El reticle de les associativitats

PERE RUBIÓ I DÍAZ *

Quan tenim lleis de composició definides pertot diem que aquestes són associatives si es compleix entre tota terna d'elements (a, b, c) que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; però si aquestes lleis de composició no són definides pertot, ens trobem amb diferents definicions d'associativitat que, en tant a la seva força, constitueixen un subreticle del de les proposicions.

Considerem les diferents possibilitats atenent a lleis de composició entre conjunts: $f : B \times C \to A'$, $g : A \times A' \to D$, $h : A \times B \to C'$, $k : C' \times C \to D$. Llavors, en essència, una terna (a, b, c) de $A \times B \times C$ serà associativa si compleix $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, però, per a tal fi, es poden fer hipòtesis de condicions diferents com són, p. ex., l'existència de $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$, o simplement la d'un d'ells.

Les hipòtesis en consideració seran les internes als productes entre els elements a, b i c, o sia sobre $a \cdot b$, $a \cdot (b \cdot c)$, $b \cdot c$ i $(a \cdot b) \cdot c$. Segons això hi ha les possibilitats següents:

a) Si $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b)\, c$ existeixen, llavors $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Com l'existència d'un producte entre els tres a, b, c ja implica l'existència del producte del parell que intervé en el producte triple, es superflu combinar la condició «$a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$ existeixen» amb una condició entre $a \cdot b$ o $b \cdot c$.

Condicions amb l'existència d'un sol producte ternari:

b) Si $a \cdot (b \cdot c)$ existeix, llavors existeix $(a \cdot b) \cdot c$ i $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Aquest $a \cdot (b \cdot c)$ només pot ser combinat amb $a \cdot b$, doncs l'existència de $b \cdot c$ està implicada pel producte triple. A més exigim que entre les condicions sempre intervinguin essencialment els tres elements a, b, c, doncs si, p. ex., posem una

* Escola Universitària Politècnica de Manresa.

condició del tipus «$a \cdot (b \cdot c)$ o $a \cdot b$ existeixen» tindrem que de l'existència de $a \cdot b$ es deduiria la de tot producte $(a \cdot b) \cdot c$ i $a \cdot (b \cdot c)$ per a tot c, d'on b es podria compondre amb tot c i seria, en el fons, una condició sotmesa a l'existència d'un tal element. Tenim doncs les possibilitats:

c) Si $a \cdot (b \cdot c)$ i $a \cdot b$ existeixen, llavors existeix $(a \cdot b) \cdot c$ i es compleix $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

d) Si $a \cdot (b \cdot c)$ existeix o existeixen $a \cdot b$ i $b \cdot c$, llavors existeixen i són iguals $(a \cdot b) \cdot c$ i $a \cdot (b \cdot c)$.

Dualment tenim:

e) Si $(a \cdot b) \cdot c$ existeix, llavors existeix $a \cdot (b \cdot c)$ i es compleix que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

f) Si $(a \cdot b) \cdot c$ i $b \cdot c$ existeixen, llavors existeix $a \cdot (b \cdot c)$ complint-se $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

g) Si $(a \cdot b) \cdot c$ existeix, o existeixen $a \cdot b$ i $b \cdot c$, llavors existeixen i són iguals $(a \cdot b) \cdot c$ i $a \cdot (b \cdot c)$.

Condicions amb la disjunció del productes $(a \cdot b) \cdot c$ i $a \cdot (b \cdot c)$:

h) Si un dels dos $a \cdot (b \cdot c)$ o $(a \cdot b) \cdot c$ existeix, llavors existeix l'altre i són iguals.

i) Si existeix un dels $a \cdot (b \cdot c)$ o $(a \cdot b) \cdot c$ i existeix $b \cdot c$, llavors existeixen i són iguals $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$.

j) Si existeix un dels $a \cdot (b \cdot c)$ o $(a \cdot b) \cdot c$ i existeix $a \cdot b$, llavors existeixen i són iguals $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$.

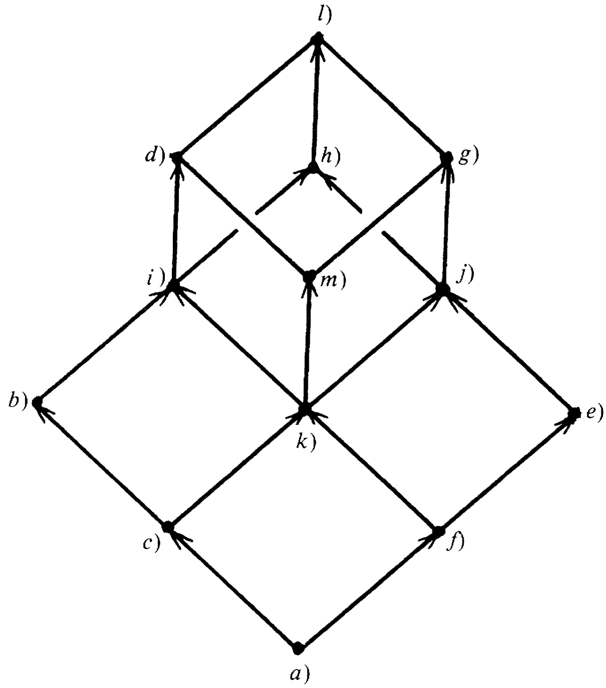
k) Si existeix un dels $a \cdot (b \cdot c)$ o $(a \cdot b) \cdot c$ i els $a \cdot b$ i $b \cdot c$, llavors existeixen i són iguals $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$.

l) Si existeix un dels $a \cdot (b \cdot c)$ o $(a \cdot b) \cdot c$ o, en altre cas, existeixen $a \cdot b$ i $b \cdot c$, llavors existeixen i són iguals $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$.

Condició sense cap producte ternari:

m) Si $a \cdot b$ i $b \cdot c$ existeixen, llavors existeixen i són iguals $a \cdot (b \cdot c)$ i $(a \cdot b) \cdot c$.

Totes aquestes condicions són del tipus $p \rightarrow q$, on la condició q és «existeixen $(a \cdot b) \cdot c$ i $a \cdot (b \cdot c)$ i són iguals». Aquesta condició implica l'existència dels quatre $(a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot (b \cdot c)$, $a \cdot b$, $b \cdot c$ i, pels coneixements de lògica, sabem que $p \rightarrow q$ és més forta que $p' \rightarrow q$ si i solament si $p' \rightarrow p$, d'on, vistes les premises de les condicions, obtenim el reticle:



D'aquestes, les a), k), m), h) i l) són condicions simètriques en el sentit que fan les mateixes hipòtesis sobre $(a \cdot b) \cdot c$ que sobre $a \cdot (b \cdot c)$ i, sobre $a \cdot b$, que sobre $b \cdot c$. La a) és l'anomenada a vegades associativitat feble, la b) és anomenada associativitat forta i la l) es l'associativitat exigida en estructures com són les categories.

La c) és utilitzada en els grafos d'operadors mentre que la g) ho és en les neocategories d'operadors.

Referències

Ehresman, Ch. Catégories et structures. Ed. Dunod.
Levy-Bruhl, J. Introduction aux structures algebraiques. Ed. Dunod.