

Polinomis i coeficients de reflexió

JOSÉ LUIS DÍAZ-BARRERO I JUAN JOSÉ EGOZCUE RUBÍ

Resum

Els polinomis es solen representar o bé pels seus coeficients o bé pels seus zeros. Les dues representacions estan lligades per les fórmules de Cardano-Viète que expressen els coeficients com a funcions simètriques elementals dels zeros. La recursió descendent de Levinson defineix els coeficients de reflexió d'un polinomi. En aquest article es veu com es poden caracteritzar els polinomis en termes dels seus coeficients de reflexió, es donen resultats sobre polinomis autoreversos, que juguen un paper singular en aquesta representació, i es donen fórmules homòlogues a les de Cardano-Viète que relacionen zeros amb coeficients de reflexió. També es caracteritzen els polinomis de tipus Kakeya en termes de coeficients de reflexió, cosa que permet donar una demostració alternativa del teorema d'Eneström-Kakeya sobre la localització de zeros d'un polinomi.

Molts d'aquests desenvolupaments estan relacionats amb teoria de control i anàlisi de senyals. En aquest context, els texts clàssics de localització de zeros són recursius. Hi ha casos singulars en els quals el procés recursiu queda aturat i s'ha de recórrer a tècniques de pertorbació per continuar-los. Aquestes tècniques sempre funcionen però no estan en general ben fonamentades. Aquí es prova que els polinomis no singulars són densos, amb la norma L^2 , al disc unitat, cosa que dóna base matemàtica a les tècniques de pertorbació.

Paraules clau: coeficients de reflexió, localització de zeros de polinomis, recursió de Levinson.

Classificació AMS: 12D10, 26C05, 30C15.

1 Introducció

Clàssicament els polinomis han estat representats pels seus coeficients o mitjançant els seus zeros. La utilització dels coeficients permet estructurar els polinomis com un espai vectorial amb les operacions habituals on cal destacar la interpolació com a resultat cabdal d'aquesta representació. La representació mitjançant els zeros permet ampliar l'estructura i passar del grup additiu a l'anell de polinomis, on el resultat més important és el teorema fonamental de l'àlgebra. El nexse d'unió entre les dues representacions són les fórmules de Cardano-Viète: si $A(z)$ és un polinomi mònic a coeficients complexos i de grau n ,

$$A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k), \quad a_n = 1, \quad (1)$$

aleshores

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2)$$

Les aplicacions dels polinomis a l'anàlisi de senyals i en teoria de control han donat lloc a algorismes recurrents, l'objectiu dels quals és la localització de zeros en el cercle unitat o en el semiplà complex. La major part d'aquestes tècniques estan relacionades amb la recurrència de Schur-Cohn (1922), [5]. Entre les tècniques esmentades, la recurrència de Levinson (1947) va aparèixer independentment, [17], en problemes de disseny de filtres i més tard fou utilitzada amb èxit en l'anàlisi espectral de processos estocàstics estacionaris, [3].

La recurrència de Levinson fa servir els anomenats *coeficients de reflexió* per obtenir polinomis de manera recursiva. El nom de coeficients de reflexió prové de les seves aplicacions geofísiques en mitjans estratificats. No obstant això, aquest nom suggereix també la seva íntima relació amb la inversió geomètrica en el camp complex (pel que fa a la representació en zeros) i amb la reversió de polinomis (pel que fa a la representació en coeficients). Aquestes interrelacions dels coeficients de reflexió amb les dues representacions clàssiques suggereixen l'estudi dels polinomis des del punt de vista dels coeficients de reflexió.

L'objectiu que ens proposem en aquesta exposició és descriure una caracterització dels polinomis mitjançant llurs coeficients de reflexió així com algunes relacions que poden establir-se amb les representacions en zeros i coeficients. Concretament es presenta de manera explícita com s'escriuen els coeficients d'un polinomi en funció dels seus coeficients de reflexió. Es presenten alguns resultats, com el teorema de Rouché i el teorema de Kakeya, que caracteritzen l'existència de zeros d'un polinomi en certes regions del pla complex en termes dels coeficients de reflexió. Finalment es dona un teorema de densitat d'una classe de polinomis, que anomenarem $C[1]$, en el conjunt de

tots els polinomis respecte a la distància $L^2(|z| = 1)$; aquest resultat justifica l'ús de tècniques de pertorbació en la localització de zeros de polinomis.

Abans de donar la caracterització d'un polinomi en termes dels coeficients de reflexió introduïrem algunes notacions i resultats previs.

Sigui $A_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k$ un polinomi mònic a coeficients complexos de grau n ; el seu *recíproc*, $A_n^*(z)$, es defineix com

$$A_n^*(z) = z^n \overline{A_n(1/\bar{z})} = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{n,n-k} z^k, \quad (3)$$

on \bar{a} representa el nombre complex conjugat de a . Si existeix un número complex unitari u , tal que $A_n(z) = u A_n^*(z)$, direm que $A_n(z)$ és *autorevers* (o *autoinvers*). Observeu que els seus zeros estan o bé sobre la circumferència unitat o bé són simètrics respecte d'aquesta. Per exemple, el polinomi $A_3(z) = z^3 + \frac{7}{2}z^2 + \frac{7}{2}z + 1 = (z+1)(z+2)(z+1/2)$ és autorevers, mentre que $B_3(z) = z^3 + 4z^2 + \frac{1}{4}z + 1 = (z+4)(z-i/2)(z+i/2)$ no ho és.

