senzill per al qual Calderón ja havia obtingut la desigualtat L^2 l'any 1965. La conclusió és que, irònicament, aquest article de l'any 1965 que va iniciar una llarga, rellevant i influent línia de recerca ja va néixer portant, encriptada, la solució final.

Tornant al que ens interessa, veiem clarament que, si suposem que (16) val, prenent $f = \chi_D$ tenim

$$\int |C_\epsilon(\chi_D)|^2 d\Lambda_K \le C\Lambda_K(D)\,,$$

que, combinat amb (21), dóna

$$\iiint_{D^3} c(z_1,z_2,z_3)^2\, d\Lambda_K(z_1)\, d\Lambda_K(z_2)\, d\Lambda_K(z_3) \le C\Lambda_K(D). \tag{23}$$

Si prenem com a D un disc que contingui K de radi comparable al diàmetre de K (23) es converteix en

$$\iiint c(z_1,z_2,z_3)^2 d\Lambda_K(z_1)\, d\Lambda_K(z_2)\, d\Lambda_K(z_3) \le C\,\mathrm{diam}(K). \tag{24}$$

La desigualtat anterior és un enunciat amb marcat contingut geomètric que hem sabut deduir de la desigualtat L^2 inicial (16). ¿Podem concloure alguna cosa sobre el comportament dels nombres beta a partir de (24)? La resposta és que sí. Tot i que una demostració completa d'això no és senzilla, ni tan sols en el cas homogeni (17) [18], es pot donar una idea del perquè hi ha esperances fonamentades que tot acabi funcionant. Si poguéssim acotar la suma

$$\sum_{Q \text{ diàdic}} \beta_K^2(Q)\ \ell(Q)\,, \tag{25}$$

per una constant multiplicada per

$$\iiint c(z_1, z_2, z_3)^2 d\Lambda_K(z_1)\, d\Lambda_K(z_2)\, d\Lambda_K(z_3)\,,$$

hauríem acabat perquè, aplicant (24), la suma (25) seria finita i, per consegüent, K seria un subconjunt d'una corba rectificable pel teorema 3. Que l'afitament que acabem d'esmentar és plausible ho diu la figura 9 en què es veu que si en l'escala i lloc determinats per un quadrat Q la quantitat $\beta(Q)$ és positiva, llavors també hi ha curvatura de Menger positiva.

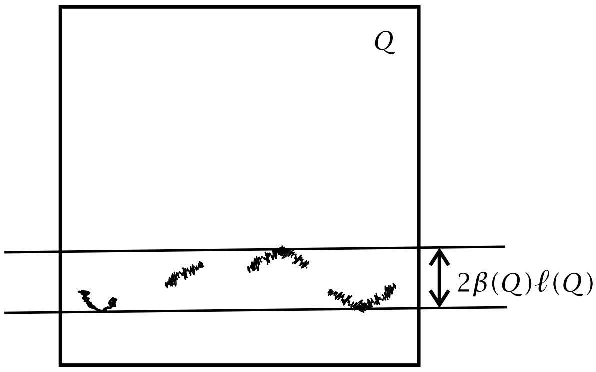

Figura 9

El lector interessat a saber-ne més pot consultar l'excel·lent exposició de Pajot [22].

Amb això completem la discussió de la relació entre la desigualtat L^2 per a la integral de Cauchy i els nombres beta, i, doncs, acabem l'esbós de la demostració de la conjectura feble de Vitushkin, almenys en el cas homogeni (17). En la secció següent direm molt breument que el cas no homogeni també es pot tractar amb complicades variants dels mètodes que hem considerat fins ara.

9 El cas no homogeni

En tot el que hem dit en les seccions anteriors no ens hem pogut fer càrrec de la dificultat tècnica més formidable de tot l'argument que hem esbossat amb tant treball, que és l'absència de la condició d'homogeneïtat

$$C^{-1} r \le \Lambda(K \cap D(z,r)) \le Cr\,, \quad z \in K, \quad r \le \operatorname{diam}(K)$$

en el cas més general possible. La superació d'aquesta dificultat no és una tasca senzilla i necessita noves idees. Les persones que hi han contribuït han estat, a més de G. David, a qui es deu la primera demostració de la conjectura de Vitushkin, J. C. Leger, un deixeble de G. David que va demostrar un anàleg no homogeni de la relació entre els nombres beta i la curvatura de Menger; P. Mattila que va resoldre amb G. David el cas «real» de la conjectura feble de Vitushkin; Nazarov, Treil i Volberg que han introduït nous mètodes per al teorema $T(b)$ en el cas no homogeni, i X. Tolsa que ha desenvolupat diversos aspectes de la teoria de Calderón-Zygmund no homogènia, especialment la teoria de l'espai BMO (*Bounded Mean Oscillation*) no homogeni.

Mencionem finalment que els mètodes que hem presentat en les seccions anteriors també s'apliquen per resoldre uns altres dos problemes molt antics relacionats amb la noció de conjunt evitable: la caracterització dels conjunts generals de Cantor que són evitables [16] i la semiadditivitat de la capacitat analítica [23].

