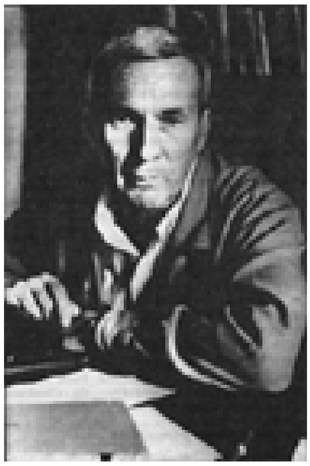
Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 2, 2003. Pàg. 25–37

Algunes consideracions sobre llenguatges axiomatitzats amb eines d'extensió: un enfocament en la teoria de la probabilitat i el càlcul d'errors amb formes de Dirichlet*

Nicolas Bouleau

Aquest any és el centenari del naixement de Kolmogorov. És per a mi un plaer agrair aquesta ocasió per a fer una conferència relacionada amb el treball de la seva vida. Aquí no em proposo de cap manera fer un estudi històric complet de la producció de Kolmogorov, sinó, més aviat, fer alguns comentaris sobre certs temes matemàtics específics en els quals ell va tenir un paper molt actiu. Com sabeu, Kolmogorov va produir unes vuit-centes publicacions que comprenen totes les branques principals de les matemàtiques: anàlisi funcional, teoria ergòdica, turbulència, teoria de la probabilitat i estadística i lògica.



Andreï Nikolaïevitx Kolmogorov

* Conferència pronunciada a la sisena Trobada Matemàtica de la SCM, celebrada el 4 d'abril de 2003 dedicada al centenari d'A. Kolmogorov.
Traducció de Maria Jolis, Departament de Matemàtiques, UAB.

Concretament, va escriure cinc articles claus en el domini específic dels fonaments de la probabilitat i els processos estocàstics entre els anys 1931 i 1934, [3], [4], [5], [6] i [7], que fan d'ell un dels fundadors de la teoria dels processos de Markov amb temps continu o difusions. El tema que voldria desenvolupar aquí pertany al seu famós *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, que en part va més enllà del cos principal del seu treball matemàtic, ja que en alguns aspectes serveix com a *un manifesto* de com fer front a la probabilitat i els problemes probabilístics dins del camp de les matemàtiques.

Faré alguns comentaris sobre els llenguatges axiomatitzats que es manifesten en els casos de la teoria de la probabilitat i el càlcul d'errors amb formes de Dirichlet. Basant-me en aquests dos exemples em proposo posar èmfasi en la importància que un llenguatge sigui útil per tal de tenir una eina d'extensió fàcilment aplicable.

1 Història breu de la teoria de successions aleatòries

Per tal de comparar-la amb la teoria axiomàtica de Kolmogorov, serà útil explicar què va succeir amb la *teoria de les successions aleatòries* durant el segle XX. Aquesta teoria era una manera alternativa d'incorporar la teoria de la probabilitat dins de les matemàtiques. El seu propòsit ha estat descriure una successió de mostres independents d'una quantitat donada. En el cas més senzill, la teoria tracta de les mostres d'un enter aleatori o fins i tot un simple dígit, com a model del joc just de cares i creus, en el cas perfectament simètric de probabilitats un mig / un mig.[1]

1.1 Els nombres normals de Borel (1909)

És ara fàcil, i Émile Borel ja en podia fer una demostració el 1909, que si representem un nombre real de l'interval unitat $[0,1]$ pel seu desenvolupament binari

$$(a_0, a_1, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \qquad \longleftrightarrow \qquad x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$$

a la distribució de dígits independents un mig / un mig li correspon la mesura de Lebesgue en l'interval $[0,1]$.

En conseqüència, per a quasi tot nombre real $x \in [0,1]$, la freqüència asimptòtica de qualsevol successió finita és $\frac{1}{2}$ elevat a la longitud de la successió. Un nombre real que satisfà aquesta propietat s'anomena nombre normal en el sentit Borel.