Els coeficients de reflexió α_k del polinomi $A_n(z)$, també coneguts en la literatura com a paràmetres de Schur-Szegö, [6], o coeficients de correlació parcial, [15], es poden obtenir mitjançant l'anomenada *recurrència descendent de Levinson* (implícitament donada per Levinson en [17]; vegeu [21])

$$z A_{k-1}(z) = \frac{1}{1 - |\alpha_k|^2} [A_k(z) - \alpha_k A_k^*(z)], \quad (4)$$

on $\alpha_k = a_{k,0}$ i $A_{k-1}(z)$ és un polinomi de grau $k-1$. A partir de (4), i amb una mica d'àlgebra, s'obté la *recurrència ascendent de Levinson*

$$A_k(z) = z A_{k-1}(z) + \alpha_k A_{k-1}^*(z). \quad (5)$$

De les equacions (4) i (5) surten immediatament les expressions en coeficients de $A_{k-1}(z)$ i $A_k(z)$ que vénen donades per

$$A_{k-1}(z) = \frac{1}{1 - |\alpha_k|^2} \sum_{j=0}^{k-1} (a_{k,j+1} - \alpha_k \bar{a}_{k,k-1-j}) z^j$$

i

$$A_k(z) = \sum_{j=0}^k (a_{k-1,j-1} + \alpha_k \bar{a}_{k-1,k-1-j}) z^j$$

respectivament. Observeu que en l'última expressió tots els coeficients amb subíndex negatiu han estat considerats nuls.

Per exemple, en aplicar la recurrència descendent (4) al polinomi $A_3(z) = z^3 - \frac{11}{20}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{4}$, tenim

$$\begin{aligned} A_3(z) : & \quad 1 \quad -\frac{11}{20} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}, \\ \alpha_3 \cdot A_3^*(z) : & \quad \left(\alpha_3 = \frac{3}{4} \right) \quad \frac{9}{16} \quad -\frac{15}{40} \quad -\frac{33}{80} \quad \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Restant de la primera fila la segona i normalitzant en la potència de grau més alt, resulta

$$A_2(z) = z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}.$$

En aplicar una altra vegada la recurrència descendent, s'obté

$$A_2(z) : \quad 1 \quad -\frac{2}{5} \quad -\frac{1}{5},$$

$$\alpha_2 \cdot A_2^*(z) : \quad \left(\alpha_2 = -\frac{1}{5}\right) \quad \frac{1}{25} \quad \frac{2}{25} \quad -\frac{1}{5},$$

la qual, després de restar i normalitzar, genera el polinomi $A_1(z) = z - \frac{1}{2}$. Aplicant novament (4), tenim

$$A_1(z) : \quad 1 \quad -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_1 \cdot A_1^*(z) : \quad \left(\alpha_1 = -\frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2}.$$

Després de normalitzar, s'obté $A_0(z) = 1 = A_0^*(z)$. Els coeficients de reflexió de $A_3(z)$ són $[-1/2, -1/5, 3/4]$. Ara és fàcil reconstruir els coeficients del polinomi $A_3(z)$ a partir dels seus coeficients de reflexió emprant la recurrència ascendent (5). En efecte, si els coeficients de reflexió de $A_3(z)$ són $[-1/2, -1/5, 3/4]$, aleshores $A_0(z) = 1 = A_0^*(z)$, i aplicant (5), obtenim els polinomis

$$A_1(z) = zA_0(z) - \frac{1}{2}A_0^*(z) = z - \frac{1}{2}$$

$$A_2(z) = zA_1(z) - \frac{1}{5}A_1^*(z) = z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}$$

$$A_3(z) = zA_2(z) + \frac{3}{4}A_2^*(z) = z^3 - \frac{11}{20}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{4}.$$

Tancarem aquesta secció enunciant un conegut resultat, basat en el teorema de Rouché, que es fonamental en la teoria de polinomis i coeficients de reflexió ([1], [3], [20], [23]), i que farem servir més endavant.

1 TEOREMA *Sigui $A_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{nk}z^k$ un polinomi mònic a coeficients complexos i amb coeficients de reflexió $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Aleshores, $A_n(z)$ té tots els seus zeros dins del disc unitat si, i només si, $|\alpha_k| < 1$ per tot k amb $1 \leq k \leq n$.*

2 Caracterització i classificació de polinomis en coeficients de reflexió

Tot seguit, emprant la recurrència de Levinson, donarem la caracterització dels polinomis en coeficients de reflexió i, prenent aquesta com a base, els classificarem en classes d'equivalència.

2 DEFINICIÓ *La caracterització d'un polinomi $A_n(z)$ mitjançant llurs coeficients de reflexió ve donada per*

$$A_n(z) \equiv [A_j(z); \alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots, \alpha_n], \quad (6)$$

on $A_j(z)$ és un polinomi mònic de grau j unitari (és a dir, $|a_{j0}| = 1$) i no autorevers anomenat polinomi base. El polinomi $A_n(z)$ s'obté de $A_j(z)$ utilitzant la recurrència ascendent (5) amb els coeficients de reflexió $\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots, \alpha_n$.

Observem que la recurrència descendent (4) no es pot completar per a un polinomi $A_n(z)$ quan en un pas descendent, diguem $A_k(z)$, $k \leq n$, apareix un coeficient de reflexió unitari ($|\alpha_k| = 1$) i el procés ha de ser aturat. Tot i això, pot passar que existeixi algun polinomi de grau inferior, A_{k-1} , que permeti obtenir $A_k(z)$ mitjançant la recurrència ascendent (5) amb algun coeficient de reflexió adient α_k . Es poden presentar dos casos: *a)* el polinomi $A_k(z)$ és autorevers o *b)* el polinomi $A_k(z)$ no és autorevers. En el primer cas, el procés de baixada pot continuar-se com veurem més endavant, mentre que en el segon cas és impossible continuar el procés recursiu descendent i la caracterització pren la forma $[A_k(z); \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n]$. Així doncs, quan $|\alpha_k| \neq 1$ per $1 \leq k \leq n$, $A_j(z)$ en (6) esdevé $A_0(z) = 1$ i (6) s'anomena una caracterització pura en coeficients de reflexió.

Segons l'equació (4), cada polinomi de grau n amb coeficients de reflexió no unitaris pot ser caracteritzat per la seqüència $[1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, amb polinomi base $A_0(z) = 1$. A més, en aquest cas és fàcil veure que la caracterització és única.

Un cop establerta la unicitat de les caracteritzacions pures amb coeficients de reflexió no unitaris, sorgeix de manera natural la qüestió següent:

Què es pot fer quan un coeficient de reflexió unitari apareix abans de completar la recurrència descendent (4)?

