Invitació a les equacions funcionals*

CLAUDI ALSINA I CATALÀ **

La Matemàtica viu avui un moment de plenitud. Les nombroses branques en què la disciplina s'ha subdividit i l'enorme impuls donat a la recerca en les darreres dècades, fa que avui nombroses teories matemàtiques hagin anat adquirint llur personalitat pròpia quant a metodologies, resultats i modelitzacions. La Teoria d'Equacions Funcionals es troba en aquest cas.

Si mirem la classificació que l'American Mathematical Society fa dels diversos camps matemàtics trobarem un apartat específic (39B) dedicat a Equacions Funcionals, el qual es troba subdividit en 9 subapartats. Malgrat que el qualificatiu Equació Funcional podria semblar englobar tot tipus d'equacions on les incògnites fossin funcions, avui sols es consideren dintre de la teoria certs tipus d'equacions on, per dir-ho breument, no intervenen, entre d'altres coses, derivades de les funcions incògnites o operadors o integrals... Així per exemple les Teories d'Equacions Diferencials Ordinàries i Parcials tenen llur personalitat pròpia i es consideren al marge.

Aquestes pàgines les voldríem dedicar, fent honor al títol, a una invitació a la Teoria d'Equacions Funcionals, és a dir, a donar una idea d'alguns trets històrics i actuals.

1. QUÈ ÉS UNA EQUACIÓ FUNCIONAL?

Considerem d'entrada l'equació més clàssica, dita de Cauchy:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

* Conferència pronunciada el 12 de febrer del 1987 a la Societat Catalana de Matemàtiques.

**Departament de Matemàtiques i Estadística. E.T.S.A.B. Universitat Politènica de Catalunya.

Hi ha dues variables lliures x, y que poden variar en un cert domini, una operacio $+$ coneguda i una funció incògnita f que cal trobar.

Precisant més, prendrem com a *termes:* les variables independents $x_1, ..., x_s$ i les expressions del tipus $F(T_1, ..., T_m)$ on F és una funció de m variables i $T_1, ..., T_m$ són termes. Aquests seran els únics termes de la teoria. Aleshores una equació funcional serà una igualtat entre dos termes, del tipus $A_F = B$, on hi poden aparèixer unes variables independents $x_1, ..., x_k$, unes funcions conegudes $g_1, ..., g_l$ i unes funcions incògnites $f_1, ..., f_m$, amb $m \geq 1$. Trobar la *solució general* serà determinar *totes* les funcions incògnites que satisfan l'equació i els requeriments addicionals que s'hagin explicitat, i *resoldre* l'equació vol dir, per descomptat, determinar la solució general.

2. Una breu síntesi històrica

Les equacions funcionals estan lligades al desenvolupament del concepte modern de funció i als processos de resolució que caracteritzen determinades famílies de funcions solució. Hom no pot considerar pas dintre la teoria l'anàlisi de propietats específiques d'unes funcions donades, però sí les construccions de funcions a partir d'una equació.

Si bé trobem uns primers exemples de descriure certes funcions via una equació en Oresme (1347) i en Galileu (1638), el primer cas més remarcable és la construcció efectiva de la funció logaritme (Bürgi, Briggs, Napier, cap al 1620) a partir de la propietat $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. En 1647 Saint-Vincent va reconèixer que la integral de $1/x$ satisfà, de fet, una propietat equivalent i això va permetre a de Sarasa (1649) deduir que la dita integral debia ser igual al logaritme, a menys d'una constant multiplicativa.

El següent pas fonamental fou la formulació del càlcul feta per Newton i Leibniz. Això va permetre considerar equacions, en especial diferencials, però també descriure en termes d'equacions sense derivades certs tipus de funcions com les trigonomètriques (Euler, 1748) o les hiperbòliques (Lambert, 1770).

Així Euler va reduir $g(x + g(x)g'(x))^2 = g(x)^2(1 + g'(x)^2)$ a $f(x + f(x)) = f(x)$ mitjançant el canvi $f(x) = g'(x)g(x)$ i també va resoldre (1755) l'equació que avui porta el seu nom:

$$f(xy_1, xy_2, ..., xy_n) = x^k f(y_1, ..., y_n).$$

D'altres equacions importants (resoltes quasi sempre per mètodes diferencials) vingueren motivades per problemes físics, on era especialment rellevant determinar totes les solucions possibles. El problema de compondre forces fou estimulant. Així D'Alembert (1769) resolgué diversos casos de l'equació que avui porta el seu nom

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y),$$

i Monge, Lagrange, Laplace també feren diverses aportacions al problema de «sumar forces» i el mateix D'Alembert també considerà l'equació

$$f(x+y)-f(x-y)=g(x)h(y)$$

lligada al problema de la corda vibrant.