1 Aquesta secció està inspirada per l'interessant estudi portat a terme per Claude Dellacherie [2].

ÉMILE BOREL

Ara bé, provar que gairebé tots els nombres reals són normals és només un pas; un altre seria mostrar un nombre d'aquests! Per al nombre π, determinar si és normal o no constitueix una conjectura famosa, no resolta encara. En realitat, Borel va proporcionar una construcció efectiva però sofisticada d'un nombre normal.

D'altra banda, el 1919, Champernowne va provar que la successió obtinguda escrivint els successius enters no negatius en la seva representació binària:

$$0\ 1\ 10\ 11\ 100\ 101\ 110\ 111\ 1000\ 1001\ 1010\ 1011\ 1100\ 1101\ 1110\ 1111\ 10000 \ldots,$$

és normal en el sentit de Borel.

Això ens mostra clarament que el concepte de nombre normal de Borel no copsa molt bé la idea de successió aleatòria.

Ja el 1919, von Mises va proposar una millora envers la definició d'una successió aleatòria, per mitjà d'un nou concepte de *col·lectiu* (vegeu [10]) que cercava descriure un típic joc de cares i creus. La idea es demanar més que les mitjanes asimptòtiques i pensar en un jugador que juga només en alguns instants aleatoris depenent de l'evolució del joc: una successió de dígits és un *col·lectiu* si satisfà la llei dels grans nombres i si qualsevol successió parcial obtinguda per una regla de selecció no anticipativa satisfà també la llei dels grans nombres. Aquest interessant plantejament, en el qual s'endevina la noció d'*instant d'aturada*, té, malgrat tot, el desavantatge de ser difícilment aplicable en la pràctica. A. Wald, un dels fundadors de l'estadística i la teoria de la decisió va proposar el 1937 la noció més precisa de *col·lectiu respecte a una família de regles.* Més tard, el famós lògic A. Church el 1940 va fer la primera contribució de la lògica al debat, proposant una *noció absoluta de col·lectiu* que usa el conjunt de totes les regles no anticipatives *efectives* quant a la teoria recursiva de funcions. Així es posava de manifest que l'objectiu havia estat assolit aplicant aquesta nova teoria d'efectivitat que resultava dels treballs recents dels lògics dels anys trenta (Gödel, Turing, Church).

R. von Mises

A. Wald

A. Church

De tota manera, més o menys durant el mateix període de temps, just abans de la Segona Guerra Mundial, van sorgir dificultats insospitades concernents a la noció de *col·lectiu*. En el seu treball *Étude critique de la notion de collectif* (1939), Jean Ville va provar que les successions aleatòries tenen algunes propietats probabilístiques que un *col·lectiu* pot no satisfer sempre. Un *col·lectiu* no presenta la magnitud correcta de fluctuacions. En el seu argument Jean Ville usa el concepte modern de *martingala* matemàtica, les propietats de la qual van ser després millorades en particular per J. L. Doob durant els anys cinquanta. Per transferir el terme *martingala* del joc a les matemàtiques Ville va afegir una mica a aquesta noció i probablement va contribuir a la seva subseqüent importància.

Hauríem d'esperar els anys seixanta per tal d'obtenir una resposta satisfactòria a la qüestió de les successions aleatòries. Aquesta resposta ve de la lògica matemàtica i va ser donada per Martin Löf [8]. De manera informal, una successió aleatòria en el sentit de Martin Löf passa tots els tests estadístics d'aleatorietat efectius. Per a un nombre real en $[0,1]$, ser una successió aleatòria en el sentit de Martin Löf significa que no pertany a cap conjunt negligible efectiu en $[0,1]$. Un tal nombre no pot venir donat per cap algorisme, és aleatori en el sentit de Church i també resisteix les crítiques de Ville.

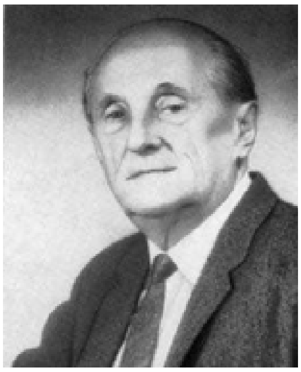
Tot i que és bastant fascinant, la teoria de les successions ha quedat sense ús per part dels probabilistes. L'excepcional desenvolupament durant el segle XX de la teoria de la probabilitat, que va començar com un camp secundari i ha esdevingut un dels principals dominis de la matemàtica aplicada i fins i tot de la pura, és basat en un altre plantejament: la construcció d'un *llenguatge* per tal de manejar els càlculs probabilístics.