La resposta, que ja hem avançat, és conseqüència del teorema de Rouché-Frobenius. Tot seguit enunciem aquest resultat, que és el més important d'aquesta secció.

3 TEOREMA *Tot polinomi $A_n(z)$ pot ser caracteritzat en coeficients de reflexió mitjançant (6). La caracterització s'obté aplicant la recurrència descendent (4) fins a trobar un coeficient de reflexió unitari. Si el procés acaba en el polinomi $A_0(z) = 1$, la representació és única; si acaba en $A_j(z)$, $1 < j \leq n$, essent $|\alpha_j| = 1$ i $A_j(z)$ no autorevers, la representació també es única; finalment, si el procés descendent s'atura amb $|\alpha_k| = 1$ i $A_k(z)$ autorevers, el procés descendent pot continuar-se sense unicitat fins a arribar a $A_0(z) = 1$ amb coeficients de reflexió entre els quals n'hi ha almenys un que no és unitari.*

Il·lustrarem el resultat anterior considerant alguns exemples. Aplicant (4) al polinomi $A_4(z) = z^4 + 2,2z^3 + 2,52z^2 + 2,12z + 0,8$, resulta

$$zA_3(z) = \frac{1}{1 - |\alpha_4|^2} [A_4(z) - \alpha_4 A_4^*(z)] = z(z^3 + 1,4z^2 + 1,4z + 1).$$

És a dir, $A_3(z) = z^3 + 1, 4z^2 + 1, 4z + 1$. Ara tenim infinites maneres de continuar el procés, com per exemple a [5], fent servir la derivada resulta

$$\hat{A}_2(z) = \frac{1}{3}A_3'(z) = z^2 + 0, 9\bar{3}z + 0, 4\bar{6}.$$

A partir de $\hat{A}_2(z)$ recuperem $A_3(z)$ emprant la recurrència ascendent (5) amb coeficient de reflexió 1. En general el procediment per a obtenir $A_2(z)$ a partir de $A_3(z)$ consisteix a considerar el polinomi genèric $A_2(z) = z^2 + a_{21}z + a_{20}$ i aplicar (5), amb $\alpha_3 = 1$. S'obté

$$A_3(z) = z^3 + (a_{21} + a_{20})z^2 + (a_{20} + a_{21})z + 1 = z^3 + 1, 4z^2 + 1, 4z + 1.$$

Per tant, hi ha infinits polinomis que permeten obtenir $A_3(z)$ amb la recurrència ascendent i $\alpha_3 = 1$, essent l'única condició $a_{21} + a_{20} = 1, 4$. Per exemple, els polinomis $z^2 + 0, 8z + 0, 6$, $z^2 + 0, 7z + 0, 7$ o $z^2 + 1, 4$ també verifiquen aquesta condició i produeixen $A_3(z)$ amb $\alpha_3 = 1$.

En canvi, el polinomi $A_4(z) = z^4 + 1, 1z^3 + 1, 35z^2 + 1, 3z + 0, 5$, només pot provenir del polinomi unitari i no autorevers $A_3(z) = z^3 + 0, 6z^2 + 0, 9z + 1$. En efecte, si apliquem la recurrència (5) i identificant coeficients d'igual potència s'obté el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a_{21} + a_{20} &= 0, 6, \\ a_{21} + a_{20} &= 0, 9. \end{aligned}$$

Clarament aquest sistema és incompatible i, per tant, la caracterització en coeficients de reflexió és

$$A_4(z) = [A_3(z); 0, 5],$$

i és única.

El teorema 3 permet classificar el conjunt $\mathbb{C}[z]$ de tots els polinomis mònicos a coeficients complexos segons el seu polinomi base. Anomenarem representant canònic $A_j(z)$ d'una classe qualsevol polinomi unitari de $\mathbb{C}[z]$ no autorevers i definirem

$$C(A_j) = \left\{ A_k(z) \in \mathbb{C}[z] : A_k(z) \equiv [A_j(z); \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_k], \right. \\ \left. |\alpha_s| \neq 1, j + 1 \leq s \leq k \right\}, \quad (7)$$

on $j \leq k$ i $\alpha_s \in \mathbb{C}$. Així, la classe $C(1)$ és la que conté tots els polinomis que es poden obtenir a partir de $A_0(z) = 1$ aplicant la recurrència ascendent (5) i qualsevol seqüència de coeficients de reflexió. És a dir,

$$C(1) = \{A_k(z) \in \mathbb{C}[z] : A_k(z) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k], 1 \leq k\}. \quad (8)$$

Direm que dos polinomis mònicos $A_j(z)$ i $B_k(z)$ són equivalents si les seves representacions tenen el mateix polinomi base.

Segons el teorema 3, cada polinomi pertany a una sola classe i cadascuna d'elles $C(A_j)$ conté el seu representant canònic. Aquests representants canònics són polinomis unitaris i no autoreversos. Observeu que no hi ha polinomis unitaris no autoreversos de graus 1 o 2. A més, tots els polinomis autoreversos pertanyen a la classe $C(1)$.

S'ha d'assenyalar que en la literatura referent als coeficients de reflexió, els polinomis utilitzats habitualment pertanyen a la classe $C(1)$, i sovint els estudis es restringeixen a aquells polinomis amb coeficients de reflexió de mòdul més petit que la unitat.

3 Algunes conseqüències de la caracterització

Fins ara hem estudiat la caracterització de polinomis en coeficients de reflexió i hem classificat els polinomis segons aquesta caracterització. Ara ens proposem estudiar algunes relacions entre els coeficients o els zeros d'un polinomi i els seus coeficients de reflexió. S'obtenen expressions homòlogues a les fórmules de Cardano-Viète, s'aprofundeix una mica més en l'estudi dels polinomis autoreversos i finalment es dóna una prova utilitzant coeficients de reflexió del ben conegut teorema d'Eneström-Kekeya.