La idea d'emprar equacions funcionals que tan bé havia anat en Física aviat es veié important per a la pròpia Metamàtica. El desenvolupament

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

fou un punt crucial en l'Anàlisi dels segles XVIII i XIX i menà a moltes qüestions que avui ens semblen òbvies però que en l'època resultaven complicades. Així Euler (1774) demostra la validesa de la igualtat anterior per a exponents racionals α via trobar la solució de l'equació

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\cdot f(\beta),$$

Lacroix, en el seu celebrat text de 1797, resolt, entre d'altres, l'equació

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$$

en relació a les sèries de potències de a^x. Després d'uns resultats de Legendre el 1791, el 1821 Cauchy fa unes contribucions rigoroses, originals i bàsiques a la tècnica de resoldre equacions funcionals. Cauchy resol equacions a partir dels conceptes més simples que ell mateix ha rigoritzat (continuïtat, límits, convergència...) sense necessitat d'entrar en diferenciabilitat. Amb les equacions, no sols posa a proba el poder i la fàcil utilització de les seves definicions, sinó que a la vegada rigoritza d'altres qüestions matemàtiques. Les, avui clàssiques, equacions de Cauchy són:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\qquad f(x+y)=f(x)f(y),$$
$$f(xy)=f(x)+f(y),\qquad f(xy)=f(x)f(y).$$

Aviat fou evident que aquestes equacions eren un utillatge essencial en la resolució d'altres equacions, que amb canvis apropiats podien reduir-se a aquelles (això ja ho notà Gauss el 1809 abans que el propi Cauchy publiqués el seu llibre).

La resolució de la primera equació de Cauchy sota hipòtesis més febles que la continuïtat ha estat d'ençà el 1821 un camp d'enorme interès donat el paper que l'equació juga en tants problemes diferents. Per exemple, Darboux la va resoldre en 1875 suposant continuïtat en un punt o monotonia o afitació en un interval; Fréchet

(1913), Sierpinski (1920) i Banach (1920) usaren hipòtesis de mesurabilitat; Steinhaus (1920), amb afitació en un conjunt de mesura positiva, etc.

En 1905, Hamel va construir via l'axioma de l'elecció una base per als nombres reals sobre els racionals. Ho feu expressament per a resoldre en general l'equació de Cauchy, incloent també totes les possibles solucions discontínues, i de fet deixà una base que ha servit en molts d'altres problemes de la Matemàtica.

També l'equació de Cauchy ha motivat l'estudi en *dominis restringits* (*equacions condicionals*). Un bon exemple seria l'estudi de l'equació $f(mn) = f(m) + f(n)$ per a funcions $f: N \to R$, suposant m i n naturals primers entre sí o el cas de

$$f(x + y) \cdot (f(x + y) - f(x) - f(y)) = 0.$$

Cap al 1832 Bolyai i el 1837 Lobachevskiĭ empraren equacions funcionals en relació a problemes en geometria no euclidiana i en 1815 Babbage formulà l'equació del tipus $f \circ f = g$ on g és coneguda i f és incògnita, i entre 1823 i 1827 el genial Abel publicà tres articles fonamentals. En el primer va descriure un mètode general per a resolucions via diferenciació, en el segon va donar la solució diferenciable de l'equació funcional de l'associativitat, i en el tercer resolgué una equació amb tres funcions incògnites.

Weierstrass emprà equacions per a fonamentar la teoria de funcions el·líptiques i, en 1900, al presentar els seus famosos problemes, Hilbert feu dues referències explícites a les equacions funcionals en els seus 5.è i 13.è problemes. En el 5.è remarcà la conveniència de resoldre equacions sense hipòtesis de diferenciabilitat per ser aquesta suposició tècnica artificial a alguns problemes modelitzats per l'equació. En el 13.è, Hilbert conjecturà que no tota funció contínua de variables reals podria ser obtinguda per «superposició» de funcions d'una variable (conjectura que resultà ser falsa però no fou resolta fins el 1963 per Arnold i Kolmogorov).