Examinem ara la raó que hi ha al darrere de la fertilitat d'aquest llenguatge.

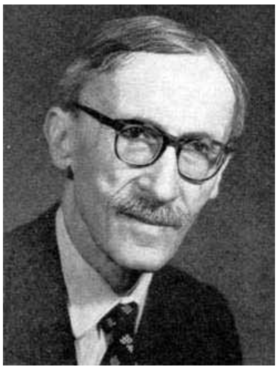
2 Axiomatització de Kolmogorov i σ-additivitat

L'article titulat «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung» és una crida a incloure el càlcul probabilístic dins de la teoria de la mesura. Kolmogorov no suposa que aquesta idea és nova; en lloc d'això ell cita diversos autors que han aplicat la teoria de la mesura de Lebesgue per a investigacions probabilístiques, en particular Borel, Fréchet, Steinhaus, Lévy. Nogensmenys, ell va proposar nous arguments, que van provar ser altament valuosos per a la recerca posterior: la construcció de probabilitats en espais de dimensió infinita i la definició de les lleis i esperances condicionals usant el teorema de Radon-Nikodym.

M. Fréchet



H. Steinhaus



P. Lévy

Ell no considerava l'axiomatització com un sistema purament formal, sinó més aviat con un *llenguatge* que té sentit i que permet dirigir les idees i els raonaments. Remarcant que *tota teoria axiomàtica admet, com és ben conegut, un nombre il·limitat d'interpretacions concretes*,[2] ell posa èmfasi en la interpretació intuïtiva de la seva axiomatització. Ell va voler exposar un diccionari amb les equivalències entre els esdeveniments aleatoris i els conjunts:

2 Som al 1933 i els treballs de Löwenheim i Skolem (1915–1920), que proven l'existència d'un model numerable per a qualsevol teoria consistent, ja són coneguts.

Teoria de conjunts	*Esdeveniments aleatoris*
1. A i B no tenen intersecció, e. d. $AB = 0$.	1. Els esdeveniments A i B són incompatibles.
2. $AB \dots N = 0$.	2. Els esdeveniments $A, \dots, N$ són incompatibles.
3. $AB \dots N = X$.	3. L'esdeveniment X està definit com l'ocurrència simultània dels esdeveniments $A, B, \dots, N$.
4. $A \cup B \cup \dots \cup N = X$.	4. L'esdeveniment X està definit per l'ocurrència d'almenys un dels esdeveniments $A, B, \dots, N$.
5. El conjunt complementari A^c.	5. La no-ocurrència de l'esdeveniment A.
6. $A = 0$.	6. L'esdeveniment A és impossible.
7. $A = E$.	7. L'esdeveniment A ha d'ocórrer.
8. Descomposició disjunta de E $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = E$.	8. Els possibles resultats $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'un experiment.
9. B és un subconjunt d'A.	9. De l'ocurrència de l'esdeveniment B $B \subset A$ es dedueix la inevitable ocurrència d'A.

Quant als axiomes, els cinc primers són elementals: *Sigui $\mathcal{F}$ un conjunt de subconjunts d'un conjunt E.*

1. *$\mathcal{F}$ satisfà que si dos conjunts pertanyen a $\mathcal{F}$ aleshores també hi pertany la seva unió, la seva intersecció i la seva diferència.*
2. *$\mathcal{F}$ conté el conjunt E.*
3. *A cada conjunt A en $\mathcal{F}$ se li assigna un nombre real no negatiu $P(A)$, anomenat la probabilitat de l'esdeveniment A.*
4. *$P(E)$ és igual a 1.*
5. *Si A i B no tenen cap element en comú, aleshores $P(A + B) = P(A) + P(B)$.*

