

## Polinomis positius i desigualtats polinomials\*

CARLOS ANDRADAS

### Resum

La caracterització dels polinomis positius sobre tot l'espai afí  $\mathbb{R}^n$  fou l'objecte del problema 17 de Hilbert, resolt per Artin el 1929. Arran d'aquest mateix, s'han plantejat nombrosos problemes colaterals relatius a propietats dels conjunts de l'espai afí definits per desigualtats polinomials (anomenats semialgebraics) i la caracterització dels polinomis positius sobre ells. En aquest article s'ofereix una exposició dels principals resultats sobre aquest tema.

Paraules clau: polinomis positius, conjunts semialgebraics, desigualtats polinomials, Positivstellensatz.

Classificació AMS: 14P10, 14P15, 13J30, 12D15.

### 1 Introducció

Considerem un polinomi en una variable  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ . Tots nosaltres expliquem a les nostres classes que  $f(x)$  factoritza de la forma

$$f(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s},$$

on  $a_1, \dots, a_r$  són les arrels reals de  $f$  i els factors quadràtics corresponen a les parelles d'arrels complexes conjugades  $\alpha_k \pm i\beta_k$ .

---

\* Aquest article correspon a la conferència inaugural del curs 2002-2003 de la SCM. La traducció és de Josep Maria Font (Universitat de Barcelona).

Suposem ara que  $f(x) \geq 0$  per a tot  $x \in \mathbb{R}$ . Aleshores tots els exponents  $m_j$  han de ser parells, ja que si no  $f(x)$  canviaria de signe a  $a_j$  i, per tant,  $f(x)$  és un producte de sumes de quadrats de polinomis. A més, gràcies a la ben coneguda identitat

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

resulta que el producte de sumes de dos quadrats és, al seu torn, una suma de dos quadrats; per tant, obtenim que  $f(x)$  és la suma de dos quadrats de polinomis. En particular, deduïm que tota suma de quadrats de polinomis en una variable es pot escriure com la suma de, com a màxim, *dos* quadrats. Denotarem això dient que el *nombre de Pitàgoras* de  $\mathbb{R}[x]$  és  $\leq 2$ . D'altra banda,  $1 + x^2$  és un exemple d'una suma de dos quadrats que no és un quadrat; per això no es pot millorar la fita anterior.

Passem al cas de dues variables. Hilbert ja va observar que hi ha polinomis no negatius sobre tot el pla afí  $\mathbb{R}^2$  que no són sumes de quadrats. Però ho va fer per raonaments teòrics i geomètrics, usant propietats clàssiques de les cúbiques, i no en va exhibir cap exemple concret.

Robinson va posar equacions al raonament de Hilbert, i va produir el primer exemple concret d'un polinomi en dues variables que és no negatiu sobre tot el pla afí, però que no és una suma de quadrats de polinomis. Uns anys més endavant, Motzkin (1967) va donar l'exemple següent senzill (i simètric):

$$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1.$$

Per què  $M(x, y) \geq 0$ ? En aquest cas hi ha un truc fàcil per a observar-ho: la desigualtat entre la mitjana geomètrica i la mitjana aritmètica, aplicada a la terna  $1, x^2y^4, x^4y^2$ , ens proporciona

$$\frac{x^2y^4 + x^4y^2 + 1}{3} \geq ((x^2y^4)(x^4y^2))^{1/3} = x^2y^2.$$

I per què  $M(x, y)$  no és una suma de quadrats? Aquí no tenim més remei que comptar: posem

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = g_1(x, y)^2 + \dots + g_t(x, y)^2. \quad (1)$$