A principis de segle, Schweitzer publicà un gran nombre de resultats entre 1911 i 1920 i d'ençà aquella època la teoria començà a perfilar-se com a tal, és a dir, una teoria matemàtica amb mètodes propis de resolució, amb una forma peculiar de classificar llurs equacions i d'oferir models funcionals útils. S'han publicat milers d'articles i alguns llibres. Es deuen a J. Aczél no sols alguns dels resultats més brillants d'aquest segle sinó també la capacitat d'haver fet un lideratge capaç d'aglutinar entorn seu els especialistes del camp i haver publicat els tractats bàsics sistematitzadors (vegeu bibliografia).

3. Tipus d'equacions, mètodes i estudis

Les equacions funcionals (i per tant la pròpia teoria) admeten diverses classificacions. En general hom distingeix entre equacions on hi ha una sola variable (per exemple $f(x^2) = af(x) + b$) o diverses variables ($f(x + y) = f(x) + f(y)$). A l'ensens hom fila més prim i especifica en cada un dels dos casos anteriors els tipus de funcions incògnites segons llurs dominis: funcions reals, funcions complexes, funcions vectorials o matricials, etc., i, si és precís (quan el domini i imatge no coincideixen), cal distingir el tipus de conjunt imatge de la funció. Hom classifica a part les equacions de diferències, les d'iteració i les definides per funcions implícites, però s'exclouen les d'operadors, les diferencials, les integrals, les integrodiferencials, les d'optimizació en programació dinàmica, etc.

En les taules 1 y 2 donem a tall d'exemple algunes equacions de reconegut prestigi i llurs solucions sota hipòtesis de forta regularitat. En la taula 1 veurem equacions per a funcions d'una variable i en la taula 2 veurem casos de funcions de vàries variables, però en ambdós casos intervenen diverses variables en les equacions.

EQUACIÓ FUNCIONAL	SOLUCIÓ
$f(x+y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = a \cdot x$
$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = e^{ax}$
$f(xy) = f(x) + f(y)$	$f(x) = a \ln x$
$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$	$f(x) = x^a$
$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$	$f(x) = ax + b$
$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$	$f(x) = \tan ax$
$f(x+y) = \frac{f(x)\cdot f(y)-1}{f(x)+f(y)}$	$f(x) = \cot ax$
$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+(f(x)f(y)/c^2)}$	$f(x) = c \tanh ax$
$f(x+y) = \frac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)+f(y)}$	$f(x) = \frac{c}{x}$
$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)+2f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)}$	$f(x) = \frac{cx}{1-cx}$

Taula 1.

EQUACIÓ FUNCIONAL	SOLUCIÓ
$f(x+y)+f(x-y)=2(f(x)+f(y))$	$f(x)\ ax^2$
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$	$f(x)=cx+a$
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$	$f(x)=\cosh bx$ $f(x)=\cos bx$
$f(x+y)\cdot f(x-y)=f(x)^2-f(y)^2$	$f(x)=ax$ $f(x)=a \operatorname{sen} bx$ $f(x)=a \operatorname{senh} \mathrm{bx}$
$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$	$f(x)\ \cos ax$ $g(x)=\operatorname{sen} ax$
$f(x+y)=f(x)\cdot e^y$	$f(x)=ae^x$
$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$	$f(x)=e^{ax}-1$
$a\cdot f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$	$f(x)=a\cdot e^{cx^2}$
$f(x+y+axy)=f(x)\cdot f(y)$	$f(x)=(1+ax)^c$
$f(\sqrt[n]{x^n+y^n})=f(x)+f(y)$	$f(x)=x^n$

Taula 1 (continuació).

Els mètodes de resolució més bàsics i característics són els d'aïllament directe de la funció incògnita, el de canvi de variables i reducció a un altre tipus, el d'extensió a dominis més amplis, el d'iteració de la pròpia equació o de llurs solucions, el de determinació de solucions en subconjunts densos i extensió per continuïtat, i el d'inducció per dimensions dels dominis, etc. Sols en casos extrems s'afegeixen hipòtesis addicionals i hom recorre a d'altres teories com la d'equacions diferencials ordinàries o parcials. En la tria del mètode més convenient a usar hi ha un cert art i sovint cal idear nous mètodes, el que possibilita el creixement de la teoria (i l'emoció dels investigadors implicats).

Genèricament, els tipus d'estudis que es fan sobre una equació podríem dir que són: llur resolució total trobant les solucions més generals possibles, veure com les solucions varien en canviar les hipòtesis de regularitat, estudi de les dues inequacions inherents a tota equació, estudi de l'estabilitat de les equacions, etc.