Agraïments

A en José Luis Fernández li agraeixo d'haver-me convidat a escriure un article per a la «Gaceta», ja fa massa anys. A en Ferran Hurtado l'ajuda experta i pacient per les qüestions relatives al TSP, a en Joan Orobitg que hagi corregit dues versions preliminars del manuscrit, a en Lluís Alsedà que m'hagi convençut que canviés la introducció i a l'Adolfo Quirós que hagi tingut l'amabilitat de revisar tot l'article i m'hagi suggerit canvis que han contribuït a millorar substancialment l'exposició. A en Jesús Bastero li dec el decidit suport a l'article, en tots els seus aspectes. La infinita paciència de la Teresa Arnal ha fet possible una correcció ortogràfica i gramatical eficaç i pacífica. Finalment, he gaudit d'un ajut del *Programa de movilidad* del Ministeri d'Educació i Cultura, i del suport dels projectes BMF 2000-0361 del Ministeri i SGR 2001 00431 de la Generalitat de Catalunya.

Referències

[1] Ahlfors, L. «Bounded analytic functions». *Duke Math. J.*, 14 (1947), 1–11.

[2] Calderón, A. P. «Commutators of singular integral operators». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 53 (1965), 1092–1099.

[3] Calderón, A. P. «Cauchy Integrals on Lipschitz curves and related operators». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74 (1977), 1324–1327.

[4] Calderón, A. P. «Acceptance speech for the Bocher Price». *Notices of the A. M. S.*, 26 (1979), 97–99.

[5] Christ, M. «A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy Integral». *Colloq. Math.*, 60/61 (1990), 1367–1381.

[6] Coifman, R. R.; McIntosh, A.; Meyer, Y. «L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes». *Ann. of Math.*, 116 (1982), 361–387.

[7] DAVID, G. «Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity». *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14 (2) (1998), 369–479.

[8] DAVID, G. «Analytic capacity, Calderón-Zygmund operators, and rectifiability». *Publ. Mat.*, 43 (1999), 3–25.

[9] FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[10] GARNETT, J. «Positive length but zero analytic capacity». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 (1970), 696–699.

[11] GARNETT, J.; VERDERA, J. «Analytic capacity, bilipschitz mappings and Cantor sets». *Mathematical Research Letters*, 10 (2003), 515–522.

[12] GUZMÁN, M. DE. *Real Variable methods in Fourier Analysis*. Noth-Holland Mathematical Studies 46. Amsterdam i Nova York: North-Holland Publishing Co., 1981.

[13] JONES, P. «Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure». A: GARCÍA-CUERVA, J. ed., *Proc. Conf. on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*. El Escorial, 1987 Lecture Notes in Math. 1384, Springer-Verlag, 1989, p. 24–68.

[14] JONES, P. «Rectifiable sets and the traveling salesman problem». *Invent. Math.*, 102 (1990), 1–16.

[15] KASS, S. «Karl Menger». *Notices of the A.M.S.*, 43 (5) (1996), 558–561.

[16] MATEU, J.; TOLSA, X.; VERDERA, J. «The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b)$ theorem». *Journal of the Amer. Math. Soc.*, 16 (2003), 19–28

[17] MATTILA, P. *Geometry of sets and measures in Euclidean space*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 44 Cambridge University Press, 1995.

[18] MATTILA, P.; MELNIKOV, M.; VERDERA, J. «The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability». *Ann. of Math.*, 144 (1996), 127–136.

[19] MELNIKOV, M. «Analytic capacity: discrete approach and curvature of measure». *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 186 (1995), 827–846.

[20] MELNIKOV, M.; VERDERA, J. «A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs». *Internat. Math. Res. Notices*, 7 (1995), 325–331.

[21] NAZAROV, F.; TREIL, S.; VOLBERG, A. «Tb Theorems for non-homogeneous spaces». *Preprint*.

[22] PAJOT, H. *Analytic capacity, Rectifiability, Menger curvature and the Cauchy Integral*. Berlín: Lecture Notes in Math. 1799, Springer, 2002.

[23] TOLSA, X. «Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity». *Acta Mathematica*, 190 (2003), 105–149.

[24] VERDERA, J. «Removability, capacity and approximation». A: *Complex Potential Theory*, NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994, p. 419–473.

[25] VERDERA, J. «A new elementary proof of L^2 estimates for the Cauchy Integral on Lipschitz graphs». Manuscrit d'una conferència feta a la Conference on Geometric and Algebraic Aspects in Several Complex Variables. (Cetraro, 1994). http://mat.uab.es/~jvm.

[26] VERDERA, J. «The L^2 boundedness of the Cauchy integral and Menger curvature». *Contemp. Math.*, 277 (2001), 139–158.

[27] VITUSHKIN, A. G. «The analytic capacity of sets in problems of approximation theory». *Uspekhi Mat. Nauk*, 22 (1967), 141–199. Traducció anglesa *Math. Surveys Monographs*, 22 (1967), 139–200 (in Russian).

[28] http://www.claymath.org/aboutcmi/vision.htm

[29] http://www.claymath.org/prizeproblems/milliondollarminesweeper.htm

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA, BARCELONA
jvm@mat.uab.es