Kolmogorov va recalcar la importància del sisè axioma: en tot el que segueix suposarem que, a més dels axiomes de l'1 al 5, també es compleix l'axioma:

6. *Per a qualsevol successió decreixent d'esdeveniments*

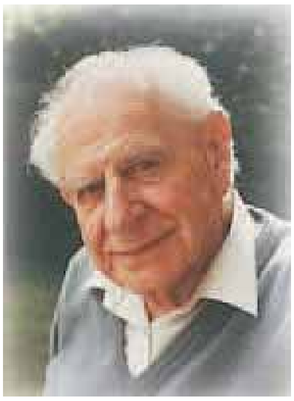
$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

en $\mathcal{F}$ per a la qual $\cap_n A_n = 0$ es compleix que $\lim_n P(A_n) = 0$.

Aquest axioma de σ-additivitat implica que la probabilitat P és una mesura en el sentit de Lebesgue i Borel, la qual cosa inclou la teoria de la probabilitat dins la teoria de la mesura:

probabilitat	$\longleftrightarrow$	mesura
esdeveniment	$\longleftrightarrow$	conjunt mesurable
variable aleatòria	$\longleftrightarrow$	funció mesurable
esperança	$\longleftrightarrow$	integral
independència	$\longleftrightarrow$	producte d'espais mesurables
esperança condicional	$\longleftrightarrow$	derivada de Radon-Nikodym

Cal remarcar que el 1938, el filòsof Karl Popper, la principal formació del qual venia del camp de la psicologia, no estava convençut de l'interès de posar la probabilitat dins del marc de la teoria de la mesura. Fins i tot el 1955, ell encara semblava orgullós de fer notar que una teoria amb només els cinc primers axiomes és més general. Va escriure: «Es pot prendre el sistema de Kolmogorov, però, com una de les interpretacions del meu» [9].



KARL POPPER

Ara tenim clar, gràcies al desenvolupament de l'anàlisi estocàstica del segle XX, que la σ-additivitat és l'eina clau que fa aquest llenguatge expansible. Permet definir la probabilitat d'esdeveniments o l'esperança de funcions que no es poden donar per formules simples i tancades, sinó com a límits. Aquest fet és absolutament de primera importància ja que molts objectes matemàtics estan definits com a límits i *els mètodes per a definir aquestes successions convergents no són a priori restringits.*

Això prepara el terreny per a l'estudi dels processos estocàstics: si coneixem les propietats probabilístiques d'un nombre finit de coordenades X_n sobre un espai producte, sense la σ-additivitat no podem concloure res sobre funcions depenent d'un nombre infinit de X_n.

Gràcies a la σ-additivitat, es poden desenvolupar les connexions amb l'anàlisi funcional, donant lloc així a interpretacions probabilístiques. Per exemple, la teoria del potencial està connectada amb la teoria de processos de Markov i amb la teoria de martingales. Recordem aquí que J. L. Doob va provar per primer cop la seva extensió del lema de Fatou a la frontera a partir de límits cònics a límits no tangencials, usant un argument probabilístic i després, un any més tard, mitjançant un argument analític.

3 Càlcul d'errors amb formes de Dirichlet

Ara voldria presentar una teoria més recent que és en certs aspectes «cosina» de la teoria de la probabilitat, que també té un mitjà d'extensió que proporciona una teoria remarcablement potent i fructífera. Tinc en ment la teoria de les formes de Dirichlet en la seva interpretació en termes d'errors. Començaré amb les idees de Gauss sobre errors que són les bases elementals de la teoria.

3.1 Fórmules de Gauss per a la propagació d'errors

Les idees de Gauss van ser formulades al principi del segle XIX, en un temps en què diversos matemàtics treballaven amb els errors dels mesuraments, especialment en el camp de la mecànica celeste. Primer de tot, Legendre («Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des planètes», 1805) va proposar el principi de mínims quadrats per a escollir el valor millor d'una quantitat obtinguda per diversos mesuraments diferents.