En primer lloc, els  $g_i$  han de tenir grau  $\leq 3$ . Fent  $x = 0$  resulta que

$$1 = g_1(0, y)^2 + \dots + g_t(0, y)^2,$$

d'on resulta que els  $g_i(0, y)$  són constants, és a dir,

$$g_i(x, y) = xh_i(x, y) + c_i,$$

essent

$$c_1^2 + \dots + c_t^2 = 1.$$

Substituint a l'equació (1) i fent  $y = 0$  obtenim

$$1 = (xh_1(x, 0) + c_1)^2 + \dots + (xh_t(x, 0) + c_t)^2$$

i, per tant,  $h_i(x, 0) = 0$ , és a dir,

$$h_i(x, y) = yb_i(x, y).$$

En definitiva,

$$g_i(x, y) = xy b_i(x, y) + c_i$$

(com podem esperar per raons de simetria), i a més, per rans de grau,  $b_i(x, y)$  és de grau 1. Substituint novament a l'equació (1) tenim:

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = x^2y^2 \sum_i b_i^2 + 2xy \sum_i b_i c_i + \sum_i c_i^2.$$

Simplificant  $1 = \sum_i c_i^2$ , resulta que  $x^2y^2$  divideix l'expressió de l'esquerra i el primer sumand de la dreta; per tant,  $xy$  ha de dividir  $\sum_i b_i(x, y) c_i$ , que, com hem mostrat, és un polinomi de grau 1, d'on  $\sum_i b_i(x, y) c_i = 0$ . Però aleshores, si tornem a l'equació anterior i dividim per  $x^2y^2$ , obtenim

$$x^2 + y^2 - 3 = \sum_i b_i(x, y)^2,$$

cosa clarament absurda com veiem simplement avaluant-ho en 0.

Un cop fets aquests petits comptes pot ser el moment d'assenyalar dues preguntes. Denotem per  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$  el conjunt de polinomis no negatius sobre  $\mathbb{R}^2$ , i per  $\Sigma_{\mathbb{R}^2}$  el de les sumes de quadrats de polinomis en dues variables (ometrem el subíndex quan no hi hagi dubte sobre en quin espai estem treballant).

**1 PROBLEMA** *Decidir si un polinomi  $f(x, y)$  és no negatiu sobre  $\mathbb{R}^2$  (és a dir, si és a  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ ).*

**2 PROBLEMA** *Decidir si  $f(x, y)$  és una suma de quadrats de polinomis (és a dir, si  $f$  és a  $\Sigma$ ).*

Malgrat que ambdós problemes poden semblar de similar dificultat, existeixen diferències entre ells: donat un polinomi  $f(x, y)$  que sigui una suma de quadrats, el seu grau ha de ser parell, posem  $2d$  i, per tant, el grau dels sumands possibles és menor o igual que  $d$  i el nombre de sumands necessaris també es pot afitar en funció de  $d$  (es pot comprovar que és menor o igual que  $\binom{d+2}{2}$ , la dimensió de l'espai vectorial de polinomis de grau menor o igual que  $d$ ). Per tant, el segon problema es pot plantejar com la resolució sobre els nombres reals d'un sistema (algebraic) de  $\binom{d+2}{2}$  equacions (de grau  $\leq 2$ ) en  $\binom{d+2}{2}^2$  variables. La resolució de sistemes algebraics ha experimentat recentment grans avenços (per exemple, gràcies als algorismes eficaços de càlcul de les bases de Gröbner).

El primer problema també és teòricament decidible: es tracta de decidir si el conjunt  $\{f(x) < 0\}$  és buit. El mètode d'eliminació de quantificadors de Tarski ens diu que això és possible, però no existeixen, de moment, mètodes eficaços per a fer-ho.

NOTA: observem que la fita  $\binom{d+2}{2}$  del nombre de quadrats mencionada en el paràgraf anterior ho és per a polinomis de grau fix  $2d$ , i no s'ha de confondre amb el nombre de Pitàgoras de  $\mathbb{R}[x, y]$ , és a dir, amb el nombre de quadrats que calen per a expressar un polinomi qualsevol que sigui una suma de quadrats, independentment del seu grau. Podem plantejar-nos un tercer problema, que tornarem a tractar més endavant:

3 PROBLEMA *És finit el nombre de Pitàgoras de  $\mathbb{R}[x, y]$ ?*

En [7] es mostra que la col·lecció de polinomis:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 1 \\ f_2(x, y) &= \Delta_1^2 f_1 + 1 = \Delta_1^2 + 1 \\ f_3(x, y) &= \Delta_2^2 f_2 + 1 = \Delta_2^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 1 \\ f_4(x, y) &= \Delta_4^2 f_3 + 1 = \Delta_4^2 \Delta_2^2 \Delta_1^2 + \Delta_4^2 \Delta_2^2 + \Delta_4^2 + 1, \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \Delta_1(x, y) &= i \\ \Delta_2(x, y) &= i(y - 2x) \\ \Delta_3(x, y) &= i(y - 2x)(y - 3x) \\ \Delta_4(x, y) &= i(y - 2x)(y - 3x)(y - 4x) \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

són tots sumes de quadrats, però també que el nombre de quadrats necessaris per a representar  $f_n$  és exactament  $n$ , de manera que el nombre de Pitàgoras de l'anell  $\mathbb{R}[x, y]$  és infinit. Veiem, doncs, que en passar d'una a dues variables la situació ha canviat de manera dràstica.

Tornem als nostres conjunts  $\mathcal{P}$  i  $\Sigma$  de polinomis no negatius i de sumes de quadrats, respectivament. Ambdós són cons convexos en l'espai vectorial  $\mathbb{R}[x, y]$  (potser seria més correcte dir semicons, ja que, naturalment, només contenen les semirectes corresponents al producte per escalars positius) i, clarament,  $\Sigma$  és estrictament contingut en  $\mathcal{P}$ , a la vista de l'exemple anterior ( $M(x, y)$  és a  $\mathcal{P}$  però no a  $\Sigma$ ). Sorgeix així un altre interessant:

4 PROBLEMA *Com és de gran la diferència entre  $\mathcal{P}$  i  $\Sigma$ ?*

Per a precisar una mica més aquesta pregunta, denotem per  $\mathcal{P}_d$  el conjunt de polinomis no negatius de grau menor o igual que  $2d$ , i per  $\Sigma_d$  el conjunt de les sumes de quadrats de polinomis de grau menor o igual que  $d$ . Ambdós conjunts són cons convexos en un espai afí de dimensió finita (el de tots els monomis de grau menor o igual que  $2d$  en les variables). G. Blehkerman, [2], ha comparat els volums d'aquests dos cons, i ha demostrat el resultat que segueix, que prova que hi ha molts més polinomis no negatius que sumes de quadrats. En particular aquesta diferència es fa més gran amb el grau i el nombre de variables:

1 TEOREMA *Existeix una constant  $c(d)$ , que depèn només del grau  $d$ , tal que*

$$\left(\frac{\text{Vol}\mathcal{P}_d}{\text{Vol}\Sigma_d}\right)^{\frac{1}{r}} \geq c(d)n^{(d-1)/2},$$

on  $r$  és la dimensió d'un determinat hiperplà de formes en l'espai de polinomis de grau  $2d$  en  $n$  variables.

## 2 El problema 17 de Hilbert

Tornem a Hilbert ... Ja hem comentat que ell va provar que  $\mathcal{P}$  i  $\Sigma$  són, en general, diferents. L'any 1900, a la seva famosa llista de problemes en el Congrés Internacional de Matemàtics de París, va enunciar el seu problema nombre 17:

5 PROBLEMA (PROBLEMA 17 DE HILBERT) *És tot polinomi no negatiu sobre  $\mathbb{R}^n$  una suma de quadrats de funcions racionals (fraccions de polinomis)? En altres termes, si  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  és  $\geq 0$  sobre tot  $\mathbb{R}^n$ , existeixen polinomis  $g_0, g_1, \dots, g_t$  tals que  $g_0^2 f = g_1^2 + \dots + g_t^2$ ?*

