La conjectura de Bieberbach*

JULIÀ CUFÍ **

És ben coneguda la importància que té tant a les matemàtiques pures com a les aplicades, el teorema de Riemann sobre la representació conforme d'un domini simplement connex sobre el disc. Aquest teorema no solament redueix molts problemes sobre un domini pla al cas del disc sinó que és una eina molt potent a l'hora de construir funcions analítiques amb propietats geomètriques més o menys prefixades. Per utilitzar aquest instrument és convenient tenir informació sobre la representació conforme d'un domini en el disc. Alguns resultats donen informació sobre el comportament de la funció a la frontera; d'altres relacionen la representació conforme amb certs problemes extremals com és el cas de la conjectura de Bieberbach.

Per tal de formular-la considerem la classe S (slicht) de les funcions f holomorfes i univalents en el disc unitat D amb la condició de normalització $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Es tracta doncs, gairebé, de la forma general d'una representació conforme del disc en un altre domini pla i d'acord amb el teorema de Riemann la majoria de resultats sobre teoremes geomètrics de la classe S es traslladen a resultats sobre funcions univalents a un domini simplement connex la frontera del quals tingui més d'un punt.

Cada funció f de la classe S té un desenvolupament de Taylor

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \qquad |z| < 1$$

i una funció típica de S és la funció de Koebe:

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n + \dots$$

que aplica el disc D a tot el pla menys $(-\infty, -1/4]$.

* Conferència feta a la Societat Catalana de Ciències, Secció de Matemàtiques, el 13 de març del 1986.

** Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

La classe S és invariant en front de certes transformacions. Per exemple si $f \in S$, $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ és una funció senar de la classe S.

En efecte, si posem $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, $f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + \ldots = z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots)$ i el parèntesi és una funció sense zeros perquè f només s'anul·la al 0 i $\frac{f(z^2)}{2}$ té una arrel quadrada $g(z) = \frac{\sqrt{f(z^2)}}{z}$ que serà parella $[g(z)^2 = g(-z)^2 \Rightarrow g(z) = g(-z)$ ò $g(z) = -g(-z)\ \forall z$, però $g(0) = 1]$. Així la funció $h(z) = \sqrt{f(z^2)} = z \cdot g(z)$ és senar i injectiva $[h(z_1) = h(z_2) \Rightarrow f(z_1^2) = f(z_2^2) \Rightarrow z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm z_2$ però si $z_1 = -z_2$ és $h(z_1) = h(z_2) = -h(z_1) \Rightarrow h(z_1) = 0$ i $z_1 = 0$ i $z_1 = z_2]$.

La teoria de les funcions de la classe S comença el 1904 quan Koebe prova que S és una família normal. Això dóna sup $|a_n| \leq c_n$ per als coeficients de qualsevol funció de S. El mateix Koebe prova el primer teorema de distorsió i també el fet que la imatge de D per qualsevol funció de S conté un disc de radi fix $k > 0$. El 1916 Bieberbach va establir el valor 1/4 per a la constant de Koebe i fent servir el teorema de l'àrea, degut a Gronwall, provà que $|a_2| \leq 2$ junt amb versions fines dels teoremes de distorsió, i de recobriment de Koebe. De fet es veu fàcilment que a més $|a_2| < 2$ tret del cas que f sigui una rotació de la funció de Koebe $f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$. Bieberbach utilitzava la notació $k_n = \sup\{|a_n|: \text{classe } S\}$ i havent provat que $k_2 = 2$ suggereix com una tentació a peu de pàgina del seu article «Das $k_n \geq n$ zeigt das Beispiel $\Sigma n z^n$. Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$» («Que $k_n \geq n$ ho mostra l'exemple $\Sigma n z^n$. Potser és de totes formes $k_n = n$»).

Aquest és l'origen de la famosa conjectura:

$\forall f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ de la classe S és $|a_n| \leq n$, i $|a_n| < n$ tret que f sigui una rotació de la funció de Koebe.