F. GAUSS (1803) A.-M. LEGENDRE P. S. LAPLACE

Després, el mateix Gauss («Theoria motus coelestium», 1809) va elaborar el famós argument que provava que, un cop s'ha admès que la mitjana aritmètica és el millor valor per retenir entre diversos resultats dels mesurament d'una certa quantitat, la llei de probabilitat de l'error és necessàriament la llei normal. Aquest argument va ser fet més rigorós per Poincaré al final del segle. Més tard, Laplace («Théorie analytique des probabilités», 1811) va mostrar la utilitat del mètode de mínims quadrats per a resoldre sistemes lineals quan el nombre d'equacions no concorda amb el nombre d'incògnites. Dins del mateix context, uns anys més tard Gauss es va interessar en la propagació d'errors a través dels càlculs («Theoria combinationis», 1821) i va proposar el problema següent:

Donada una quantitat $U = F(V_1, V_2, V_3, \ldots)$ funció de les quantitats errònies $V_1, V_2, V_3, \ldots$, calcular l'error quadràtic esperat sobre U suposant que els errors quadràtics $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \ldots$ de les $V_1, V_2, V_3, \ldots$ són coneguts, petits i independents.

F. GAUSS (1828)

H. POINCARÉ

La seva resposta va ser la fórmula següent:

$$\sigma_U^2 = (\frac{\partial F}{\partial V_1})^2 \sigma_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial V_2})^2 \sigma_2^2 + (\frac{\partial F}{\partial V_3})^2 \sigma_3^2 + \cdots \tag{1}$$

Va trobar també la covariància de l'error sobre U i l'error sobre una altra funció de les V_i.

La fórmula (1) mostra una propietat que la fa molt preferible en diversos aspectes a d'altres fórmules que es poden trobar en diferents llibres de text dels segles XIX i XX. Aquesta fórmula presenta una propietat de coherència. Amb una fórmula com

$$\sigma_U = |\frac{\partial F}{\partial V_1}|\sigma_1 + |\frac{\partial F}{\partial V_2}|\sigma_1 + |\frac{\partial F}{\partial V_3}|\sigma_3 + \cdots \tag{2}$$

els errors poden dependre de la manera en què està escrita la funció F. Ja en dimensió 2, podem veure que si l'aplicació identitat s'escrivís com a composició d'una aplicació lineal injectiva i la seva inversa, els errors creixerien, cosa que és difícilment acceptable.

Aquesta dificultat no apareix en el càlcul de Gauss. Introduint l'operador diferencial

$$L = \frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial V_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2}{\partial V_2^2} + \cdots$$

i suposant les funcions prou regulars, ens adonem que la fórmula (1) es pot escriure com

$$\sigma_U^2 = L(F^2) - 2FLF$$

i la coherència es dedueix del transport d'un operador diferencial per una aplicació. Si u i v són aplicacions regulars i bijectives, llavors, denotant l'operador $\varphi \to L(\varphi \circ u) \circ u^{-1}$ per $\theta_u L$, obtenim $\theta_{v \circ u} L = \theta_v(\theta_u L)$.

Ara, els errors sobre $V_1, V_2, V_3, \ldots$ no són suposats necessàriament independents i poden dependre de $V_1, V_2, V_3, \ldots$ Considerant una àlgebra de matrius simètriques $\sigma_{ij}(v_1, v_2, \ldots)$ sobre $\mathbb{R}^n$ que representen les covariàncies condicionals i covariàncies entre els errors en $V_1, V_2, V_3, \ldots$ donats els valors $v_1, v_2, v_3, \ldots$ de $V_1, V_2, V_3, \ldots$, aleshores l'error en $U = F(V_1, V_2, V_3, \ldots)$, donats els valors $v_1, v_2, v_3, \ldots$ de $V_1, V_2, V_3, \ldots$, és

$$\sigma_U^2 = \sum_{ij} \frac{\partial F}{\partial V_i}(v_1, v_2, v_3, \ldots) \frac{\partial F}{\partial V_j}(v_1, v_2, v_3, \ldots) \sigma_{ij}(v_1, v_2, v_3, \ldots)$$

que depèn únicament de F com a aplicació. Aquesta és la fórmula general del càlcul d'errors a la Gauss.