La pregunta de Hilbert la va respondre E. Artin el 1929 per mitjà de la teoria que avui es coneix com la teoria d'Artin-Schreier. La seva idea essencial és l'estudi i comprensió de les diferents maneres d'«ordenar» l'anell dels polinomis (o més exactament el seu cos de fraccions). Donar un ordre a l'anell de polinomis (o a qualsevol altre anell) consisteix a fixar un criteri per a comparar quan un polinomi és més gran que un altre, o equivalentment, a definir quan un polinomi és més gran que 0, és a dir, quan és positiu en aquest ordre. Per descomptat que ens referim sempre a ordres compatibles amb l'estructura de cos, és a dir, que la suma i el producte de positius ha de ser positiu. Per una banda, les sumes de quadrats són els elements totalment positius, és a dir, els que són positius en tots els ordres possibles. D'altra banda, la possibilitat de definir un ordre s'ha de traduir d'alguna forma en termes geomètrics.

Intuïtivament, hi ha una manera molt fàcil de definir ordres entre els polinomis: n'hi ha prou amb fixar un punt i dir que un polinomi és positiu si és més gran que 0 en una «regió» determinada adjacent a tal punt. Si volem ser una mica més precisos: si és positiu en algun element d'un filtre de conjunts,

de dimensió màxima, adherents al punt. En el cas de dimensió 1, per a cada punt només hi ha dos d'aquests filtres —i, per tant, dos ordres centrats en aquest punt—, que són els intervals  $(a - \varepsilon, a)$  i  $(a, a + \varepsilon)$ .

La idea genial d'Artin va ser demostrar que malgrat la multitud d'ordres existents en el cos de fraccions de l'anell de polinomis, la informació fonamental és continguda en el tipus dels ordres mencionat i, per tant, es pot recuperar mitjançant l'avaluació en els punts de l'espai afí:

2 TEOREMA (ARTIN) *Existeix un ordre en  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$  en el qual els polinomis  $f_1, \dots, f_r$  són simultàniament positius si i només si hi ha un punt  $x \in \mathbb{R}^n$  on els polinomis esmentats són simultàniament positius, és a dir, si i només si el conjunt*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}$$

*és no buit.*

Un cop coneguda la resposta afirmativa a la pregunta de Hilbert, sorgeix la pregunta quantitativa sobre el nombre de quadrats necessaris. Recordem que donat un cos  $K$  anomenem nombre de Pitàgoras de  $K$  el mínim  $p$  tal que tota suma de quadrats en  $K$  es pot reduir a una suma de  $\leq p$  quadrats.

6 PROBLEMA (PROBLEMA 17 QUANTITATIU (NOMBRE DE PITÀGORAS)) *Quants quadrats calen? En altres termes, quin és el nombre de Pitàgoras del cos de fraccions de l'anell de polinomis en  $n$  indeterminades?*

El problema quantitatiu va ser resolt molt més tard per A. Pfister [10] mitjançant la teoria de formes quadràtiques (i en particular de les formes que duen el seu nom). Va demostrar que, si representem per  $p_n$  el nombre de Pitàgoras del cos de funcions racionals en  $n$  variables, aleshores

$$n + 1 \leq p_n \leq 2^n.$$

Ara bé, encara avui no sabem si aquestes fites són òptimes; de manera que acabem aquesta secció amb el problema obert que segueix.

7 PROBLEMA *Demostrar si les fites de  $p_n$  donades anteriorment són òptimes.*

### 3 Conjunts semialgebraics: una petita digressió

A partir de l'espectacular resultat d'Artin, i més endavant del teorema de Tarski sobre eliminació de quantificadors per a cossos reals tancats, l'estudi dels subconjunts de l'espai afí  $\mathbb{R}^n$  definits per desigualtats polinomials va experimentar un desenvolupament notable. Aquests conjunts reben el nom de semialgebraics. Amb més precisió, un subconjunt  $S \subset \mathbb{R}^n$  és *semialgebraic*

si és una combinació booleana de desigualtats polinomials, és a dir, si es pot descriure en la forma:

$$S = \bigcup_{i=1}^t \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, g_{i1} > 0, \dots, g_{is_i} > 0\}$$

amb  $f_i, g_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

Els conjunts semialgebraics tenen bones propietats:

1. Són tancats per combinacions booleanes (unions i interseccions finites i complements).
2. Són tancats per productes: si  $A \subset \mathbb{R}^n$  i  $B \subset \mathbb{R}^m$  són semialgebraics, aleshores  $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$  és semialgebraic.
3. Són tancats per projeccions (teorema de Tarski-Seidenberg).
4. Els conjunts semialgebraics de la recta són les unions finites d'interval.