La resposta afirmativa l'ha donada Louis de Branges el mes de maig del 1984. Els intents de solució de la conjectura de Bieberbach han empès el desenvolupament de diferents mètodes i resultats de la teoria de funcions univalents al llarg de quasi 70 anys. Encara poc abans de la solució, P. Duren publica un llibre de 440 pàgines el pròleg del qual confessa que té com a objectiu les diverses solucions parcials de la conjectura de Bieberbach. De fet, de Branges prova una forma més forta de la conjectura que fou formulada per Rogosinski el 1943.

Si $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ i $|g| \leq |f|$ on f és una funció subordinada a una funció de la classe S, llavors $|b_n| \leq n$.

Repassant una mica la història trobem que:

El 1920, Nevanlinna demostrà la conjectura per a les funcions f de la classe S^* $S^* = \{f \in S : f(D)$ és estrellat respecte un punt$\}$.

El 1923 Löwner demostrà $|a_3| \leq 3$ i té interès sobre tot el seu mètode el qual introdueix un sistema uniparamètric de representacions conformes que compleixen una certa equació diferencial:

Si J és un arc de Jordan $Z(\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$ i per a $t > 0$ és J_t l'arc $t \leq \tau < \infty$, sigui f_t la representació conforme de D a $C - J_t$.

En primer lloc és interessant el fet (fàcil de demostrar) que tota funció de la classe S es pot aproximar uniformement sobre compactes per representacions conformes de D sobre el pla amb talls de Jordan i és suficient demostrar Bieberbach per a aquestes representacions.

Amb una parametrització adequada es compleix

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = \frac{1 + \chi(t)z}{1 - \chi(t)z}\, z\, \frac{\partial}{\partial z} f_t(z) \text{ on } \chi : [0, \infty) \to C, |\chi| = 1.$$

i el problema es converteix en un problema de control òptim.

El 1925 Littlewood prova que $|a_n| < e \cdot n$.

El 1931 Rogosinski, Dieudonné i Szasz proven la desigualtat $|a_{n+2}| - |a_n| \leq 2$ que implica la conjectura de Bieberbach per a les funcions típicament reals. (f típ. real si $a_n \in R$ que vol dir que $f(z) \in R \Leftrightarrow z \in R$).

Hem observat abans que si $f \in S$, la funció $k(z) = \sqrt{f(z^2)}$ és una funció senar de la classe S. El 1936 Robertson conjecturà que si $h(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots$ és una funció senar de classe S, llavors

$$\sum_{k=1}^{m} |c_{2k-1}|^2 \leq m, \qquad m = 1, 2 \ldots$$

La conjectura de Bieberbach és una conseqüència d'aquesta doncs ($f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$) $f(z^2) = z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots = h(z)^2 = (z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots)^2$ dóna

$$a_n = c_1 c_{2k-1} + c_3 c_{2k-3} + \ldots + c_{2k-1} c_1$$

i

$$|a_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2\right)^{1/2} \leq n.$$

Després Schiffer, Schaeffer i Spencer van desenvolupar el mètode racional a la vista que el de Löwner no servia per a $n > 3$. Considerant la función f que maximitza $Re\ a_n$ resulta que $\partial f(D)$ està limitat per les trajectòries de diferencials quadràtiques i llavors es pot aplicar la idea de longitud extremal. El mètode no és però suficient per a provar que $|a_3| \leq 3$ però Garabedian i Schiffer aconseguiren provar $|a_4| \leq 4$, mitjançant nombroses acotacions numèriques.

Pederson i Ozawa (1967-68) provaren $|a_6| \leq 6$ i una modificació molt enginyosa de la seva demostració (desigualtat de Grunsky) va permetre a Garabedian, Pederson i Schiffer provar el 1972 que $|a_5| \leq 5$.

Altres mètodes havien estat utilitzats per demostrar la conjectura de Bieberbach per a valors grans de n. Per exemple, Hayman havia vist que $|a_n| \leq n$, $\forall n \geq n_0(f)$ i FitzGerald provà $|a_n| \leq 1.081\, n\ \forall n$ i Horowitz $|a_n| \leq 1.0657\, n$.