3.1 Relació entre coeficients i coeficients de reflexió

Tal com hem esmentat abans, el nexa d'unió entre les representacions clàssiques dels polinomis a través de zeros i de coeficients són les fórmules de Cardano-Viète (2) que permeten expressar els coeficients com a funcions simètriques elementals dels zeros. Tot seguit, i com a conseqüència de la recurrència de Levinson, escriurem unes fórmules homòlogues a les de Cardano-Viète que expressen els coeficients d'un polinomi en termes dels seus coeficients de reflexió, [7].

Per a obtenir les esmentades fórmules partim de la base que cada coeficient de $A_n(z)$ és una suma de $\binom{n}{k}$ termes, cadascun dels quals està format per un producte de coeficients de reflexió i dels seus conjugats. Per al coeficient $a_{n,k}$, la forma particular de cadascun d'aquests productes és tal que la suma dels subíndexs dels coeficients de reflexió que hi intervenen és $n - k$, on es consideren els subíndexs negatius si el coeficient de reflexió apareix conjugat. A més, els subíndexs dels coeficients de reflexió no es repeteixen en un terme donat.

Per a formalitzar aquesta expressió, considerarem el conjunt

$$\Omega_n^* = \{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset\},$$

format pels subconjunts no buits dels n primers números naturals, que identificarem amb el conjunt d'índexs dels coeficients de reflexió.

Per a cada subconjunt $I \in \Omega_n^*$, denotem per $\sigma_I : I \rightarrow \{1, \dots, n\}$ l'aplicació que a cada element li assigna la seva posició en l'ordenació descendent dels

elements de I , és a dir, $\sigma_I(i) = |\{j \in I : j \geq i\}|$. Per a cada $k = 0, 1, \dots, n-1$, definim

$$\Omega_{n,k} = \{I \in \Omega_n^* : \sum_{i \in I} (-1)^{\sigma_I(i)+1} i = n - k\},$$

és a dir, la família de conjunts pels quals la suma alternada d'elements és igual a $n - k$, essent l'element més gran el que apareix amb signe positiu.

És clar que $\mathcal{P} = \{\Omega_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$ és una partició de Ω_n^* . A més, el nombre d'elements a $\Omega_{n,k}$ és $\binom{n}{n-k}$.

Ara enunciem el resultat següent, que pot establir-se per inducció:

4 TEOREMA *Sigui $A_n(z)$ un polinomi mònic a coeficients complexos que es pot obtenir aplicant la recurrència descendent de Levinson (5) a partir de $A_0(z) = 1$ amb coeficients de reflexió $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Aleshores,*

$$a_{n,k} = \sum_{I \in \Omega_{n,k}} \prod_{i \in I_1} \alpha_i \prod_{i \in I_0} \bar{\alpha}_i, \quad (9)$$

on $I_0 = \{i \in I : \sigma_I(i) \text{ és parell}\}$ i $I_1 = \{i \in I : \sigma_I(i) \text{ és senar}\}$.

Per a familiaritzar-se amb el teorema anterior donarem un exemple. Considerem el polinomi mònic $A_4(z)$ amb coeficients de reflexió $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Volem expressar els coeficients $a_{4,0}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}$ en termes dels α_k i dels seus conjugats. Per a obtenir aquestes expressions explícites, escrivim

$$\begin{aligned} \Omega_{4,0} &= \{4\}, \\ \Omega_{4,1} &= \{3, 41, 421, 432\}, \\ \Omega_{4,2} &= \{2, 31, 42, 321, 431, 4321\}, \\ \Omega_{4,3} &= \{1, 21, 32, 43\}, \end{aligned}$$

i, aplicant el teorema 4,

$$\begin{aligned} a_{4,0} &= \alpha_4, \\ a_{4,1} &= \alpha_3 + \bar{\alpha}_1 \alpha_4 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_4 + \alpha_2 \bar{\alpha}_3 \alpha_4, \\ a_{4,2} &= \alpha_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_3 + \bar{\alpha}_2 \alpha_4 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_3 + \alpha_1 \bar{\alpha}_3 \alpha_4 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2 \bar{\alpha}_3 \alpha_4, \\ a_{4,3} &= \alpha_1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \alpha_3 + \bar{\alpha}_3 \alpha_4. \end{aligned}$$

3.2 Zeros i coeficients de reflexió

En aquest apartat ens centrarem en els efectes que tenen sobre els zeros certes operacions realitzades sobre tots o part dels coeficients de reflexió. En primer lloc, analitzarem els efectes sobre els zeros de la conjugació dels coeficients de reflexió.

5 TEOREMA *La conjugació dels coeficients de reflexió produeix la conjugació dels zeros. És a dir, si*

$$A_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_{nk}) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \cdot s, \alpha_n],$$

llavors

$$\overline{A_n(\bar{z})} = \prod_{k=1}^n (z - \bar{z}_{nk}) \equiv [1; \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \cdot s, \overline{\alpha_n}].$$

La relació entre conjugació i inversió és el contingut del teorema següent:

6 TEOREMA *Sigui $A_n(z)$ un polinomi mònic i a coeficients complexos; llavors,*

$$\left[\overline{A_n(\bar{z})} \right]^* = \overline{A_n^*(\bar{z})}.$$

També es poden descriure els efectes sobre els zeros d'algunes rotacions sobre els coeficients de reflexió. El resultat següent s'estableix fàcilment per inducció.

7 TEOREMA *Siguin $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ els zeros de $A_n(z) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$. Aleshores, el polinomi*

$$B_n(z) \equiv [1; \alpha_1 e^{i\theta}, \alpha_2 e^{i2\theta}, \dots, \alpha_n e^{in\theta}]$$

té per zeros $\zeta_1 e^{i\theta}, \zeta_2 e^{i\theta}, \dots, \zeta_n e^{i\theta}$.

Una conseqüència immediata del resultat anterior és el corollari següent:

8 COROLLARI *Si $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ són els zeros del polinomi*

$$A_n(z) \equiv [A_j(z); \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n],$$

llavors,

$$B_n(z) \equiv [e^{ij\theta} A_j(z e^{-i\theta}); e^{i(j+1)\theta} \alpha_{j+1}, \dots, e^{in\theta} \alpha_n]$$

té per zeros $\zeta_1 e^{i\theta}, \zeta_2 e^{i\theta}, \dots, \zeta_n e^{i\theta}$.