Hi ha una literatura molt abundant sobre les propietats topològiques dels conjunts semialgebraics, [3, 6]. Per exemple, els conjunts semialgebraics són triangulables, tenen una estructura local senzilla i un capteniment essencialment finit, és a dir, un cop fixat el grau dels polinomis que els descriuen, es poden trobar fites del nombre de tipus topològics possibles, del nombre de components connexos que poden tenir, etc. De fet, les quatre propietats definidores assenyalades anteriorment es prenen com a definició de les anomenades estructures *o-minimals*; l'exemple més senzill en són els conjunts semialgebraics, i comparteixen un bon nombre de les seves propietats.

També tenen curioses propietats combinatòries; en citarem només una a títol d'exemple: qualsevol intersecció de desigualtats polinomials estrictes en  $\mathbb{R}^n$  és equivalent a... *una intersecció amb només n desigualtats!* És a dir, per gran que sigui el nombre  $r$ , tenim

$$\{g_1 > 0, \dots, g_r > 0\} = \{f_1 > 0, \dots, f_n > 0\}$$

per a alguns polinomis  $f_i$ . En concret, en el pla  $\mathbb{R}^2$ , una intersecció arbitrària de desigualtats estrictes es pot descriure amb solament dues desigualtats.

**8 PROBLEMA** *Buscar algorismes per a construir aquesta representació curta a partir de la donada.*

Semblantment, qualsevol intersecció de desigualtats polinomials laxes (no estrictes) en  $\mathbb{R}^n$  és equivalent a una intersecció d'un nombre de desigualtats que depèn només de  $n$ , en aquest cas  $n(n+1)/2$ . És a dir, per gran que sigui el nombre  $r$  tenim

$$\{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\} = \{f_1 \geq 0, \dots, f_{n(n+1)/2} \geq 0\}$$

per a alguns polinomis  $f_i$ . Com en el cas de les desigualtats estrictes, aquesta fita és òptima. Ara bé, és molt plausible que per a determinades classes «regulars» de semialgebraics (per exemple, els poliedres) la fita en el cas laxe coincideixi també amb  $n$ , però aquest problema encara és obert.

## 4 Positivstellensätze

A la secció 2 hem tractat els polinomis que són no negatius sobre tot l'espai afí  $\mathbb{R}^n$  i hem vist que es poden escriure com una suma de quadrats de funcions racionals. Què podem dir de l'«aspecte» dels polinomis  $f \in \mathbb{R}[x]$  que són positius sobre un conjunt semialgebraic  $S = \{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\}$ ?

Comencem analitzant un exemple senzill:

**1 EXEMPLE** *Sigui  $f(x)$  un polinomi en una variable, i suposem que és positiu a la semirecta  $S = \{x \geq 0\}$ . Descomponem  $f$  com al començament:*

$$f(x) = (x + a_1)^{m_1} \cdots (x + a_k)^{m_k} \cdot (x - a_{k+1})^{m_{k+1}} \cdots (x - a_r)^{m_r} \cdot ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s},$$

on ara  $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$ , de forma que les  $k$  primeres arrels reals de  $f$  són negatives i la resta positives. Com que  $f(x)$  és no negatiu en tot  $\{x \geq 0\}$ , resulta que els exponents  $m_{k+1}, \dots, m_r$  han de ser parells; a més, per a  $i \leq k$ , descomponent els  $m_i$  que siguin imparells com

$$(x + a_i)(x + a_i)^{2\nu_i} = x(x + a_i)^{2\nu_i} + a_i(x + a_i)^{2\nu_i}$$

resulta que

$$f = x \sum_j h_j^2 + \sum_k g_k^2,$$

és a dir, es pot escriure com una combinació dels polinomis que descriuen  $S$  amb coeficients sumes de quadrats. Amb un raonament similar, però amb una mica més d'esforç, es pot comprovar que, si  $f$  és positiu a l'interval  $\{x \geq 0, 1-x \geq 0\}$ , aleshores es pot escriure de la forma

$$f = s_0 + x s_1 + (1-x) s_2 + x(1-x) s_3,$$

on els  $s_i$  són sumes de quadrats de polinomis.