Tipus d'equació	Tipus de solució
Cauchy: $F(x+y, z+t) = F(x, z) + F(y, t)$	$F(x, y) = ax + by$
Sincov: $F(x, y) + F(y, z) = F(x, z)$	$F(x. y) = f(y) - f(x)$
Euler: $F(xz, yz) = z^k F(x, y), k \neq 0$	$F(x, y) = \begin{cases} x^k f\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0, \\ y^k \cdot c, & x = 0 \neq y, \\ 0 & , x = y = 0. \end{cases}$
Traslació: $F(x+z, y+z) = F(x, y) + z$	$F(x, y) = x + f(y-x)$
Mitjana ponderada: $\left.\begin{array}{r} F(x+t, y+t) = F(x, y) + t \\ F(xu, yu) = F(x, y)u, \ u \neq 0 \end{array}\right\}$	$F(x, y) = \dfrac{ax+by}{a+b}$
Composició: $F(F(x, u), v) = F(x, u+v)$	$F(x, y) = f(f^{-1}(x) + y)$
Associativitat: $F(F(x, y), z) = F(x, f(y, z))$	$F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$
Transitivitat: $F(F(x, z), F(y, z)) = F(x, y)$	$F(x, y) f(f^{-1}(x) - f^{-1}(y))$
Bisimetria: $\left.\begin{array}{r} F(F(x, y), F(u, v)) = F(F(x, u), F(y, v)) \\ F(x, y) = F(y, x) \\ F(x, x) = x \end{array}\right\}$	$F(x, y) = f^{-1}\left(\dfrac{f(x) + f(y)}{2}\right)$
Autodistributiva: $\left.\begin{array}{r} F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), F(x, t)) \\ F(F(x, y), z) = F(F(x, z), F(y, z)) \end{array}\right\}$	$F(x\ y) = f^{-1}((1-q)f(x) + $ $+ qf(y)), 0 < q < 1$
Interès: $\left.\begin{array}{l} F(x+y, t) = F(x, t) + F(y, t) \\ F(x, t+u) = F(F(x, t), u) \end{array}\right\}$	$F(x, y) = x \cdot q^y$

Taula 2.

4. APLICACIONS DE LES EQUACIONS FUNCIONALS

La teoria d'equacions funcionals ha fet aportacions notables a *totes* les altres branques de la matemàtica. És freqüent que l'estudi d'un determinat concepte meni a la resolució d'una equació funcional i per això hom troba avui dintre l'extensa bibliografia de la teoria, molts articles on l'autor resol una equació, o diverses, a nivell d'artilleria per a poder avançar en l'estudi del seu problema concret. Vet ací que això també ha fet possible l'aparició de conceptes matemàtics nous, d'àmplia aplicabilitat, que en el seu origen foren exclusivament motivats per la resolució d'una equació funcional concreta. Cal dir també que en determinades ocasions la teoria d'equacions funcionals ha aportat tal quantitat de resultats a una disciplina matemàtica, que ha generat, per si sola, una subdisciplina amb característiques pròpies. Aquest és el cas, per exemple, de les equacions relacionades amb normes derivables de productes escalars: l'estudi d'espais de Banach que són de Hilbert o les caracteritzacions de relacions d'ortogonalitat en espais normats o d'aplicacions ortogonalment additives... són subdisciplines amb un allau increible de resultats i entorn de les quals hi ha especialistes, congressos i tractats.

Fem referència ara a les aplicacions de la teoria fora de l'àmbit estrictament matemàtic. Les contribucions més notables han tingut lloc en la Física, l'Economia, la teoria de mesures de la Informació, les Ciències Socials i del Comportament, la teoria de la Decisió i el Consens, etc. Com a tret fonamental destacaríem el fet que la teoria permet caracteritzar quines funcions satisfan unes determinades condicions que venen delimitades pel propi model aplicat. Per això s'han donat aportacions substancials en l'elaboració de «paràmetres» indicadors o «mesures» de determinats conceptes. I és que, sovint, el propi concepte aplicat no queda nítidament establert fins que s'han formulat llurs possibles mesures o paràmetres. L'exemple més frapant podria ser el d'informació (vegi's [3]) o el d'índexs de preus (vegi's [8]).

5. ELS GRUPS DE RECERCA, AVUI

Els matemàtics dedicats amb certa exclusivitat a la teoria d'equacions funcionals són avui un centenar. Els grups més grans de recerca es troben actualment a les Universitats de Waterloo (Canadà), de Debrecen (Hongria) i de Katowice (Polònia) i sota el lideratge del Professor Janos Aczél s'han celebrat, anyalment, els «International Symposium on Functional Equations» que enguany arriven a la seva 25.ª edició. Aquests congressos han estat fonamentals per al progrés i sistematització de la teoria i han fet possible que la comunitat mundial d'experts sobre el tema tingui un canal privilegiat de bescanvi d'idees i resultats. Cal remarcar que el 26.è simposi tindrà lloc per primera vegada a Catalunya el proper abril de 1988 a Sant Feliu de Guíxols.