3.3 Polinomis autoreversos i coeficients de reflexió

Com hem vist a la secció 2, un polinomi autorevers $A_n(z)$ es pot obtenir mitjançant la recurrència ascendent (5) a partir de polinomis de grau $n - 1$. Una pràctica habitual consisteix a obtenir-lo a partir de la seva derivada ([5], [13]). Aquest resultat, que és d'utilitat quan es treballa amb els comptadors clàssics de zeros, s'enuncia com segueix:

9 TEOREMA *Cada polinomi autorevers es pot obtenir a partir de la seva derivada, normalitzada a polinomi mònic, aplicant la recurrència ascendent (5) amb coeficients de reflexió apropiats.*

A continuació, proposem de manera explícita una alternativa al resultat anterior [9]. En aquest procediment s'utilitzaran els coeficients de reflexió com a funcions explícites dels zeros de $A_n(z)$.

10 TEOREMA *Sigui $A_n(z)$ un polinomi autorevers i sigui $\zeta_r, |\zeta_r| = 1$ una arrel de $A_n(z)$ sobre la circumferència unitat. Aleshores,*

$$A_n(z) = zA_{n-1}(z) + \alpha_n A_{n-1}^*(z),$$

on $A_{n-1}(z) = A_n(z)/(z - \zeta_r)$ i $\alpha_n = -\zeta_r \alpha_{n-1}$.

DEMOSTRACIÓ: Donat que els zeros dels polinomis autoreversos estan o bé sobre la circumferència unitat $|z| = 1$ o bé són simètrics respecte d'aquesta, podem escriure la factorització de $A_n(z)$ com

$$A_n(z) = \prod_{j=1}^r (z - \zeta_j) \prod_{k=1}^s (z - \zeta_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right), \quad (10)$$

on $|\zeta_j| = 1$ per $1 \leq j \leq r$ i $|\zeta_k| < 1$ per $1 \leq k \leq s$ amb $r + 2s = n$.

Fent $A_{n-1}(z) = \prod_{j=1}^{r-1} (z - \zeta_j) \prod_{k=1}^s (z - \zeta_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right)$, tenim

$$A_{n-1}^*(z) = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{r-1} \bar{\zeta}_j \prod_{j=1}^{r-1} (z - \zeta_j) \prod_{k=1}^s (z - \zeta_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) = \bar{\alpha}_{n-1} A_{n-1}(z)$$

i

$$\begin{aligned} zA_{n-1}(z) + \alpha_n A_{n-1}^*(z) &= zA_{n-1}(z) + \alpha_n \bar{\alpha}_{n-1} A_{n-1}(z) \\ &= (z + \alpha_n \bar{\alpha}_{n-1}) A_{n-1}(z). \end{aligned} \quad (11)$$

De les equacions (10) i (11), s'obté

$$(z - \zeta_r) A_{n-1}(z) = (z + \alpha_n \bar{\alpha}_{n-1}) A_{n-1}(z). \quad (12)$$

Donat que α_{n-1} és unitari, de l'equació (12) s'obté $\alpha_n = -\zeta_r \alpha_{n-1}$ i hem acabat. \square

De manera similar al teorema anterior, es pot obtenir un polinomi autorevers $A_n(z)$ d'un altre de grau $n - 2$ amb la recurrència ascendent quan $A_n(z)$ té alguna arrel fora de la circumferència unitat.

11 TEOREMA *Sigui $A_n(z)$ un polinomi autorevers i $\zeta_s = r_s e^{i\theta_s}$ una arrel de $A_n(z)$ amb $r_s < 1$. Aleshores, $A_n(z)$ es pot obtenir a partir de $A_{n-2}(z) = A_n(z)/(z - z_s)(z - 1/\bar{z}_s)$ aplicant la recurrència ascendent (5) dues vegades amb coeficients de reflexió*

$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{2} e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \alpha_{n-2} \quad i \quad \alpha_n = e^{i2\theta_s} \alpha_{n-2}.$$

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $A_n(z)$ factoritza en la forma

$$A_n(z) = \prod_{j=1}^r (z - \zeta_j) \prod_{k=1}^s (z - \zeta_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right),$$

on $|\zeta_j| = 1$, $|\zeta_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, s$ i $r + 2s = n$. Veurem que existeixen dos coeficients de reflexió α_{n-1} i α_n tals que

$$A_n(z) = A_{n-2}(z)B_2(z),$$

on

$$A_{n-2}(z) = \prod_{j=1}^r (z - \zeta_j) \prod_{k=1}^{s-1} (z - \zeta_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right)$$

i

$$\begin{aligned} B_2(z) &= (z - \zeta_s) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_s} \right) = (z - r_s e^{i\theta_s}) \left(z - \frac{1}{r_s} e^{i\theta_s} \right) \\ &= z^2 - e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) z + e^{i2\theta_s}; \end{aligned}$$

es pot obtenir a partir de $A_{n-2}(z)$ aplicant la recurrència ascendent (5) amb coeficients de reflexió α_{n-1} i α_n . Per fer-ho, en la primera iteració prenem $\alpha_{n-1} = -\frac{1}{2}e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \alpha_{n-2}$ i s'obté

$$A_{n-1}(z) = zA_{n-2}(z) - \frac{1}{2}e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \alpha_{n-2} A_{n-2}^*(z). \quad (13)$$

Donat que

$$A_{n-2}^*(z) = \bar{\alpha}_{n-2} \prod_{j=1}^r (z - \zeta_j) \prod_{k=1}^{s-1} (z - \zeta_k) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) = \bar{\alpha}_{n-2} A_{n-2}(z),$$

aleshores (13) s'escriu com

$$\begin{aligned} A_{n-1}(z) &= zA_{n-2}(z) - \frac{1}{2}e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \alpha_{n-2} \bar{\alpha}_{n-2} A_{n-2}(z) \\ &= A_{n-2}(z) \left\{ z - \frac{1}{2}e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Abans d'executar la recurrència ascendent altra vegada, observem que

$$\begin{aligned} A_{n-1}^*(z) &= z^{n-1} \overline{A_{n-2}(1/\bar{z})} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{2}e^{-i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \right\} \\ &= z^{n-2} \overline{A_{n-2}(1/\bar{z})} \left\{ 1 - \frac{1}{2}e^{-i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) z \right\} \\ &= \bar{\alpha}_{n-2} A_{n-2}(z) \left\{ 1 - \frac{1}{2}e^{-i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) z \right\}. \end{aligned}$$