Tornant al plantejament general, considerem el conjunt

$$\Sigma_S = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)} s_\varepsilon g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_r^{\varepsilon_r}.$$

Observem que tots els seus elements són polinomis no negatius sobre  $S$ . Aquest conjunt farà el paper de «con de sumes de quadrats» sobre  $S$ .

Denotem per  $\mathcal{P}_S$  el conjunt de polinomis no negatius sobre  $S$ .

Prenent  $S = \mathbb{R}^2 = \{1 \geq 0\}$  recuperem  $\Sigma_S = \Sigma$  i  $\mathcal{P}_S = \mathcal{P}$  com a la secció 1, i l'exemple de Motzkin mostra que en general  $\mathcal{P}_S$  és estrictament més gran que  $\Sigma_S$ . Existeix un anàleg al problema 17 de Hilbert?



3 TEOREMA (POSITIVSTELLENSATZ, [13]) *a)  $f$  és no negatiu ( $f \geq 0$ ) sobre  $S$  si i només si existeixen  $t_1, t_2 \in \Sigma_S, N \in \mathbb{N}$  tals que*

$$ft_1 = f^{2N} + t_2.$$

*b)  $f$  és positiu ( $f > 0$ ) sobre  $S$  si i només si existeixen  $t_1, t_2 \in \Sigma_S$  tals que*

$$f(1 + t_1) = 1 + t_2.$$

És a dir, un altre cop  $f$  és una suma de quadrats sobre  $S$ , si admetem denominadors.

9 PROBLEMA *Decidir si un polinomi  $f(x, y)$  és no negatiu sobre  $S$  (és a dir, si és a  $\mathcal{P}_S$ ).*

10 PROBLEMA *Decidir si  $f(x, y)$  és a  $\Sigma_S$ .*

Aquests problemes són més difícils que els del cas de l'espai afí, ja que la introducció dels polinomis  $g_j$  que defineixen  $S$  a l'equació impedeix, per exemple, qualsevol consideració sobre graus.

## 5 Teorema de Schmüdgen

En 1991 K. Schmüdgen, en el seu estudi del problema dels moments (és a dir, quan un funcional lineal es pot expressar com una integral per a una certa mesura de Borel) sobre conjunts semialgebraics, va demostrar que, si  $S = \{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\}$  és compacte i  $f > 0$  sobre  $S$ , aleshores  $\Sigma_S$ , és a dir, no necessita denominadors per a ser expressat com una suma de quadrats sobre  $S$ , [12]. D'altra banda, la següent modificació del polinomi de Motzkin  $M'(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + 1$  resulta ser estrictament positiu sobre  $\mathbb{R}^2$  però (semblantment al que hem fet a la secció 1) no és suma de quadrats; per tant, sense la hipòtesi de compacitat el resultat és, en general, fals. Això ha despertat l'interès sobre el següent:

11 PROBLEMA *Caracteritzar els conjunts  $S$  que tenen la propietat de Schmüdgen, és a dir, per als que  $\mathcal{P}_S^+ \subset \Sigma_S$ , on  $\mathcal{P}_S^+$  representa els polinomis que són estrictament positius sobre  $S$ .*