A nivell de publicacions, i deixant de banda els tractats bàsics que es citen en la bibliografia, cal dir que existeixen algunes revistes especialitzades sobre el tema, essent les cabdals «Aequationes Mathematicae» de Canadà i «Publicationes Mathematicae» de Debrecen d'Hongria. Si bé la publicació d'articles entorn d'equacions funcionals també es troba en la quasi totalitat de revistes matemàtiques d'arreu, tan generals com especialitzades.

Entre les aportacions dels darrers anys cal citar les de: J. Aczél, J. A. Baker, B. Forte, M. A. Mckiernan, Pl. Kannappan, C. T. Ng, T. Davison i M. A. Taylor de Canadà; B. Schweizer, A. Sklar, M. J. Frank, R. Bellman i J. H. B. Kemperman d'Estats Units; Z. Daroczy, I. Fenyö, Gy Maksa, L. Losonczi, E. Viricze i M. Hosszú d'Hongria; M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, S. Golap, K. Baron, i J. Tabor de Polònia; A. Climescu, M. Ghermanescu i F. Radó de Romania; V. I. Arnol'd i G. N. Sakovic en l'Unió Soviètica; S. Kurepa i D. S. Mitrinovic de Iugoslàvia; F. Neuman de Txecoslovàquia; W. Benz, W. Eichhorn, H. M. Kairies, Gy. Targonski, W. Walter d'Alemanya; A. Ostrowski i J. Rätz de Suïssa; L. Paganoni i G. Forti d'Itàlia; J. Kampé de Fériet i J. Dhombres de França; L. Reich i J. Schwaiger d'Àustria i, modestament, C. Alsina a Catalunya.

REFERÈNCIES

Hi ha publicats bastants milers d'articles sobre equacions funcionals. Les referències que es donen a continuació es limiten a llibres dedicats parcialment o totalment al tema i que, en alguns casos, han estat fonamentals ([1], [14]) cara a la sistematització de la teoria.

[1] ACZÉL, J., Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, New York-London, 1966.

[2] ACZÉL, J. A Short Course on Functional Equations Based Upon Recent Applications to Social and Behavioural Sciences, Reidel, 1986.

[3] ACZÉL, J. i DARÓCZY, Z. On Measures of Information and Their Characterizations. Academic Press, New York-San Francisco-London, 1975.

[4] ACZÉL, J. i DHOMBRES, J. Functional Equations Containing Several Variables. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[5] ALSINA, C., FRANK, M. J. i SCHWEIZER, B. Associative Functions on Intervals (en preparació).

[6] BELLMAN, R. Functional Equations, Handbook of Mathematical Psychology, Vol. III, Wiley and Sons, New York, 1965.

[7] DHOMBRES, J. Some Aspects of Functional Equations. Pub. Dept. Math., Chulalongkorn Univ., 1979.

[8] EICHHORN, W. Functional Equations in Economics. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1978.

[9] GALAMBOS, J. i KOTZ, S. Characterizations of Probability Distributions. A Unified Approach and Emphasis on Exponential and Related Models. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[10] GHERMANESCU, M. Ecuatii Functionale, Bucarest, 1960.

[11] HARDY, G. M., LITTLEWOOD, J. E. i PÓLYA, G. Inequalities, 2.ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[12] HILLE, E. Topics in Classical Analysis, Lectures in Modern Mathematics, Vol. III, Wiley and Sons, New York, 1965.

[13] KRANTZ, D. M., LUCE, R. D., SUPPES, R. i TVERSKY, A. Foundations of Measurement, Vol. I. Additive and Polynomial Representations. Academic Press, New York-London, 1971.

[14] KUCZMA, M. Functional Equations in a Single Variable. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[15] KUCZMA, M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. P. W. N.-Univ. Staski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.

[16] SCHWFIZER, B. i SKLAR, A. Probabilistic Metric Spaces. North Holland, New York-Amsterdam-Oxford, 1983.

[17] TARGONSKI, G.

[18] TODD, J. i TAUSSKY, O. Functional Equations, Mimeographed notes, Dept. Mathematics CALTECM, 1978.