La Conjectura de Bieberbach asimptòtica, més feble que la de Bieberbach diu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 1$$

(Hayman havia provat que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n}$ existeix.)

El 1965 Milin havia provat $|a_n| \leq 1.243\, n$ (pitjor que les anteriors) però el que ens interessa és la seva idea sobre la utilització de la exponenciació:

Si $f \in S$, definim els seus coeficients logarítmics així

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad |z| < 1$$

i Milin (1967) investigà com es poden acotar els coeficients de f a partir dels coeficients c_n. Provà la 2.ª desigualtat de Lebedev-Milin:

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = e^{\Sigma \alpha_n z^n}, \text{ llavors}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq (n+1) \exp \left[\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right]$$

Aquesta desigualtat els portà a conjecturar la següent desigualtat per als coeficients logarítmics d'una funció de la classe S:

Conjectura de Lebedev-Milin:

$$f \in S : \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|c_k|^2 - \frac{4}{k} \right) \leq 0 \qquad n = 1, 2 \ldots$$

que implica la de Bieberbach.

En primer lloc aquesta desigualtat es pot escriure:

$$|c_1|^2 + (|c_1|^2 + 2|c_2|^2) + \ldots + (|c_1|^2 + \ldots + n|c_n|^2) \leq$$
$$\leq 4(1 + (1 + 1/2) + \ldots + (1 + 1/2 + \ldots + 1/n)) \text{ que equival a:}$$
$$n|c_1|^2 + 2(n-1)|c_2|^2 + \ldots + n|c_n|^2 \leq 4(n + (n-1)1/2 + \ldots + 1/n) \text{ o bé:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)|c_k|^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k}$$

Aquesta desigualtat implica la conjectura de Robertson (i per tant la de Bieberbach). En efecte:

Sigui $h(z) = z + \gamma_3 z^3 + \gamma_5 z^5 + \ldots$ una funció senar de la classe S.

Existeix una funció $f \in S$ tal que $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ car

$$h(z)^2 = z^2 + 2\gamma_3 z^4 + (2\gamma_5 + \gamma_3^2)z^6 + \ldots$$

i ara posem $f(z) = z + 2\gamma_3 z^2 + (2\gamma_5 + \gamma_3^2)z^3 + \ldots$ que és injectiva ($f \in S$). La funció $\dfrac{f(z)}{z}$ és univalent i no s'anul·la, per tant existeix una determinació del log i

$$e^{\frac{1}{2}\log\frac{f(z)}{z}} \text{ és una determinació de } \sqrt{\frac{f(z)}{z}}$$

Aquesta funció és $1 + \gamma_3 z + \gamma_5 z^2 + \gamma_7 z^3 \ldots$ puix que el seu quadrat és

$$1 + 2\gamma_3 z + (2\gamma_5 + \gamma_3^2)z^2 + \ldots$$

Així doncs:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n+1} z^n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} z^n} \qquad (\gamma_1 = 1)$$

I ara tenim:

$$\sum_{k=0}^{n} |\gamma_{2k+1}|^2 \leq (n+1) \exp\left[\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k\left|\frac{c_k}{2}\right|^2 - \frac{1}{k}\right)\right] =$$

$$= (n+1) \exp\left[\frac{1}{4}\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|c_k|^2 - \frac{4}{k}\right)\right] \leq n+1$$

que és la desigualtat de Robertson.

Una modificació senzilla de les idees de Milin permeten demostrar el següent resultat de Aharanov:

Si $f \in S$ i $|a_2| < 0.867$, llavors $|a_n| < n$, $n = 3, 4\ldots$

De Branges demostra la desigualtat de Lededev-Milin, la qual, segons havia provat Robertson, implica, de fet, la conjectura de Bieberbach generalitzada. Més precisament tenim el

Teorema (de Branges). Si $f \in S$ *i* $f(z) \not\equiv \dfrac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2}$ llavors:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)|c_k|^2 < 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k}$$

on c_k són els coeficients logarítmics de f.

El paper de la desigualtat de Milin és fonamental car es pot veure que el mètode de de Branges no permet provar directament la conjectura de Bieberbach.