Ara prenem $\alpha_n = e^{i2\theta_s} \alpha_{n-2}$ i apliquem (5) una altra vegada, i obtenim

$$\begin{aligned} A_n(z) &= zA_{n-2}(z) \left\{ z - \frac{1}{2} e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) \right\} + \\ &\quad + e^{i2\theta_s} \alpha_{n-2} \bar{\alpha}_{n-2} A_{n-2}(z) \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^{-i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) z \right\} \\ &= A_{n-2}(z) \left\{ z^2 - e^{i\theta_s} \left(r_s + \frac{1}{r_s} \right) z + e^{i2\theta_s} \right\} = A_{n-2}(z) B_2(z). \end{aligned}$$

Això completa la prova. □

3.4 Caracterització de polinomis de tipus Kakeya

Finalment, caracteritzarem en coeficients de reflexió els polinomis els coeficients dels quals formen una successió monòtona. En conseqüència, donarem una prova alternativa del teorema d'Eneström-Kakeya, enunciat primer per Eneström el 1893 i més tard, de manera equivalent, per Kakeya el 1912.

El teorema de Kakeya és un resultat referent a polinomis $A_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ tals que els seus coeficients són nombres reals que verifiquen $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$, que anomenarem *polinomis de tipus Kakeya* [8]. El resultat següent els caracteritza en termes de coeficients de reflexió.

12 TEOREMA *Sigui $A_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $n > 1$, un polinomi mònic de tipus Kakeya; aleshores la seva caracterització en coeficients de reflexió és $A_n(z) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n]$, on $\alpha_k < 1$, $1 \leq k \leq n-1$, i $\alpha_n > 1$.*

Una conseqüència immediata del teorema anterior és el resultat següent, conegut a la literatura com el teorema d'Eneström-Kakeya ([14], [11]):

13 TEOREMA (TEOREMA DE KAKEYA) *Sigui $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $n \geq 1$, un polinomi a coeficients reals, tals que $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$. Aleshores, $A(z)$ no té zeros interiors al disc unitat $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$.*

Per a establir aquest resultat es necessita el lema següent:

14 LEMA *Sigui $[1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n]$ la caracterització del polinomi $A_n(z)$ en coeficients de reflexió. Aleshores la caracterització del polinomi $\frac{1}{\alpha_n} A_n^*(z)$ és*

$$\frac{1}{\alpha_n} A_n^*(z) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1/\bar{\alpha}_n].$$

DEMOSTRACIÓ: Sense pèrdua de generalitat suposarem que $A(z)$ és mònic. Segons el teorema 12, la caracterització en coeficients de reflexió de $A(z)$

és $A(z) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n]$ amb $\alpha_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ i $\alpha_n > 1$. Aleshores, aplicant el lema 14, resulta que $A^*(z) \equiv [1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1/\alpha_n]$ té tots els seus coeficients de reflexió de mòdul més petit que la unitat. Aquest resultat, juntament amb el teorema 1, ens porta a la conclusió que tots els zeros de $A^*(z)$ són interiors al cercle unitat. Per tant, els zeros de $A(z)$ són fora del cercle unitat i el teorema queda provat. \square

El teorema 13, establert per Kakeya el 1912 fou precedit per un resultat equivalent i en cert sentit més útil, enunciat per Eneström el 1893, [12]:

15 TEOREMA (TEOREMA D'ENESTRÖM) *Sigui $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $n \geq 1$, un polinomi amb coeficients reals tals que $a_k > 0$ per cada k . Aleshores, tots els zeros de $A(z)$ són a la corona circular*

$$\alpha = \min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \beta.$$

DEMOSTRACIÓ: En efecte, el resultat surt immediatament aplicant el teorema 13 a $A(\alpha z)$ i $z^n A(\beta/z)$. \square

4 Pertorbació de coeficients de reflexió. Teorema de densitat

El problema de la distribució dels zeros d'un polinomi és habitual trobar-lo en molts texts d'enginyeria i les seves aplicacions, on és àmpliament discutit i analitzat, especialment en la teoria de sistemes i en control automàtic. Un dels primers desenvolupaments sistemàtics per a investigar la distribució dels zeros reals d'un polinomi fou presentat per Sturm, [24], el 1829. Posteriorment, i amb referència a l'estudi de l'estabilitat asimptòtica d'una equació lineal en diferències, el nombre de zeros interiors al cercle unitat fou determinat per Schur i Cohn, [5], i més tard obtingut per Marden, [18], Jury, [13], i Riable, [22].

Un problema comú que sorgeix quan s'apliquen els texts clàssics per a la localització dels zeros de polinomis és l'aparició dels anomenats *casos singulars*, en què les recurrències descendents habitualment s'aturen ([13], [16], [2]). Per a superar aquestes situacions, a la literatura es troben alguns procediments que fan servir polinomis i coeficients, [4]. Per exemple, una pertorbació dels coeficients és sovint utilitzada justificant-la amb arguments de continuïtat. En canvi, s'ha de tenir present que la continuïtat dels zeros com a funcions dels coeficients no significa que petites pertorbacions als coeficients sempre permetin obtenir un polinomi no singular. A més de la continuïtat, un teorema de densitat és fa necessari per a assegurar que sempre hi ha polinomis no singulars propers als polinomis singulars.

Fins on nosaltres hem pogut arribar, a la literatura no hi ha resultats sobre densitat utilitzant polinomis i coeficients de reflexió per a justificar aquestes tècniques de pertorbació. En aquesta secció presentarem un teorema de

densitat quan s'utilitzen coeficients de reflexió i la recurrència descendent de Levinson, [10]. Aquest teorema estableix que, per a qualsevol polinomi, existeix un polinomi no singular (en el sentit de la recurrència de Levinson) tan proper a ell (en el sentit de la norma L^2 en $|z| = 1$) com desitgem.