Per a  $S$  no compacte, estem lluny de conèixer la resposta, fins i tot per a dimensió 2. Observem que la solució depèn, en general, dels descriptors  $g_1, \dots, g_r$  del conjunt  $S$ . Així, a l'exemple exposat a la secció anterior, el semi-eix  $S = \{x \geq 0\}$  també es pot descriure com  $S = \{x^3 \geq 0\}$ . Ara bé, no és cert que tot polinomi  $f(x) > 0$  sobre  $S$  es pugui expressar com una combinació de  $x^3$  amb coeficients sumes de quadrats. Per exemple, el polinomi  $x$  no es pot expressar d'aquesta forma. Això ha dut a la introducció de la noció de descriptor natural d'un semialgebraic, en la qual no entrarem. En tindrem prou amb

la idea que  $x$  és un generador natural per al semieix positiu, mentre que  $x^3$  no. Sense entrar en precisions, en el cas on  $\dim S = 1$ , és a dir, quan  $S$  és un subconjunt semialgebraic d'una corba algebraica, sabem que  $S$  té la propietat de Schmüdgen si els descriptors de  $S$  són «bons», [8].

Si  $\dim S = 2$  la situació és molt menys coneguda. Si  $S \subset \mathbb{R}^2$  i conté un con (la regió compresa entre dues semirectes concurrents en un punt)  $S$  no té la propietat de Schmüdgen. Amb més precisió, si denotem per  $\bar{S}$  la clausura de  $S$  a l'espai projectiu  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  i  $\bar{S} \setminus S$  és dens en la recta de l'infinit, aleshores  $\mathcal{P}_S^+ \not\subset \Sigma_S$ , [11]. Però per exemple, la qüestió de decidir si la banda

$$S = [1, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \geq 0, 1 - x \geq 0\}$$

té o no la propietat de Schmüdgen és oberta. Finalment, en dimensions superiors només sabem que, si  $S$  conté un con bidimensional, aleshores  $S$  no té la propietat de Schmüdgen.

Si admetem que  $f$  tingui zeros a  $S$ , aleshores sabem que el resultat de Schmüdgen no és cert en general i té sentit de plantejar-se el següent:

12 PROBLEMA *Hi ha alguna classe identificable de conjunts  $S$  per als quals  $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$ ?*

En uns resultats recents sobre aquest problema, C. Scheiderer, [11], ha provat que si  $\dim S \geq 3$  aquests cons són diferents, independentment de si  $S$  és compacte o no, i dels descriptors  $g_j$  de  $S$ . Com abans, en el cas de corbes ( $\dim S = 1$ ) la situació és essencialment coneguda, i en dimensió dos hi ha resultats parcials. Si  $S$  és compacte i les seves funcions descriptors són no singulars i es tallen transversalment dues a dues, aleshores  $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$ , [11]. També sabem que aquesta igualtat és certa en el cas on  $S$  té només un nombre finit de zeros a  $S$  i en cadascun d'ells  $f$  es pot expressar localment (a l'anell de sèries en el punt) com una suma de quadrats sobre  $S$ . I per descomptat, els resultats negatius exposats abans per al cas  $f > 0$  també són vàlids, amb més motiu, aquí.

1 OBSERVACIÓ *Fins ara hem treballat sempre sobre l'afí  $\mathbb{R}^n$ , però tots els problemes exposats es poden plantejar més en general sobre una varietat algebraica irreductible  $V \subset \mathbb{R}^n$ , canviant l'anell  $\mathbb{R}[X]$  per l'anell de funcions polinomials  $\mathbb{R}[X]/I$ , on  $I$  és l'ideal de polinomis que s'anul·len sobre  $V$ . Tots els resultats comentats (solució al problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, etc.) són vàlids en aquest context amb els canvis obvis.*

En la línia del darrer dels problemes exposats, en podem plantejar aleshores:

13 PROBLEMA *Caracteritzar les varietats algebraiques  $V$  per a les quals  $\mathcal{P} = \Sigma$ , és a dir, les funcions de  $\mathbb{R}[V]$  no negatives són sumes de quadrats d'elements de  $\mathbb{R}[V]$  (això també s'expressa a la literatura amb l'acrònim psd=sos (positive semidefined = sums of squares).*

El teorema de Schmüdgen afirma, en aquest cas, que si  $V$  és compacta tota funció estrictament positiva és *sos*. C. Scheiderer, en el treball ja mencionat, mostra que per a corbes algebraiques es pot donar una caracterització precisa de les que satisfan *psd=sos*, i que aquesta igualtat és falsa per a totes les varietats amb dimensió  $\geq 3$ . Per a les superfícies de moment només s'han obtingut resultats parcials, i el cas general resta obert.