Ingredients i idea de la demostració de de Branges:

i) El sistema especial de funcions:
Fixem n. Per a $k = 1, 2, ..., n$ sigui

$$\tau_k(t) = k \sum_{\nu=0}^{n-k} \frac{(-1)^\nu (2k + \nu + 1)_\nu (2k + 2\nu + 2)_{n-k-\nu}}{(k + \nu)\nu!(n - k - \nu)!} e^{-(\nu+k)t}$$

on $(a)_\nu = a(a + 1) \dots (a + \nu - 1)$ i $\tau_{n+1}(t) = 0$.

Un càlcul senzill prova que

$$(*) \qquad \tau_k(t) - \tau_{k+1}(t) = -\frac{\tau_k'(t)}{k} - \frac{\tau_{k+1}'(t)}{k+1}$$

Considerem ara els polinomis de Jacobi $P_j(\alpha, \beta)$. És el sistema ortonormalitzat de $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ a $\pounds^2[-1, 1]$ amb la mesura $(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta dx$ $(\alpha, \beta > -1)$. És conegut que:

$$P_n(\alpha,\beta)(+1) = \binom{n + \alpha}{n} \text{ i } P_n(\alpha,\beta)(x) = (-1)^n P_n(\beta,\alpha)(-x)$$

i, per tant,

$$P_n(\alpha,\beta)(-1) = (-1)^n \binom{n + \beta}{n} \Rightarrow P_n(\alpha,0)(-1) = (-1)^n$$

Ara el miracle és que, calculant, surt:

$$\tau_k'(t) = -ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j(2k,0)(1 - 2e^{-t})$$

Per tant $\tau_k'(0) = -k$ si $n - k = \dot{2}$, $\tau_k'(0) = 0$ si $n - k \neq \dot{2}$. Ara la relació (*) dóna: $\tau_k(0) - \tau_{k+1}(0) = 1$ i, d'aquí:

$$\tau_k(0) = n + 1 - k, \text{ per inducció.}$$

En aquest moment entra en joc un resultat de Askey i Gasper (1976) els quals havien provat que:

$$\text{Si } \alpha \geq -2 \text{ llavors } \sum_{k=0}^{n} P_k(\alpha, 0)(x) > 0 \text{ si } -1 \leq x \leq 1$$

Com que $-1 \leq 1 - 2e^{-t} \leq 1$ resulta que

$$\tau_k'(t) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < t < +\infty$$

i $\tau_k(t)$ és una funció decreixent. Recentment Gasper ha donat una demostració directa de la desigualtat utilitzada per de Branges.

ii) Un cop establert aquest resultat auxiliar bàsic, $\tau_k(t)$ decreixent, la idea de de Branges és la següent:

Considerem l'anomenada parametrització standard de la família de representacions conformes de Löwner; $f(t,z) = f_t(z) = e^t \cdot z + \ldots$ és la representació conforme de D sobre $\mathbf{C} \backslash J_t$, J corba de Jordan amb $f_t(0) = 0, f_t'(0) = e^t$, de manera que $f_0(z) = f(z)(f{:}D \to \mathbf{C} \backslash J)$ i $f_t(z) = e^t[z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t) z^n]$ $0 \geq t < \infty$, complint-se l'equació diferencial de Löwner.

$$\frac{\partial}{\partial t} t(z,t) = \frac{1 + \chi(t)z}{1 - \chi(t)z} z \frac{\partial}{\partial t} f(z,t); \qquad |\chi(t)| = 1 \text{ contínua a } [0, \infty).$$

i hem fet notar que només cal provar la conjectura per a aquest tipus de f especial.