Abans d'enunciar el teorema de densitat donarem un resultat previ que relaciona les distàncies entre els polinomis $A_n(z), B_n(z)$, i les distàncies entre els dos polinomis $A_{n+1}(z), B_{n+1}(z)$, obtinguts a partir dels anteriors aplicant la recurrència de Levinson amb el mateix coeficient de reflexió α_{n+1} .

16 TEOREMA *Siguin $A_n(z)$ i $B_n(z)$ dos polinomis de grau n i siguin $A_{n+1}(z) = [A_n(z); \alpha_{n+1}]$ i $B_{n+1}(z) = [B_n(z); \alpha_{n+1}]$; aleshores*

$$d(A_{n+1}, B_{n+1}) \leq (1 + |\alpha_{n+1}|)d(A_n, B_n), \quad (14)$$

on $d(\cdot, \cdot)$ representa la distància L^2 a l'espai de Hilbert $L^2(|z| = 1)$.

DEMOSTRACIÓ: La desigualtat anterior és una conseqüència directa de les propietats de la norma L^2 . En efecte, si apliquem la recurrència ascendent (5) als polinomis $A_n(z)$ i $B_n(z)$, resulta

$$\begin{aligned} A_{n+1}(z) &= zA_n(z) + \alpha_{n+1}A_n^*(z) = zA_n(z) + \alpha_{n+1}z^n\overline{A_n(1/\bar{z})}, \\ B_{n+1}(z) &= zB_n(z) + \alpha_{n+1}B_n^*(z) = zB_n(z) + \alpha_{n+1}z^n\overline{B_n(1/\bar{z})}, \end{aligned}$$

i

$$d(A_{n+1}, B_{n+1}) = \|A_{n+1} - B_{n+1}\| \leq \|z(A_n - B_n)\| + \|\alpha_{n+1}(A_n^* - B_n^*)\|.$$

Ara, si tenim en compte que $\|z(A_n - B_n)\| = \|A_n - B_n\| = \|A_n^* - B_n^*\|$, la desigualtat (14) surt immediatament i això completa la prova. \square

El resultat anterior és clau per a provar la densitat de la classe $C[1]$ en el conjunt de tots els polinomis. En altres paraules, cada polinomi és tan proper, en el sentit de la distància L^2 , a un de la classe $C[1]$ com desitgem. El teorema de densitat es pot enunciar com segueix.

17 TEOREMA *Sigui $A_n(z) \in \mathbb{C}[z]$. Aleshores, per tot $\epsilon > 0$, existeix un polinomi $B_n(z) \equiv [1; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, tal que $d(A_n, B_n) < \epsilon$.*

Formalment, la prova es basa en un procediment iteratiu finit i constructiu. Fixat $\epsilon > 0$ i els valors $\delta_m > 0$, $-\pi < \theta_m \leq \pi$, $m = 1, 2, \dots, n$, de manera que

$$|\delta_1 e^{i\theta_1} + \delta_2 e^{i\theta_2} + \dots + \delta_n e^{i\theta_n}| < \epsilon,$$

es tracta de trobar un polinomi $B_n(z) = A_n^{(m)}$ que compleixi les condicions de l'enunciat. Per a fer-ho s'estableix el procediment següent:

1. Encetem el procés amb $A_n^{(0)}(z) = A_n(z)$, al qual s'aplica la recurrència descendent, i s'obtenen els coeficients de reflexió $\alpha_{n-s}^{(0)} = \alpha_{n-s}$ per $s = 0, 1, \dots$, fins que es trobi $|\alpha_{n-k}| = 1$ i $A_{n-k}(z)$ no autorevers. Si $n - k = 0$ el procés finalitza amb $A_n^{(0)}(z) = A_n(z)$ perquè $A_n(z) \in C[1]$. Si $n - k = j > 0$, es posa $j = n - k$, $k = 0$, $m = 1$ i es passa a 2.
2. Definim $A_j^{(m)}(z) = A_j^{(m-1)}(z) + \delta_m e^{i\theta_m}$, $\alpha_{j+s}^{(m)} = \alpha_{j+s}^{(m-1)}$ per $s = 1, 2, \dots, n - j$, i anem a 3.
3. Apliquem la recurrència descendent a $A_j^{(m)}$, k vegades, fins que aparegui $\alpha_{j-k}^{(m)}$ unitari i $A_{j-k}^{(m)}(z)$ sigui no autorevers. Si $j < n$ es construeix $A_n^{(m)}$ per recurrència ascendent amb els coeficients de reflexió $\alpha_{j+s}^{(m)}$, $s = 1, 2, \dots, n - j$. Si $j - k = 0$ i, per tant, $\alpha_0^{(m)} = 1$, acabem amb $A_n^{(m)} \in C[1]$. Si $j - k > 0$, passem a 2 posant $j \leftarrow j - k$, $m \leftarrow m + 1$, $k \leftarrow 0$.

Esquemàticament, la prova es pot sintetitzar com segueix:

α_n	$A_n^{(0)}(z)$	α_n	$A_n^{(1)}(z)$	α_n	$A_n^{(2)}(z)$	$\cdot s$
α_{n-1}	$A_{n-1}^{(0)}(z)$	α_{n-1}	$A_{n-1}^{(1)}(z)$	α_{n-1}	$A_{n-1}^{(2)}(z)$	$\cdot s$
α_{n-2}	$A_{n-2}^{(0)}(z)$	α_{n-2}	$A_{n-2}^{(1)}(z)$	α_{n-2}	$A_{n-2}^{(2)}(z)$	$\cdot s$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
α_{n-k}	$A_{n-k}^{(0)}(z)$	$\alpha_{n-k}^{(1)}$	$A_{n-k}^{(1)}(z)$	$\alpha_{n-k}^{(1)}$	$A_{n-k}^{(2)}(z)$	$\cdot s$
La recurrència descendent no es pot aplicar		$\alpha_{n-k-1}^{(1)}$	$A_{n-k-1}^{(1)}(z)$	$\alpha_{n-k-1}^{(1)}$	$A_{n-k}^{(2)}(z)$	$\cdot s$
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
		$\alpha_{n-j}^{(1)}$	$A_{n-j}^{(1)}(z)$	$\alpha_{n-j}^{(2)}$	$A_{n-j}^{(2)}(z)$	$\cdot s$
				\vdots	\vdots	\vdots
						1