## 6 Altres extensions

Acabarem comentant breument algunes extensions de les qüestions exposades a d'altres contextos. En particular, podem substituir l'anell de polinomis per altres anells de funcions, com les funcions analítiques, funcions  $C^\infty$ , de Nash... i els conjunts semialgebraics per la classe de conjunts que correspongui (combinacions booleanes de desigualtats de les funcions considerades) i repetir les mateixes preguntes mencionades al llarg del text: problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, nombres de Pitàgoras, etc. En el cas de les funcions de Nash (funcions que són algebraiques sobre l'anell dels polinomis) la situació és essencialment idèntica a la de l'anell de polinomis. En el cas de les funcions analítiques a l'entorn d'un punt (és a dir, gèrmens de funcions analítiques) el capteniment és també anàleg al cas polinomial, [1]. La situació és radicalment diferent en el cas de funcions analítiques globals. En aquest cas sabem que el problema 17 de Hilbert és «cert» per a  $\mathbb{R}^2$ , és a dir, tota funció analítica no negativa sobre  $\mathbb{R}^2$  és una suma de quadrats de funcions meromorfes, [5], però per a  $n \geq 3$  és un problema obert.

Recentment s'han registrat també alguns avenços en la direcció de trobar algorismes eficients per a representar un polinomi no negatiu com una suma de quadrats, [9]. Aquests resultats fan servir tècniques de programació semi-definida i s'han de continuar explorant.

## Referències

- [1] ANDRADAS, C.; BRÖCKER, L.; RUIZ, J. M. *Real Constructible Sets*. Berlin: Erg. Math., 33, Springer, 1996.
- [2] BLEKHERMAN, G. *There Are Significantly More Nonnegative Polynomials than Sums of Squares*. arXiv:math.AG/0309130v1, 2003.
- [3] BOCHNAK, J.; COSTE, M.; ROY, M. F. *Real Algebraic Geometry*. Berlín: Erg. Math., 36, Springer, 1998.
- [4] BRÖCKER, L. «Minimale Erzeugung von Positivbereichen». *Geom. Dedicata*, 16 (1984), 335-350.
- [5] CASTILLA, A. «Artin-Lang property for analytic manifolds of dimension two». *Math. Z.*, 217 (1994), 5-14.
- [6] COSTE, M. *An Introduction to Semialgebraic Geometry*. Pisa: Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000.

- [7] DELZELL, C. PRESTEL, A. «Positive Polynomials: From Hilbert's 17th Problem to Real Algebraic Geometry». *Springer Monographs in Mathematics*, (2001).
- [8] KUHLMAN, S.; MARSHALL, M. «Positivity, sums of squares and the multidimensional moment problem». *Trans. Am. Math. Soc.*, 354 (2002), 4285-4301.
- [9] PARRILO, P.; STURMFELS, B. *Minimizing polynomial functions*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 60: Algorithmic and Quantitative Real Algebraic Geometry. AMS, (2003).
- [10] PFISTER, A. «Quadratische Formen in beliebigen Körpern». *Invent. math.*, 1 (1966), 116-132.
- [11] SCHEIDERER, C. *Positivity and sums of squares: a guide to some recent results*. <http://www.uni-duisburg.de/FB11/FGS/F1/claus.html#preprints>.
- [12] SCHMÜDGEN, K. «The K-moment problem for compact semialgebraic sets». *Math. Ann.*, 289 (1991), 203-206.
- [13] STENGLE, G. «A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry». *Math. Ann.*, 207 (1974), 87-97.

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
28040 MADRID  
carlos\_andradas@mat.ucm.es