3.2 Propagació d'errors a través de càlculs: el càlcul d'errors basat en les formes de Dirichlet

El càlcul d'errors de Gauss té la limitació de suposar que tant la funció F com les variables aleatòries $V_1, V_2, V_3, \ldots$ es coneixen explícitament. En canvi, en la modelització probabilística ens enfrontem sovint amb situacions en què totes les variables aleatòries, funcions i covariàncies venen donades per límits. Per a tals situacions, un mitjà d'extensió esdevé essencial.

Suposem que les nostres quantitats estan definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'error quadràtic d'una variable aleatòria X és també aleatori, i el denotarem per $\Gamma[X]$. Parlant intuïtivament, encara suposem que els errors són infinitament petits, tot i que això no apareix en la notació. Es suposa que disposem d'una unitat infinitament petita fixada per a mesurar els errors en tot el problema. L'eina d'extensió consisteix en el següent: suposem que si $X_n \to X$ en $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i si l'error $\Gamma[X_m - X_n]$ on $X_m - X_n$ pot fer-se tan petit com vulguem en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ per a m, n prou grans, aleshores l'error $\Gamma[X_n - X]$ en $X_n - X$ tendeix a zero en L^1.

Podem interpretar aquesta idea com un principi de coherència reforçat; significa que l'error en X està associat a X i a més, si la successió de parells $(X_n,\ \text{error en } X_n)$ convergeix adequadament, convergeix necessàriament a un parell $(X,\ \text{error en } X)$.

L'axiomatització d'aquesta idea involucra la noció de forma diferencial quadràtica tancada o forma de Dirichlet: *Una estructura d'error és un terme*

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)\,,$$

on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *és un espai de probabilitat, que satisfà les propietats següents:*

1. $\mathbb{D}$ *és un subspai vectorial dens de* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*.*

2. Γ *és una aplicació bilineal simètrica i definida positiva de* $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ *en* $L^1(\mathbb{P})$ *que satisfà el càlcul funcional de classe* $C^1 \cap Lip$*, que significa que si* $u \in \mathbb{D}^m$, $v \in \mathbb{D}^n$*, per a* F *i* G *de classe* C^1 *i Lipschitz de* $\mathbb{R}^m$ *[resp.* $\mathbb{R}^n$*] en* $\mathbb{R}$*, aleshores* $F \circ u \in \mathbb{D}$*,* $G \circ v \in \mathbb{D}$ *i*

$$\Gamma[F \circ u, G \circ v] = \sum_{ij} F_i' \circ u \;\; G_i' \circ v \;\; \Gamma[u_i, v_j] \qquad \mathbb{P} - q.s.$$

3. *La forma bilineal* $\mathcal{E}[f,g] = \mathbb{E}[\Gamma[f,g]]$ *és tancada, és a dir,* $\mathbb{D}$ *és complet sota la norma*

$$\|.\|_{\mathbb{D}} = (\|.\|_{L^2}^2 + \mathcal{E}[.])^{1/2}$$

(llavors la forma $\mathcal{E}$ és una forma de Dirichlet.)

El benefici principal de l'eina d'extensió és que la teoria d'errors basada en les formes de Dirichlet s'estén en dimensió infinita, i s'aplica al càlcul d'errors en processos estocàstics (especialment el moviment Brownià però també en l'espai de Poisson), proporciona diversos resultats nous en equacions diferencials estocàstiques i dóna aplicacions a les fluctuacions en física i a l'anàlisi de sensitivitat en finances.[3]

4 Llenguatges amb eines d'extensió i paradoxa de Richard

Comparant la teoria axiomàtica de la probabilitat de Kolmogorov amb la teoria de les successions aleatòries, fins ara hem posat èmfasi en

- la presència d'un llenguatge (sintaxi i semàntica)
- una potent eina d'extensió produint, en algun sentit, resultats arriscats.

JULES ANTOINE RICHARD
(1862–1956)

3 Vegeu els llibres de Malliavin, Fukushima, Ikeda-Watanabe, Bismut, Bichteler-Gravereau-Jacod, Watanabe, Strook, Bouleau-Hirsch, Ma-Röckner, Nualart, Øksendal *et al.*, Ustunel-Zakai, etc. i els articles d'alguns centenars d'investigadors. Referent a la interpretació en termes de propagació d'errors vegeu [1].