on $A_n^{(0)}(z) = A_n(z)$, $|\alpha_{n-k}| = |\alpha_{n-k}^{(1)}| = 1$ i $\alpha_{n-k}^{(1)} = \alpha_{n-k} + \delta_1 e^{i\theta_1}$, $\alpha_{n-j}^{(2)} = \alpha_{n-j}^{(1)} + \delta_2 e^{i\theta_2}$, i així successivament. Finalment, s'obté $B_n(z) = A_n^{(m)}$ quan en el pas m s'ha arribat a baixar fins al polinomi 1.

El procediment descrit és finit. La pertorbació del pas 2,

$$A_j^{(m)}(z) = A_j^{(m-1)}(z) + \delta_m e^{i\theta_m},$$

garanteix que la recurrència descendent del pas 3 es pot realitzar, almenys una vegada, per $m = 1, 2, 3, \dots$. Per tant, j disminueix almenys una unitat en cada cicle, garantint que $j - k$ en el pas 3 arribarà a ser nul i acabarà el procés.

El polinomi resultant $B_n(z) = A_n^{(m)}(z)$ dista de $A_n(z)$ menys de ϵ a causa de l'elecció adient dels valors de pertorbació δ_m d'acord amb el teorema 16.

Aquest resultat estableix la densitat de la classe $C[1]$ en el conjunt de tots els polinomis i mostra explícitament un procediment de pertorbació per a superar els anomenats tradicionalment *casos singulars* lligats al problema del cercle unitat.

Referències

- [1] ASTROM, K. J. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, 1970.
- [2] BARNETT, S. *Polynomials in Control Theory*. Nova York i Basilea: Marcel Dekker, 1983.
- [3] BURG, J. P. *Maximum Entropy Spectral Analysis*. [Tesis doctoral]. Stanford CA.: Stanford University, 1975.
- [4] CHAPPELLAT, H.; MANSOUR, M.; BHATTACHARYYA, S. P. «Elementary Proof of Some Classical Stability Criteria». *IEEE Trans. on Education*, vol. 33 (1990), 232-239.
- [5] COHN, A. «Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise». *Math. Z*, 14 (1922), 110-148.
- [6] CONSTANTINESCU, T. *Schur Parameters, Factorization and Dilation Problems*. Basilea: Birkhäuser-Verlag, 1996.
- [7] DÍAZ-BARRERO, J. L.; EGOZCUE, J. J. «Reflection Coefficients Counterpart of Cardan-Viète Formulas». *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49 (2001), 1745-1747.
- [8] DÍAZ-BARRERO, J. L.; EGOZCUE, J. J. «On the Eneström-Kakeya Theorem». *Octagon Mathematical Magazine*, vol. 11, núm. 1 (2003), 6-10.
- [9] DÍAZ-BARRERO, J. L.; EGOZCUE, J. J. «Characterization of Polynomials Using Reflection Coefficients». *Applied Mathematics E-Notes*, vol. 4 (2004), 114-121.
- [10] DÍAZ-BARRERO, J. L.; EGOZCUE, J. J. «On Perturbed Reflection Coefficients». *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (2005) (submitted).
- [11] DIEUDONNÉ, J. *La théorie analytique des polynomes d'une variable à coefficients quelconques*. Mémoires des Sciences Mathématiques. Paris: Gauthiers Villars, 1938.
- [12] ENESTRÖM, G. «Härledning af en allmän formel for antallet af rødder...». *Öfv. af Kungl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar* [Estocolm], núm. 6, (1893), 405-415. Traducció al francès d'un article suec: «Remarque sur un théorème relatif aux racines de l'équation $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ où tous les coefficients sont réels et positifs», *Tôhoku Math. J.*, 18 (1920), 34-36.
- [13] JURY, E. I. *Theory and Applications of the z-Transform Method*. Florida: Krieger Publishing Company, 1964.

- [14] KAKEYA, S. «On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients». *Tôhoku Math. J.*, 2 (1912), 140–142.
- [15] KAY, S. M. *Modern Spectral Estimation*. Nova Jersey: Prentice Hall, 1988.
- [16] KUO, B. C. *Digital Control Systems*. Illinois: SRL Publishing Co, Champaign, 1977.
- [17] LEVINSON, N. «The Wiener rms (root mean square) error criterion in filter design and prediction». *J. Math. Phys.*, 25 (1947), 261–278.
- [18] MARDEN, M. «Geometry of Polynomials». *Math. Surveys* [Providence: Amer. Math. Soc.], 3 (1966).
- [19] MITRINOVIC, D.; MILOVANOVIC, G.; RASSIAS, TH. M. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities and Zeros*. Singapur: World Scientific, 1994.
- [20] PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. Singapur: McGraw Hill, 1991.
- [21] PICINBONO, B.; BENIDIR, M. «Some Properties of Lattice Autoregressive Filters». *IEEE Trans. on Acoust. Speech Signal Process.*, vol. ASSP-34 (1986), 342–349.
- [22] RIABLE, R. H. «A simplification of Jury's tabular form». *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19 (1974), 248–250.
- [23] TREITEL, S.; ULRYCH, T. J. «A new Proof of the Minimum-Phase Property of the Unit Prediction Error Operator». *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-27, 1 (1979), 99–100.
- [24] STURM, C. «Analyse d'une mémoire sur la résolution des équations numériques». *Bull. Sci. Math. Ferrussac*, vol. II (1829), 419–422.
- [25] VIÈTE, F. *Opera Mathematica*. Leiden, 1646.

MATEMÀTICA APLICADA III
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
JORDI GIRONA 1-3, C2,
08034 BARCELONA
jose.luis.diaz@upc.edu
juan.jose.egozcue@upc.edu