Siguin $c_k(t)$ els coeficients logarítmics de $f_t(z)$, és a dir

$$\log \frac{f(t,z)}{e^t z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) z^n \quad 0 \leq t < \infty \qquad (c_k(0) = c_k)$$

i definim $b_k(t) = \sum_{j=1}^{k} j c_j(t) \chi(t)^{-j}$, $k = 1, 2 \ldots$

Derivant l'equació de $\log \frac{f(t,z)}{e^t z}$ i utilitzant l'equació de Löwner s'arriba a:

$$(*) \qquad c_k'(t) = \chi(t)^k [b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2], \; k = 1, 2 \ldots$$

Ara, fixant n posem:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(k |c_k(t)|^2 - \frac{4}{k}\right) \tau_k(t), \qquad 0 \leq t < \infty.$$

Un càlcul senzill dóna, mitjançant (*)

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=1}^{n} |b_{k-1}(t) + b_k(t) + 2|^2 \frac{\tau_k'(t)}{k}$$

de manera que, d'acord amb el resultat de *i*):

$$\varphi'(t) \geq 0 \qquad \text{i} \qquad \varphi(t) \uparrow \text{ a } 0 \leq t < \infty.$$

Ara fent servir que $e^{-t} f(z,t) \in S$ i un raonament de compacitat es veu que $\varphi(\infty) = \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$ i resulta: $\varphi(0) \leq \varphi(\infty) = 0$. Però això vol dir que:

$$\varphi(0) = \sum_{k=1}^{n} \left(k|c_k|^2 - \frac{4}{k}\right)(n+1-k) \leq 0$$

que és la desigualtat de Lebedev-Milin.

De Branges incloïa la seva primera versió de la demostració de la conjectura de Bieberbach en el capítol final del manuscrit de la 2.ª edició del seu llibre sobre sèries de quadrat sumable. Va anar a passar el mesos d'abril, maig i juny del 1984 a Leningrad i va discutir la seva demostració amb diversos matemàtics com Kuz'mina i Milin. La primera versió contenia un error que va poder ser resolt favorablement, versió que va aparèixer a Rússia. Tot seguit FitzGerald i Pommerenke van trobar una simplificació tècnica de la demostració i van fer circular àmpliament una versió de la demostració que va contribuir a la possibilitat de confirmació de la conjectura. Això va ser als voltants de juliol i agost del 1984. El mateix de Branges, independentment, va trobar una simplificació semblant.

En tot cas, la confirmació de la prova va ser una sorpresa car molta gent creia que la conjectura de Bieberbach seria certa però no la de Milin. En aquesta petita història no es pot oblidar el paper de Walter Gauschi que a més de comprovar a l'ordinador de Purdue les desigualtats finals fins al coeficient 30, cosa que donava suport moral a de Branges, va comunicar a de Branges el resultat de Askey i Gasper que va ser decisiu per acabar la demostració. Això ho va fer el febrer del 1984 i la confirmació a Leningrad va tenir lloc el mes de maig.

Com a observacions finals pel que fa al mètode de de Branges val la pena fer notar, en primer lloc, que és relativament curta en relació amb les proves de $|a_5| \leq 5$ i $|a_6| \leq 6$. En segon lloc la utilizatció d'un sistema sofisticat de funcions auxiliars que trasllada el problema a una suma de quadrats, per tant ≥ 0.

Les teories delicades de les variacions, les diferencials quadràtiques i la longitud extremal que havien nascut motivades per la conjectura de Bieberbach no són utilitzades en la demostració.

En tot cas de Branges afegeix al treball de Löwner, Milin i altres una idea nova que és combinada amb el fet afortunat que les funcions de pes τ_k que introdueix siguin decreixents.

Tot i que el resultat de de Branges tanca un problema que havia donat impuls a la teoria de les funcions univalents durant molts d'anys és d'esperar que la confirmació de la conjectura no freni l'activitat en aquest camp de la teoria de funcions.

REFERÈNCIES

LOUIS DE BRANGES, «A proof of the Bieberbach conjecture». *Acta Math.*, 154 (1985).

PETER L. DUREN, «Univalent functions». Springer Verlag. New York, Inc. 1983.

C. H. FITZGERALD i CH. POMMERENKE, «The de Branges theorem on univalent functions». *Trans. Amer. Math. Col.*, Vol. 290, 1985.

CH. POMMERENKE, «The Bieberbach Conjecture». *The Math. Intelligencer,* Vol. 7. N.º 2, 1985.