Això es pot posar en analogia amb el llenguatge de l'Anàlisi que maneja els nombres reals. En efecte, sabem l'existència de $2^{\aleph_0}$ nombres reals, encara que només $\aleph_0$ poden ser descrits amb precisió. Aquesta és la situació que es posa de manifest en la paradoxa de Richard (1905).

Aquesta paradoxa es pot enunciar de la manera següent:

Escrivim totes les parelles que usen 28 caràcters (els 26 caràcters, l'espai i la coma per separar paraules) en ordre alfabètic; després les ternes, i així seguim amb totes les successions finites. Qualsevol definició d'un nombre real apareixerà a la llista.

Descartem totes les successions que no són definicions de nombres reals.

Sigui u_1 *el primer nombre real definit per la primera de les definicions que queden;* u_2 *el definit per la següent definició;* u_3 *el definit per la tercera i així successivament.*

D'aquesta manera obtenim tots els nombres reals que es poden definir amb un nombre finit de paraules, escrits en un ordre particular. El nombre a *donat per la definició «el nombre sense part entera, del qual cada decimal és el següent del decimal del mateix rang en la successió* (u_n)*, considerant el zero com a següent del número nou» hauria de ser a la llista, però no pot ser igual a cap nombre* u_n.

La lògica matemàtica és capaç, és clar, de salvar l'aparent contradicció en aquesta paradoxa. De tota manera, un fenomen real es posa de manifest: hi ha $2^{\aleph_0}$ nombres reals, no sabem com de gran en realitat és $2^{\aleph_0}$, i només $\aleph_0$ nombres poden ser definits amb precisió.

En aquesta situació, hem optat a l'anàlisi per un llenguatge amb una eina d'extensió: el criteri de Cauchy. Aquesta estratègia ens permet manejar nombres reals definits per límits sense tenir en compte la construcció de les successions convergents que s'usen. Aquesta eina s'ha portat des del cas real al cas funcional per les nocions d'espai de Hilbert i espai de Banach que certament són els conceptes més potents de l'anàlisi del segle XX.

Referències

[1] Bouleau, N. *Error Calculus for Finance and Physics, the Language of Dirichlet Forms*, De Gruyter, 235 p., 2003.

[2] Dellacherie, C. «Nombres au hasard de Borel». A: Martin Löf", *Gazette des Mathématiciens*, 11 (1978).

[3] Kolmogorov, A. N. «Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung». Math. Ann., 104 (1931), p. 415–458. Traducció anglesa a A. N. Shiryayev [ed.] (1986). Selected works of A. N. Kolmogorov, vol. II, p. 62–108.

[4] Kolmogorov, A. N. «Beitrage zur Masstheorie». Math. Ann., 107 (1933), p. 351–366.

[5] KOLMOGOROV, A. N. «Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozessen». Math. Ann., 108 (1933), p. 149–160. Traducció anglesa a A. N. Shiryayev [ed.] (1986). Selected works of A. N. Kolmogorov, vol. II, p. 156–168.

[6] KOLMOGOROV, A. N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse Der Mathematik, Berlin, 1933. Traducció anglesa a Foundations of the Theory of Probability, Nova York: Chelsea (1950).

[7] KOLMOGOROV, A. N. «Zur Theorie der Markoffschen Ketten». Math. Ann., 112 (1936), p. 155–160. Traducció anglesa a A. N. Shiryayev [ed.] (1986). Selected works of A. N. Kolmogorov, vol. II, p. 182–187.

[8] LÖF, M. «The definition of a random sequence», *Information and control*, 9 (1966), p. 602–619.

[9] POPPER, K. *The logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, 1972, p. 319.

[10] VON MISES, R. «Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung». *Math. Zeitung*, 5 (1919) p. 52–99.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
6 ET 8 AVENUE BLAISE PASCAL, CITÉ DESCARTES
77455 MARNE-LA-VALLÉE CEDEX 2, FRANCE
bouleau@enpc.fr